IES Fernando de Herrera **Curso 2017 / 18**

Primera evaluación - Prueba de observación continua escrita nº 1 – I Bach C-T

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones será penalizado**.

1) Sin usar calculadora, calcular el valor de:

a) $\dfrac{7-\dfrac{19}{7}}{\dfrac{256}{81}\dfrac{27}{128}-\dfrac{25}{35}}$ *(0,5 puntos)*

b) $\dfrac{-(-42)^{356}7^{50}}{-(-6)^{357}7^{405}}$ *(1 punto)*

2) Simplificar (denominador racionalizado y positivo, exponentes positivos):

a) $\dfrac{\sqrt[3]{2a^5b^2}}{\sqrt[5]{2a^3b^2}}$ *(1 punto)*

b) $\dfrac{\sqrt{3}-6}{3\sqrt{3}-6}$ *(1 punto)*

3) a) Escribir en forma de intervalo: E(3.16, 7.5) *(0,5 puntos)*

b) Escribir en forma de entorno: (3.16, 7.5) *(0,5 puntos)*

4) Escribir como función definida a trozos (eliminar el *valor absoluto*) (Selectividad Junio 2009): $f(x) = x|x-1|$ *(1,5 puntos)*

5) Tomar logaritmos y, aplicando sus propiedades, desarrollar todo lo posible: *(2 ptos)*

$$A = \sqrt[5]{2\sqrt[3]{\frac{x(2x+1)^2}{2}}}$$

6) Dividir $P(x) = 2x^4 - 3x^2 - 2x + 3$ entre $Q(x) = 5x^2 - 2x$ diciendo cuánto vale el cociente y cuánto el resto. *(2 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sin usar calculadora, calcular el valor de:

a) $$\frac{7-\frac{19}{7}}{\frac{256}{81}\frac{27}{128}-\frac{25}{35}}$$ *(0,5 puntos)*

$$\frac{7-\frac{19}{7}}{\frac{256}{81}\frac{27}{128}-\frac{25}{35}}=\frac{\frac{49}{7}-\frac{19}{7}}{\frac{2}{3}\frac{1}{1}-\frac{5}{7}}=\frac{\frac{30}{7}}{\frac{2}{3}-\frac{5}{7}}=\frac{\frac{30}{7}}{\frac{14}{21}-\frac{15}{21}}=\frac{\frac{30}{7}}{-\frac{1}{21}}=-\frac{30\cdot 21}{7}=-\frac{30\cdot 3}{1}=\boxed{-90}$$

b) $$\frac{-(-42)^{356}7^{50}}{-(-6)^{357}7^{405}}$$ *(1 punto)*

$$\frac{-(-42)^{356}7^{50}}{-(-6)^{357}7^{405}}=\frac{-(42)^{356}7^{50}}{-(-6^{357})7^{405}}=\frac{-42^{356}7^{50}}{6^{357}7^{405}}=-\frac{(2\cdot 3\cdot 7)^{356}}{(2\cdot 3)^{357}7^{405-50}}=$$

$$=-\frac{2^{356}3^{356}7^{356}}{2^{357}3^{357}7^{355}}=-\frac{7^{356-355}}{2^{357-356}3^{357-356}}=-\frac{7}{2\cdot 3}=\boxed{-\frac{7}{6}}$$

2) Simplificar (denominador racionalizado y positivo, exponentes positivos):

a) $$\frac{\sqrt[3]{2a^5b^2}}{\sqrt[5]{2a^3b^2}}$$ *(1 punto)*

$$\frac{\sqrt[3]{2a^5b^2}}{\sqrt[5]{2a^3b^2}}=\frac{\sqrt[3]{2a^3a^2b^2}}{\sqrt[5]{2a^3b^2}}\frac{\sqrt[5]{2^4a^2b^3}}{\sqrt[5]{2^4a^2b^3}}=\frac{a\sqrt[3]{2a^2b^2}\sqrt[5]{2^4a^2b^3}}{\sqrt[5]{2^5a^5b^5}}=$$

