IES Fernando de Herrera **Curso 2015 / 16**

Primer trimestre - Primer examen – 1º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Calcular y simplificar (sin calculadora, denominadores racionalizados, exponentes positivos):

   a) $\dfrac{6^7 4^{-3}(-(-3)^8)}{(-12)^{-3}18^2}$ *(1 punto)*

   b) $\dfrac{3\sqrt{8}+2\sqrt{32}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ *(1 punto)*

2) Dar el valor simplificado de ln y, siendo $y = \dfrac{3e^{2x}}{\sqrt[3]{x(x+y)^2}}$ *(1,5 puntos)*

3) Desarrollar y simplificar el resultado: $\left(\dfrac{2x^2}{y} - xy^3\right)^4$ *(1,5 puntos)*

4) Simplificar: $\dfrac{\dbinom{n+1}{n} - \dbinom{n+2}{n}}{\dfrac{n^2+n}{2}}$ *(1,5 puntos)*

5) Dado el polinomio $2x^3 + mx^2 + nx - 30$, hallar m y n para que el polinomio sea divisible entre $x - 2$ y que el resto de dividirlo entre $x + 2$ sea -180. *(1,5 puntos)*

6) Resolver la siguiente ecuación: *(2 puntos)*

$$\frac{4}{2-x} - \frac{5x^2-1}{3-x} = \frac{15x^2-15x-22}{2x^2-10x+12}$$

SOLUCIONES

1) Calcular y simplificar (sin calculadora, denominadores racionalizados, exponentes positivos):

a) $\dfrac{6^7 4^{-3}(-(-3)^8)}{(-12)^{-3}18^2}$ *(1 punto)*

Teniendo en cuenta que una base negativa elevada a exponente impar da un resultado negativo, y si el exponente es par el resultado es positivo, tenemos:

$$\frac{6^7 4^{-3}(-(-3)^8)}{(-12)^{-3}18^2} = \frac{(2\cdot 3)^7(2^2)^{-3}(-(+3)^8)}{(-2^2\cdot 3)^{-3}(2\cdot 3^2)^2} = \frac{-2^7\cdot 3^7 2^{-6}\cdot 3^8}{-(2^2\cdot 3)^{-3}2^2\cdot 3^4} = \frac{2\cdot 3^{15}}{2^{-6}\cdot 3^{-3}2^2\cdot 3^4} =$$

$$= \frac{2\cdot 3^{15}}{2^{-4}\cdot 3} = \boxed{2^5 3^{14}}$$

b) $\dfrac{3\sqrt{8}+2\sqrt{32}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ *(1 punto)*

$$\frac{3\sqrt{8}+2\sqrt{32}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2^3}+2\sqrt{2^5}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2^2 2}+2\sqrt{2^4 2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{3\cdot 2\sqrt{2}+2\cdot 2^2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{6\sqrt{2}+8\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{14\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}\,\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \frac{14\sqrt{2}(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{28\sqrt{6}-42\cdot 2}{12-18} = \frac{28\sqrt{6}-84}{-6} = -\frac{2(14\sqrt{6}-42)}{6} = \frac{-(14\sqrt{6}-42)}{3} =$$

$$= \boxed{\frac{42-14\sqrt{6}}{3}}$$

Hay que tener en cuenta que un signo – no debe aparecer afectando a todo el denominador de una expresión simplificada.

2) Dar el valor simplificado de ln *y*, siendo $y = \dfrac{3e^{2x}}{\sqrt[3]{x(x+y)^2}}$ *(1,5 puntos)*

$$y = \frac{3e^{2x}}{\sqrt[3]{x(x+y)^2}} \Rightarrow \boxed{\ln y =} \ln\frac{3e^{2x}}{\sqrt[3]{x(x+y)^2}} = \ln(3e^{2x}) - \ln\sqrt[3]{x(x+y)^2} =$$

$$= \ln 3 + \ln e^{2x} - \frac{1}{3}\ln x(x+y)^2 = \ln 3 + 2x\ln e - \frac{1}{3}[\ln x + \ln(x+y)^2] =$$

$$= \boxed{\ln 3 + 2x - \frac{1}{3}\ln x - \frac{2}{3}\ln(x+y)}$$

No se puede continuar, pues el logaritmo de una suma no admite simplificación.