$$=\frac{a\sqrt[15]{2^5a^{10}b^{10}}\sqrt[15]{2^{12}a^6b^9}}{2ab}=\frac{\sqrt[15]{2^{17}a^{16}b^{19}}}{2b}=\frac{2ab\sqrt[15]{2^2ab^4}}{2b}=\boxed{a\sqrt[15]{2^2ab^4}}$$

b) $$\frac{\sqrt{3}-6}{3\sqrt{3}-6}$$ *(1 punto)*

$$\frac{\sqrt{3}-6}{3\sqrt{3}-6}=\frac{\sqrt{3}-6}{3\sqrt{3}-6}\frac{3\sqrt{3}+6}{3\sqrt{3}+6}=\frac{(\sqrt{3}-6)(3\sqrt{3}+6)}{(3\sqrt{3})^2-6^2}=\frac{3\cdot 3+6\sqrt{3}-18\sqrt{3}-36}{9\cdot 3-36}=$$

$$=\frac{9-36-12\sqrt{3}}{27-36}=\frac{-27-12\sqrt{3}}{-9}=\frac{-3(9+4\sqrt{3})}{-9}=\boxed{\frac{9+4\sqrt{3}}{3}}$$

3) a) Escribir en forma de intervalo: E(3.16, 7.5) *(0,5 puntos)*

Como un *entorno de centro a y radio r* se puede poner en forma de *intervalo abierto* de la forma E(a, r) = (a – r, a + r), se tiene:

E(3.16, 7.5) = (3.16 – 7.5, 3.16 + 7.5) = $\boxed{(-4.34,\ 10.66)}$

b) Escribir en forma de entorno: (3.16, 7.5) *(0,5 puntos)*

Por la misma razón anterior, el centro del entorno será el del intervalo:

$$a=\frac{3.16+7.5}{2}=5.33$$

Y el radio, la distancia entre el centro y uno de los extremos del intervalo abierto que nos han dado: $r = 5.33 - 3.16 = 2.17$. Por tanto:

$$(3.16, 7.5) = \boxed{E(5.33, 2.17)}$$

4) Escribir como función definida a trozos (eliminar el *valor absoluto*) (Selectividad Junio 2009): $f(x) = x|x-1|$ *(1,5 puntos)*

Dado que la definición de *valor absoluto de a* es: $|a| = \begin{cases} -a & \text{si} \quad a<0 \\ a & \text{si} \quad a \geq 0 \end{cases}$, se tiene:

$$|x-1| = \begin{cases} -(x-1) & \text{si} \quad x-1<0 \\ x-1 & \text{si} \quad x-1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x<1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Por ello:

$$\boxed{f(x) =} x|x-1| = x\begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x<1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} x(-x+1) & \text{si} \quad x<1 \\ x(x-1) & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} =$$

$$= \boxed{\begin{cases} -x^2+x & \text{si} \quad x<1 \\ x^2-x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}}$$

5) Tomar logaritmos y, aplicando sus propiedades, desarrollar todo lo posible: *(2 ptos)*

$$A = \sqrt[5]{2\sqrt[3]{\frac{x(2x+1)^2}{2}}}$$

$$\boxed{\log A =} \log \sqrt[5]{2\sqrt[3]{\frac{x(2x+1)^2}{2}}} = \frac{1}{5}\log 2\sqrt[3]{\frac{x(2x+1)^2}{2}} = \frac{1}{5}\left(\log 2 + \log\sqrt[3]{\frac{x(2x+1)^2}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\log 2 + \frac{1}{3}\log\frac{x(2x+1)^2}{2}\right) = \frac{1}{5}\log 2 + \frac{1}{15}\left(\log x(2x+1)^2 - \log 2\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\log 2 + \frac{1}{15}\left(\log x + \log(2x+1)^2 - \log 2\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\log 2 + \frac{1}{15}\left(\log x + 2\log(2x+1) - \log 2\right) =$$

$$= \frac{3}{15}\log 2 + \frac{1}{15}\left(\log x + 2\log(2x+1) - \log 2\right) =$$

$$= \frac{3\log 2 + \log x + 2\log(2x+1) - \log 2}{15} = \boxed{\frac{2\log 2 + \log x + 2\log(2x+1)}{15}}$$

6) Dividir $P(x) = 2x^4 - 3x^2 - 2x + 3$ entre $Q(x) = 5x^2 - 2x$ diciendo cuánto vale el cociente y cuánto el resto. *(2 puntos)*

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & & -3x^2 & -2x & +3 & 5x^2 - 2x \\
\cline{6-6}
-2x^4 & +\frac{4}{5}x^3 & & & & \frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{25}x - \frac{67}{125} \\
\cline{1-5}
& \frac{4}{5}x^3 & -3x^2 & -2x & +3 & \\
& -\frac{4}{5}x^3 & +\frac{8}{25}x^2 & & & \\
\cline{2-5}
& & -\frac{67}{25}x^2 & -2x & +3 & \\
& & \frac{67}{25}x^2 & -\frac{134}{125}x & & \\
\cline{3-5}
& & & -\frac{384}{125}x & +3 &
\end{array}
$$

El cociente es $\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{25}x - \frac{67}{125}$ y el resto, $-\frac{384}{125}x + 3$.

IES Fernando de Herrera **Curso 2017 / 18**

Primera evaluación - Prueba de observación continua escrita nº 2 – I Bach C-T

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones será penalizado**.

1) Usando el *Binomio de Newton*, desarrollar y simplificar: $\left(3a^3 - \dfrac{2}{a^2}\right)^5$ *(1,5 puntos)*

2) Resolver la ecuación: $3 + 9^x = 4 \cdot 3^x$ *(1 punto)*

3) Resolver el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2\log x + 3\log y = 2\log 2 \\ \log x - 2\log y = \log 2 \end{array}\right\}$ *(1,5 puntos)*

4) Resolver por el método de Gauss en forma matricial (no es válido ningún otro método), previa clasificación según el número de soluciones, el sistema siguiente. Por último, si es posible, concretar una solución en la que $x = -1$. *(2 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y + 5z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \\ -4x + 7y - 6z = -1 \end{array}\right\}$$

5) Resolver la ecuación: $\dfrac{2x-3}{2x^2-5x+2} - \dfrac{3x}{2x-1} - \dfrac{6x^2+x-25}{(x-2)(2x-1)} = 0$ *(2 puntos)*

6) Resolver la inecuación: $\dfrac{2x-3}{-2x^2+5x-2} \leq 0$ *(2 puntos)*

SOLUCIONES

1) Usando el *Binomio de Newton*, desarrollar y simplificar: $\left(3a^3 - \frac{2}{a^2}\right)^5$ *(1,5 puntos)*

$$\left(3a^3 - \frac{2}{a^2}\right)^5 = \binom{5}{0}(3a^3)^5 - \binom{5}{1}(3a^3)^4\frac{2}{a^2} + \binom{5}{2}(3a^3)^3\left(\frac{2}{a^2}\right)^2 - \binom{5}{3}(3a^3)^2\left(\frac{2}{a^2}\right)^3 +$$

$$+\binom{5}{4}3a^3\left(\frac{2}{a^2}\right)^4 - \binom{5}{5}\left(\frac{2}{a^2}\right)^5 =$$

$$= 3^5a^{15} - 5\cdot 3^4a^{12}\frac{2}{a^2} + 10\cdot 3^3a^9\frac{2^2}{a^4} - 10\cdot 3^2a^6\frac{2^3}{a^6} + 5\cdot 3a^3\frac{2^4}{a^8} - \frac{2^5}{a^{10}} =$$

$$= \boxed{243a^{15} - 810a^{10} + 1080a^5 - 720 + \frac{240}{a^5} - \frac{32}{a^{10}}}$$