3) Desarrollar y simplificar el resultado: $\left(\dfrac{2x^2}{y} - xy^3\right)^4$ *(1,5 puntos)*

Según la fórmula conocida como *Binomio de Newton*:

$$\left(\frac{2x^2}{y} - xy^3\right)^4 =$$

$$=\binom{4}{0}\left(\frac{2x^2}{y}\right)^4-\binom{4}{1}\left(\frac{2x^2}{y}\right)^3xy^3+\binom{4}{2}\left(\frac{2x^2}{y}\right)^2(xy^3)^2-\binom{4}{3}\frac{2x^2}{y}(xy^3)^3+\binom{4}{4}(xy^3)^4=$$

$$=\frac{2^4x^8}{y^4}-4\frac{2^3x^6}{y^3}xy^3+6\frac{2^2x^4}{y^2}x^2y^6-4\frac{2x^2}{y}x^3y^9+x^4y^{12}=$$

$$=\frac{16x^8}{y^4}-32x^7+24x^6y^4-8x^5y^8+x^4y^{12}$$

4) Simplificar: $\dfrac{\binom{n+1}{n}-\binom{n+2}{n}}{\frac{n^2+n}{2}}$ *(1,5 puntos)*

Usando que $\binom{m}{n}=\binom{m}{m-n}$, se tiene:

$$\frac{\binom{n+1}{n}-\binom{n+2}{n}}{\frac{n^2+n}{2}}=\frac{\binom{n+1}{1}-\binom{n+2}{2}}{\frac{n^2+n}{2}}=\frac{n+1-\frac{(n+2)(n+1)}{2!}}{\frac{n^2+n}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{2(n+1)-(n+2)(n+1)}{2}}{\frac{n^2+n}{2}}=\frac{2n+2-(n^2+n+2n+2)}{2\frac{n^2+n}{2}}=\frac{2n+2-(n^2+3n+2)}{n^2+n}=$$

$$=\frac{2n+2-n^2-3n-2}{n^2+n}=\frac{-n^2-n}{n^2+n}=\frac{-(n^2+n)}{n^2+n}=\boxed{-1}$$

5) Dado el polinomio $2x^3+mx^2+nx-30$, hallar m y n para que el polinomio sea divisible entre $x-2$ y que el resto de dividirlo entre $x+2$ sea -180. *(1,5 puntos)*

Según el *Teorema del Resto*, si el polinomio, al que llamaremos $P(x)$, es divisible entre $x-2$, se verificará: $P(2)=0$:

$$2\cdot 2^3+m2^2+n2-30=0\ \Rightarrow\ 16+4m+2n-30=0\ \Rightarrow\ 4m+2n=14$$

Y por la misma razón, si al dividirlo entre $x+2$ el resto es $-180 \Rightarrow P(-2)=-180$:

$$2\cdot(-2)^3+m(-2)^2+n(-2)-30=-180\ \Rightarrow\ -16+4m-2n=-180+30\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4m-2n=-150+16\ \Rightarrow\ 4m-2n=-134$$

Tenemos un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, que resolvemos por reducción:

$$\left.\begin{aligned}4m+2n&=14\\4m-2n&=-134\end{aligned}\right\}\qquad \text{Sustit. en la } 1^{\text{a}} \text{ ec}:$$

$$8m=-120\Rightarrow m=-15\qquad 4(-15)+2n=14\Rightarrow 2n=14+60\Rightarrow n=\frac{74}{2}=37$$

O sea, $\boxed{m=-15,\ n=37 \text{ y } P(x)=2x^3-15x^2+37x-30}$.

6) Resolver la siguiente ecuación: *(2 puntos)*

$$\frac{4}{2-x}-\frac{5x^2-1}{3-x}=\frac{15x^2-15x-22}{2x^2-10x+12}$$

Comenzamos factorizando los denominadores. Según el *Teorema de Descomposición Factorial*, si conocemos las n raíces de un polinomio de grado n (el mismo), el polinomio es el coeficiente del término (sumando) de mayor grado multiplicado por los factores de la forma $x - raíz$ para cada una de las raíces. Así:

$$2x^2 - 10x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = 2 \\ = 3 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 2(x-2)(x-3)$$

$$2 - x = -(x-2)$$

$$3 - x = -(x-3)$$

Por todo ello:

$$\frac{4}{2-x} - \frac{5x^2-1}{3-x} = \frac{15x^2-15x-22}{2x^2-10x+12} \Leftrightarrow \frac{-4}{x-2} + \frac{5x^2-1}{x-3} = \frac{15x^2-15x-22}{2(x-2)(x-3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{15x^2-15x-22}{2(x-2)(x-3)} + \frac{4}{x-2} - \frac{5x^2-1}{x-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x^2-15x-22}{2(x-2)(x-3)} + \frac{8(x-3)}{2(x-2)(x-3)} - \frac{2(5x^2-1)(x-2)}{2(x-2)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x^2-15x-22+8x-24-(10x^2-2)(x-2)}{2(x-2)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x^2-7x-46-(10x^3-20x^2-2x+4)}{2(x-2)(x-3)} = 0$$

Una fracción se anula si, y sólo si lo hace el numerador pero no el denominador. Por tanto, lo anterior ocurrirá cuando el numerador se haga cero, excluyendo los valores que anulan el denominador, esto es: $2(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ó $x = 3$. Y los valores que anulan el numerador son:

$$15x^2 - 7x - 46 - 10x^3 + 20x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow -10x^3 + 35x^2 - 5x - 50 = 0$$

Descomponemos por Ruffini:

	–10	35	–5	–50
–1		10	–45	50
	–10	45	–50	0
2		–20	50	
	–10	25	0	
5/2		–25		
	–10	0		

Luego las raíces del polinomio y, por tanto, las soluciones de la ecuación anterior son -1, 2 y $5/2$. Pero hemos de descartar 2 porque anula el denominador de la ecuación inicial. Por tanto, las soluciones válidas son:

$$\boxed{x = -1 \text{ ó } x = 5/2}$$

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** No atender las instrucciones puede **penalizarse** con hasta 1 punto.

1) Desarrollar, usando el Binomio de Newton: $\left(2x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^4$. *(1,5 puntos)*

2) Resolver la ecuación: $-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{5}{4} = 0$ *(1,5 puntos)*

3) Resolver la ecuación: $\ln(x + 1) - \ln(x) = \ln(x + 3) - \ln 2$ *(1,5 puntos)*

4) Resolver la ecuación: $\binom{17}{14} + \binom{17}{2} = \binom{18}{x-2}$ *(1,5 puntos)*

5) Resolver el sistema: $\begin{cases} \dfrac{-2x^2+4x+6}{x-2} \leq 0 \\ 2x-3<0 \end{cases}$ *(2 puntos)*

6) Clasificar y resolver el siguiente sistema. Si tuviera más de una solución, decir 3 soluciones concretas: *(Clasif: 0,5 + Resol: 0,5 + Sols concr: 1)*

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2y-3z=-3 \\ -5x+4y+5z=\ \ 1 \\ 7x-6y-8z=-4 \end{array}\right\}$$