2) Resolver la ecuación: $3 + 9^x = 4\cdot 3^x$ *(1 punto)*

$$3 + 9^x = 4\cdot 3^x \Rightarrow 3 + (3^2)^x - 4\cdot 3^x = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 4\cdot 3^x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3^x)^2 - 4\cdot 3^x + 3 = 0 \Rightarrow \text{(Cambio de incógnita } t = 3^x\text{): } t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} = \begin{cases} = \frac{4-2}{2} = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0 \\ = \frac{4+2}{2} = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

donde ya hemos deshecho el cambio. Por tanto, hay dos soluciones: $\boxed{x = 0 \text{ ó } x = 1}$.

3) Resolver el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2\log x + 3\log y = 2\log 2 \\ \log x - 2\log y = \log 2 \end{array}\right\}$ *(1,5 puntos)*

Realizamos un cambio de incógnitas: $a = \log x$; $b = \log y$. Entonces tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 2a + 3b = 2\log 2 \\ a - 2b = \log 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 2a + 3b = 2\log 2 \\ \cdot(-2): \underline{-2a + 4b = -2\log 2} \\ 7b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{array} \Rightarrow (2^a \text{ ec}): a = \log 2$$

Deshacemos el cambio:

- $a = \log 2 \Rightarrow \log x = \log 2 \Rightarrow x = 2$.
- $b = 0 \Rightarrow \log y = 0 \Rightarrow y = 1$.

La solución $\boxed{\text{es válida}}$, pues no se anula ni hace negativo ningún argumento de logaritmos en las ecuaciones iniciales. Luego, la solución es: $\boxed{x = 2 \text{ con } y = 1}$.

4) Resolver por el método de Gauss en forma matricial (no es válido ningún otro método), previa clasificación según el número de soluciones, el sistema siguiente. Por último, si es posible, concretar una solución en la que $x = -1$. *(2 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y + 5z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \\ -4x + 7y - 6z = -1 \end{array}\right\}$$

Hacemos transformaciones lineales en la matriz ampliada para triangularizarla. Actuamos inicialmente sobre la primera columna, tomando como pivote el elemento de la fila 2, y después sobre la segunda columna, siendo el pivote el de la fila 3:

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ -4 & 7 & -6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_2]{2F_1-3F_2} \begin{pmatrix} 0 & -13 & -2 & -17 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 13 & 2 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_3}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 13 & 2 & 17 \end{pmatrix}$$

El proceso ha finalizado (hemos actuado sobre dos columnas, una menos que filas hay) y la matriz está triangularizada. Como no ha quedado ninguna fila nula salvo la posición correspondiente a la última columna, el sistema es compatible. Y la primera fila puede eliminarse, ya que es nula. Al quedar menos ecuaciones que incógnitas, $\boxed{\text{el sistema es compatible determinado}}$. Llamamos $\boxed{y = t}$ (podríamos, también, llamar $z = t$, pero no $x = t$, porque perderíamos la triangularización; además, conviene $y = t$ porque tiene coeficientes más complicados que los de z, lo que se traducirá en denominadores más simples en la solución final) y reconstruimos el sistema, pasando t al segundo miembro:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4z &= 9 - 3t \\ 2z &= 17 - 13t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{(2ª ec.): } z = \frac{17-13t}{2}$$

Sustituyendo en la 1ª ec: $2x + 4\dfrac{17-13t}{2} = 9 - 3t \Rightarrow 2x + 2(17 - 13t) = 9 - 3t \Rightarrow$

$2x + 34 - 26t = 9 - 3t \Rightarrow 2x = 9 - 3t - 34 + 26t = 23t - 25 \Rightarrow x = \dfrac{23t-25}{2}$.