SOLUCIONES

1) Desarrollar, usando el Binomio de Newton: $\left(2x^3-\frac{1}{x^2}\right)^4$. *(1,5 puntos)*

$$\left(2x^3-\frac{1}{x^2}\right)^4=$$

$$=\binom{4}{0}(2x^3)^4-\binom{4}{1}(2x^3)^3\frac{1}{x^2}+\binom{4}{2}(2x^3)^2\left(\frac{1}{x^2}\right)^2-\binom{4}{3}2x^3\left(\frac{1}{x^2}\right)^3+\binom{4}{4}\left(\frac{1}{x^2}\right)^4=$$

$$=2^4x^{12}-4\cdot2^3x^9\frac{1}{x^2}+6\cdot2^2x^6\frac{1}{x^4}-4\cdot2x^3\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}=$$

$$=\boxed{16x^{12}-32x^7+24x^2-\frac{8}{x^3}+\frac{1}{x^8}}$$

2) Resolver la ecuación: $-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}-\frac{5}{4}=0$ *(1,5 puntos)*

$$-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}-\frac{5}{4}=\frac{-4x(x-1)-4(x-1)+8x^2-5x^2(x-1)}{4x^2(x-1)}=$$

$$=\frac{-4x^2+4x-4x+4+8x^2-5x^3+5x^2}{4x^2(x-1)}=\frac{-5x^3+9x^2+4}{4x^2(x-1)}$$

De este modo, la ecuación se transforma en:

$$\frac{-5x^3+9x^2+4}{4x^2(x-1)}=0 \Leftrightarrow -5x^3+9x^2+4=0, \text{ con } x\neq0 \text{ y } x\neq1$$

Factorizamos el polinomio resultante, por Ruffini:

	–5	9	0	4
2		– 10	– 2	– 4
	–5	–1	– 2	0

No vemos una raíz fácil para continuar, de modo que igualamos a 0 el polinomio cociente y resolvemos la ecuación, en busca de sus raíces:

$$-5x^2-x-2=0 \Leftrightarrow 5x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-40}}{10}$$

que no tiene solución. Se trata de un polinomio irreducible. Así:

$$-5x^3+9x^2+4=0 \Leftrightarrow (x-2)(-5x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow x=2$$

Esta solución es válida, pues no es ni 0 ni 1, valores que había que descartar, pues anulaban denominadores. La solución final es: $\boxed{x=2}$.

3) Resolver la ecuación: $\ln(x+1)-\ln(x)=\ln(x+3)-\ln 2$ *(1,5 puntos)*

$$\ln(x+1)-\ln(x)=\ln(x+3)-\ln 2 \Rightarrow \ln\frac{x+1}{x}=\ln\frac{x+3}{2} \Rightarrow \frac{x+1}{x}=\frac{x+3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x+1)=x(x+3) \Rightarrow 2x+2=x^2+3x \Rightarrow 0=x^2+x-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\left\langle\begin{array}{l}=1\\=-2\end{array}\right.$$

La primera solución es válida, porque ni anula ni hace negativo ningún argumento de logaritmos en la ecuación original. En cambio, la segunda no cumple esto, por lo que no es válida. Tiene, pues, $\boxed{\text{solución única: } x=1}$.

4) Resolver la ecuación: $\binom{17}{14}+\binom{17}{2}=\binom{18}{x-2}$ *(1,5 puntos)*

Aplicando propiedades de los números combinatorios:

$$\binom{17}{14}+\binom{17}{2}=\binom{17}{3}+\binom{17}{2}=\binom{18}{3}$$

Por tanto, la ecuación puede escribirse así:

$$\binom{18}{3}=\binom{18}{x-2}$$

Y, teniendo en cuenta que $\binom{18}{3}=\binom{18}{15}$, también se podría escribir así:

$$\binom{18}{15}=\binom{18}{x-2}$$

Luego hay dos posibilidades:

- $3 = x - 2 \Leftrightarrow \boxed{x = 5}$.
- $15 = x - 2 \Leftrightarrow \boxed{x = 17}$.

Ambas posibilidades son válidas, pues los números combinatorios de la ecuación original tienen sentido con cada una de ellas. Luego hay dos soluciones.