Por tanto, <u>las infinitas soluciones</u> (cada una se obtiene dando un valor a t) son de la forma: $\boxed{(x,\ y,\ z) = \left(\dfrac{23t-25}{2},\ t,\ \dfrac{17-13t}{2}\right)}$. También, de forma similar, podrían obtenerse las soluciones de la forma: $\left(t, \dfrac{25+2t}{23}, \dfrac{33-13t}{23}\right)$ ó $\left(\dfrac{33-23t}{13}, \dfrac{17-2t}{13}, t\right)$.

Finalmente, veamos qué valor de t da una solución con $x = -1$:

$$\frac{23t-25}{2} = -1 \Rightarrow 23t - 25 = -2 \Rightarrow 23t = 23 \Rightarrow t = 1.$$

Si $t = 1 \Rightarrow x = -1,\ y = 1,\ z = \dfrac{17-13}{2} = 2 \Rightarrow$ $\boxed{\text{La solución es } (x, y, z) = (-1, 1, 2)}$.

5) Resolver la ecuación: $\dfrac{2x-3}{2x^2-5x+2} - \dfrac{3x}{2x-1} - \dfrac{6x^2+x-25}{(x-2)(2x-1)} = 0$ *(2 puntos)*

Factorizamos $2x^2 - 5x + 2$. Para ello, lo igualamos a 0: $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \left\langle \begin{matrix} = \frac{1}{2} \\ = 2 \end{matrix} \right. \Rightarrow \boxed{2x^2 - 5x + 2 = 2(x - ½)(x - 2)}$$

Del mismo modo, $\boxed{(2x - 1) = 2(x - ½)}$.
Por tanto, la ecuación se transforma en:

$$\frac{2x-3}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)} - \frac{3x}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} - \frac{6x^2+x-25}{(x-2)2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x-3}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}-\frac{3x(x-2)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}-\frac{6x^2+x-25}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x-3-(3x^2-6x)-(6x^2+x-25)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}=0$$

Una fracción se anula si lo hace el numerador pero no el denominador. Veamos los valores que anulan el numerador descartando los que anulen el denominador:
$2x-3-3x^2+6x-6x^2-x+25=0 \Rightarrow -9x^2+7x+22=0 \Rightarrow 9x^2-7x-22=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49+792}}{18}=\frac{7\pm 29}{18}=\left\langle\begin{array}{l}=-\frac{11}{9}\\=2\end{array}\right.$$

No es válido $x=2$ porque anula el denominador $\Rightarrow$ solución única: $\boxed{x=-\frac{11}{9}}$.

6) Resolver la inecuación: $\dfrac{2x-3}{-2x^2+5x-2}\le 0$ *(2 puntos)*

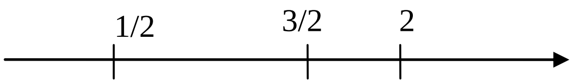
Factorizamos ya hallamos las raíces de numerador y denominador:

- $2x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3/2}$. Por tanto, $\boxed{2x-3=2(x-3/2)}$.
- $-2x^2+5x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=½}$ ó $\boxed{x=2}$. $\Rightarrow \boxed{-2x^2+5x-2=-2(x-½)(x-2)}$.

Sustituyendo en la inecuación, se transforma en:

$$\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}\le 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}\ge 0}$$

donde hemos pasado los factores constantes al segundo miembro. Como uno de ellos es negativo y pasa multiplicando cambia el sentido de la desigualdad. Ahora, estudiamos esta última inecuación. Los cambios de signo de los factores que en ella aparecen se producen desplazándonos en sentido creciente por la recta real y al atravesar cada una de las raíces anteriores. Así:



lo que nos lleva a:

	$(-\infty, 1/2)$	$1/2$	$(1/2, 3/2)$	$3/2$	$(3/2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$x-1/2$	$-$	0	$+$	…	$+$	…	$+$
$x-3/2$	$-$	…	$-$	0	$+$	…	$+$
$x-2$	$-$	…	$-$	…	$-$	0	$+$
$\dfrac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
¿Son solución? →	No	No	Si	Si	No	No	Si

Luego las soluciones son los elementos del conjunto:

$$\boxed{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\cup(2,+\infty)}$$

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones será penalizado**.