5) Resolver el sistema: $\begin{cases} \dfrac{-2x^2+4x+6}{x-2}\le 0 \\ 2x-3<0 \end{cases}$ *(2 puntos)*

Para resolver la inecuación $\dfrac{-2x^2+4x+6}{x-2}\le 0$, procedemos así:

- Factorizamos y hallamos las raíces de numerador y denominador.
  - $-2x^2 + 4x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}=-1\\=3\end{cases}$

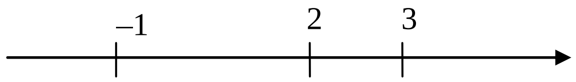
    Por lo que, como conocemos las dos raíces del polinomio de grado 2, aplicando el Teorema de Descomposición Factorial tenemos que:

    $\boxed{-2x^2 + 4x + 6 = -2(x + 1)(x - 3) \text{ y sus raíces son } -1 \text{ y } 3}$.
  - $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, que es su única raíz, y el polinomio ya está factorizado.

- Inecuación simplificada:

  La inecuación se transforma en: $\dfrac{-2(x+1)(x-3)}{x-2}\le 0 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{(x+1)(x-3)}{x-2}\ge 0}$

- Cuadro de signos. Dividimos R en intervalos mediante las raíces obtenidas, una vez ordenadas, y creamos el cuadro de signos: ninguno de los factores intervinientes cambiará de signo dentro de dichos intervalos, por lo que basta tomar un punto cualquiera de cada uno de ellos para evaluar los signos (cualquier otro punto ofrecerá el mismo signo):



	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x+1$	–	0	+	…	+	…	+
$x-2$	–	…	–	0	+	…	+
$x-3$	–	…	–	…	–	0	+
$\dfrac{(x+1)(x-3)}{x-2}$	–	0	+	$\nexists$	–	0	+
¿Sirven? →	No	Si	Si	No	No	Si	Si

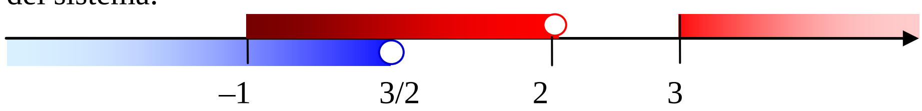
Los signos de la última fila, que son los que nos interesan, los obtenemos mediante la regla de los signos con los que están en su misma columna. Los valores que anulan el denominador provocan que no se pueda completar la operación, por lo que los descartamos. Al estudiar las tres raíces, sólo nos interesan los factores que se anulan, de entre los tres que investigamos. Es por ello que ponemos puntos suspensivos en los otros, porque 0 multiplicado por lo que den, resulta 0. De este modo:

$$\boxed{[-1, 2) \cup [3, +\infty)}$$

Resolver la segunda inecuación del sistema consiste, únicamente, en despejar:

$$2x-3<0 \Leftrightarrow 2x<3 \Leftrightarrow x<3/2 \Leftrightarrow \boxed{x \in (-\infty, 3/2)}$$

Llevamos a un gráfico sobre la *recta real* las soluciones de las dos inecuaciones, para ver dónde se verifican *simultáneamente* y llegar, de esta manera, a la solución del sistema:



Por tanto, la solución del sistema es: $\boxed{[-1, 3/2)}$.

6) Clasificar y resolver el siguiente sistema. Si tuviera más de una solución, decir 3 soluciones concretas: *(Clasif: 0,5 + Resol: 0,5 + Sols concr: 1)*

$$\left.\begin{aligned} 2x-2y-3z &= -3 \\ -5x+4y+5z &= 1 \\ 7x-6y-8z &= -4 \end{aligned}\right\}$$

Por el método de Gauss, triangularizamos la *matriz de los coeficientes*, inmersa en la *matriz ampliada*:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2+2F_1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos conseguido triangularizar el sistema. Como ninguna fila es toda de 0 salvo la última columna, el sistema es *compatible*. La última fila es nula, por lo que prescindimos de ella, quedándonos con un sistema triangularizado con menos filas (2) que ecuaciones (3), por lo que se trata de un $\boxed{\textit{sistema compatible indeterminado}}$, con infinitas soluciones.

Reconstruimos el sistema resultante, para resolverlo. A la incógnita que sobra (tenemos una incógnita más que el número de ecuaciones), la llamamos t, siendo éste un valor libremente elegido por nosotros (hay infinitas formas de hacerlo: una por cada número real), y la pasamos al segundo miembro. Debemos elegir, para ello, x ó z, pues si llamásemos t a y, perderíamos la triangularización al pasarla al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2y-3t=-3 \\ -x \qquad -t=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-2y=-3+3t \\ -x \qquad =-5+t \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(2ª ec.) } x = 5 - t$$

Sustituimos en la 1ª: $10 - 2t - 2y = -3 + 3t \Rightarrow 10 - 2t + 3 - 3t = 2y \Rightarrow y = \dfrac{13-5t}{2}$

El esquema general de las infinitas soluciones, en función de t, es:

$$\boxed{\left(5-t,\ \frac{13-5t}{2},\ t\right)}$$

Dando valores a t obtenemos las diferentes soluciones. Nos piden 3. Por ejemplo:

- $t = 0$: $(5, 13/2, 0)$
- $t = 1$: $(4, 4, 1)$
- $t = 3$: $(2, -1, 3)$

IES Fernando de Herrera **Curso 2015 / 16**
Primer trimestre - Recuperación – 1º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Desarrollar, usando el Binomio de Newton: $\left(\frac{1}{x^3}-3x^4\right)^4$. *(1,5 puntos)*

2) Resolver la ecuación: $\frac{2x-3}{x^2+x-2}+\frac{2+x}{1-x}=\frac{15x-9}{4x-4}$ *(1,5 puntos)*

3) Resolver la ecuación: $9^{x+2}+3^{x+3}=18$ *(1,5 puntos)*

4) Dado el polinomio $2x^3+mx^2+nx-6$, hallar m y n para que el polinomio sea divisible entre $x+2$ y que el resto de dividirlo entre $x-2$ sea -20. *(1,5 puntos)*

5) Resolver el sistema: $\begin{cases} \frac{-2x^2+5x+3}{x+2}\le 0 \\ 3x-6>0 \end{cases}$ *(2 puntos)*

6) Clasificar y resolver el siguiente sistema. Si tuviera más de una solución, decir 3 soluciones concretas: *(Clasif: 0,5 + Resol: 0,5 + Sols concr: 1)*

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2y-3z=5 \\ 3x+4y+5z=5 \\ -x-6y-8z=0 \end{array}\right\}$$

SOLUCIONES

1) Desarrollar, usando el Binomio de Newton: $\left(\frac{1}{x^3}-3x^4\right)^4$. *(1,5 puntos)*

$$\left(\frac{1}{x^3}-3x^4\right)^4 =$$

$$=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{x^3}\right)^4-\binom{4}{1}\left(\frac{1}{x^3}\right)^3 3x^4+\binom{4}{2}\left(\frac{1}{x^3}\right)^2(3x^4)^2-\binom{4}{3}\frac{1}{x^3}(3x^4)^3+\binom{4}{4}(3x^4)^4=$$

$$=\frac{1}{x^{12}}-4\frac{1}{x^9}3x^4+6\frac{1}{x^6}9x^8-4\frac{1}{x^3}27x^{12}+81x^{16}=$$

$$=\boxed{\frac{1}{x^{12}}-12\frac{1}{x^5}+54x^2-108x^9+81x^{16}}$$

2) Resolver la ecuación: $\frac{2x-3}{x^2+x-2}+\frac{2+x}{1-x}=\frac{15x-9}{4x-4}$ *(1,5 puntos)*

Factorizamos los denominadores. Como $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=$

$=\frac{-1\pm3}{2}=\left\langle\begin{array}{l}=-2\\=1\end{array}\right. \Rightarrow x^2+x-2=(x+2)(x-1)$. La ecuación, entonces, es:

$$\frac{2x-3}{x^2+x-2}+\frac{2+x}{1-x}=\frac{15x-9}{4x-4} \Rightarrow \frac{2x-3}{(x+2)(x-1)}+\frac{2+x}{-(x-1)}=\frac{15x-9}{4(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4(2x-3)}{4(x+2)(x-1)}-\frac{2+x}{(x-1)}=\frac{(15x-9)(x+2)}{4(x+2)(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8x-12}{4(x+2)(x-1)}-\frac{4(x+2)(x+2)}{4(x+2)(x-1)}=\frac{15x^2+30x-9x-18}{4(x+2)(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8x-12-4(x^2+4x+4)}{4(x+2)(x-1)}=\frac{15x^2+21x-18}{4(x+2)(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8x-12-4x^2-16x-16-15x^2-21x+18}{4(x+2)(x-1)}=0 \Rightarrow \frac{-19x^2-29x-10}{4(x+2)(x-1)}=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 19x^2+29x+10=0$, siendo $x\neq-2$ y $x\neq1$ (anulan el denominador) $\Rightarrow$

$$x=\frac{-29\pm\sqrt{841-760}}{38}=\frac{-29\pm\sqrt{81}}{38}=\frac{-29\pm9}{38}=\left\langle\begin{array}{l}=\frac{-38}{38}=-1\\=\frac{-20}{38}=-\frac{10}{19}\end{array}\right.$$

Como no son los valores que anulan el denominador, ambas soluciones son válidas: $\boxed{x=-1 \text{ ó } x=-\frac{10}{19}}$.

3) Resolver la ecuación: $9^{x+2}+3^{x+3}=18$ *(1,5 puntos)*

$$9^{x+2}+3^{x+3}=18 \Rightarrow 9^x 9^2+3^x 3^3=18 \Rightarrow 81\,(3^2)^x+27\cdot3^x-18=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 81\cdot3^{2x}+27\cdot3^x-18=0 \Rightarrow 81\cdot(3^x)^2+27\cdot3^x-18=0$$

Realizamos un *cambio de incógnita*: $\boxed{t=3^x}$:

$$81t^2 + 27t - 18 = 0 \Rightarrow 9t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{18} = \frac{-3 \pm 9}{18} = \left\langle \begin{array}{l} = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3} \\ = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Deshacemos el *cambio*:

- $t = -\frac{2}{3} \Rightarrow 3^x = -\frac{2}{3}$ Imposible, pues $3^x > 0 \ \forall x$.
- $t = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow \boxed{x = -1}$.

4) Dado el polinomio $2x^3 + mx^2 + nx - 6$, hallar m y n para que el polinomio sea divisible entre $x + 2$ y que el resto de dividirlo entre $x - 2$ sea -20. *(1,5 puntos)*

Si el polinomio $P(x)$ es divisible entre $x + 2$, según el *Teorema del Resto de Ruffini*, se tiene: $P(-2) = 0 \Rightarrow 2(-2)^3 + m(-2)^2 + n(-2) - 6 = 0 \Rightarrow -16 + 4m - 2n - 6 = 0 \Rightarrow 4m - 2n - 22 = 0 \Rightarrow 4m - 2n = 22 \Rightarrow 2m - n = 11$ (1).

Y si el resto es -20 al dividir $P(x)$ entre $x - 2 \Rightarrow P(2) = -20 \Rightarrow 2\cdot 2^3 + m\cdot 2^2 + n\cdot 2 - 6 = -20 \Rightarrow 16 + 4m + 2n - 6 + 20 = 0 \Rightarrow 4m + 2n + 30 = 0 \Rightarrow 2m + n = -15$ (2).

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2). Sumándolas: $4m = -4 \Rightarrow \boxed{m = -1}$. Sustituyendo en (2): $-2 + n = -15 \Rightarrow \boxed{n = -13}$.

5) Resolver el sistema: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{-2x^2 + 5x + 3}{x+2} \le 0 \\ 3x - 6 > 0 \end{array} \right.$ *(2 puntos)*

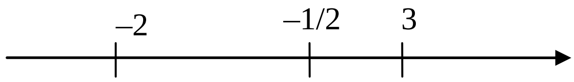
Resolvemos cada inecuación por separado.

- Para la primera, hallamos las raíces y factorizamos numerador y denominador:
  - $-2x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \left\langle \begin{array}{l} = -1/2 \\ = 3 \end{array} \right. \Rightarrow -2x^2 + 5x + 3 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)$
  - $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

  Por ello, la inecuación se transforma en:

$$\frac{-2x^2 + 5x + 3}{x+2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)}{x+2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)}{x+2} \ge 0$$

Esto nos dice que hemos de buscar los valores de x que hacen que la expresión anterior sea negativa o 0. Para ello, dividimos R mediante todas las raíces obtenidas:



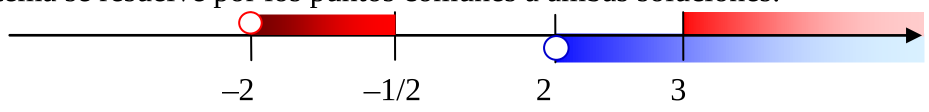
En cada intervalo resultante, la expresión mantiene signo. Creamos el siguiente cuadro y vemos dichos signos, por ejemplo tomando un punto cualquiera de cada intervalo y evaluando el signo de cada expresión:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1/2)$	$-1/2$	$(-1/2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x+2$	–	0	+	…	+	…	+
$x+1/2$	–	…	–	0	+	…	+
$x-3$	–	…	–	…	–	0	+
$\dfrac{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)}{x+2}$	–	$\nexists$	+	0	–	0	+
¿Sirven? →	No	No	Si	Si	No	Si	Si

Por lo que la solución son los puntos de $\boxed{(-2, -1/2] \cup [3, +\infty)}$.

- $3x - 6 > 0 \iff 3x > 6 \iff \boxed{x > 2}$.

El sistema se resuelve por los puntos comunes a ambas soluciones:



Es decir: $\boxed{[3, +\infty)}$.

6) Clasificar y resolver el siguiente sistema. Si tuviera más de una solución, decir 3 soluciones concretas: *(Clasif: 0,5 + Resol: 0,5 + Sols concr: 1)*

$$\left.\begin{aligned} 2x-2y-3z &= 5 \\ 3x+4y+5z &= 5 \\ -x-6y-8z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Por el método de Gauss, triangularizamos la *matriz de los coeficientes*, inmersa en la *matriz ampliada*:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ -1 & -6 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2+2F_1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 15 \\ -7 & 0 & 1 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema está triangularizado. Como ninguna fila es toda de 0 salvo la última columna, el sistema es *compatible*. La última fila es nula, por lo que prescindimos de ella, quedándonos con un sistema triangularizado con menos filas (2) que ecuaciones (3), por lo que se trata de un $\boxed{\textit{sistema compatible indeterminado}}$, con infinitas soluciones.
Reconstruimos el sistema resultante, para resolverlo. A la incógnita que sobra (tenemos una incógnita más que el número de ecuaciones), la llamamos t, siendo éste un valor libremente elegido por nosotros (hay infinitas formas de hacerlo: una por cada número real), y la pasamos al segundo miembro. Debemos elegir, para ello, x ó z, pues si llamásemos t a y, perderíamos la triangularización al pasarla al segundo miembro:

$$\left.\begin{aligned} 2x-2y-3t &= 5 \\ 7x \qquad -t &= 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{(2ª ec.)}\ x = \frac{15+t}{7}$$

Sustituimos en la 1ª ec:

$$2\frac{15+t}{7} - 2y - 3t = 5 \Rightarrow 30 + 2t - 14y - 21t = 35 \Rightarrow 30 - 19t - 35 = 14y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14y = -5 - 19t \Rightarrow y = \frac{-5-19t}{14}$$

El esquema general de las infinitas soluciones, en función de t, es:

$$\boxed{\left(\frac{15+t}{7},\ \frac{-5-19t}{14},\ t\right)}$$

Dando valores a t obtenemos las diferentes soluciones. Nos piden 3. Por ejemplo:

- $t = 0$: (15/7, –5/14, 0)
- $t = 1$: (16/7, –12/7, 1)
- $t = –1$: (2, 1, –1)