1) Resolver la ecuación $\log x + \log (x + 3) = \log (6 + 4x) - \log 1$ *(1,5 puntos)*

2) Usando el *Binomio de Newton*, desarrollar y simplificar: $\left(2a^3 - \dfrac{3}{a^2}\right)^5$ *(1,5 puntos)*

3) Resolver la ecuación: *(2 puntos)*

$$\frac{5x-1}{3x^2-5x-12} - \frac{x+1}{3x+4} = \frac{-2x^2+8x+8}{(x-3)(3x+4)}$$

4) Clasificar, resolver y dar, si es posible, una solución en la que $x = -20$, el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método): *(1,5 puntos)*

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y+5z&=-3 \\ 2x+3y+4z&=1 \\ -2x+10y-2z&=8 \end{aligned}\right\}$$

5) Sin utilizar calculadora, siendo $\operatorname{tg} a = \sqrt{3}$ con $90^\circ < a < 270^\circ$, calcular el valor de todas las razones trigonométricas de a deduciéndolas de los datos proporcionados y con ayuda de fórmulas trigonométricas. Una vez completado lo anterior, decir el valor de a. *(1,5 puntos)*

6) Demostrar que es cierta la siguiente identidad para los valores para los que tenga sentido: *(2 puntos)*

$$\frac{\cos 3a}{\cos a} = 1 - 4\operatorname{sen}^2 a$$

SOLUCIONES

1) Resolver la ecuación $\log x + \log (x + 3) = \log (6 + 4x) - \log 1$ *(1,5 puntos)*
Suele ser más fácil realizar un cambio de incógnita, del tipo $t = \log x$ o similar, pero en esta ecuación no es posible, porque $\log(x + 3)$ no se puede poner en forma de $\log x$, dado que logaritmo de una suma no es simplificable. Por tanto, nuestra única opción parece que es quitar logaritmos, lo que es posible usando que $\log a = \log b$ es cierto si $a = b$, siempre que existan $\log a$ y $\log b$. Esto obliga a comprobar las soluciones obtenidas. Por tanto, teniendo en cuenta que $\log 1 = 0$:

$$\log x + \log (x + 3) = \log (6 + 4x) - \log 1 \Rightarrow \log x(x + 3) = \log (6 + 4x)$$

lo que ocurre si:

$$x(x + 3) = 6 + 4x \Rightarrow x^2 + 3x - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{matrix} = -2 \\ = 3 \end{matrix} \right.$$

Pero <u>$x = -2$ no es válida</u>, porque $\nexists \log(-2)$. Por tanto, la única solución es $\boxed{x = 3}$.

2) Usando el *Binomio de Newton*, desarrollar y simplificar: $\left(2a^3 - \dfrac{3}{a^2}\right)^5$ *(1,5 puntos)*

$$\left(2a^3 - \frac{3}{a^2}\right)^5 = \binom{5}{0}(2a^3)^5 - \binom{5}{1}(2a^3)^4\frac{3}{a^2} + \binom{5}{2}(2a^3)^3\left(\frac{3}{a^2}\right)^2 - \binom{5}{3}(2a^3)^2\left(\frac{3}{a^2}\right)^3 +$$

$$+ \binom{5}{4}2a^3\left(\frac{3}{a^2}\right)^4 - \binom{5}{5}\left(\frac{3}{a^2}\right)^5 =$$

$$= 2^5a^{15} - 5\cdot 2^4a^{12}\frac{3}{a^2} + 10\cdot 2^3a^9\frac{3^2}{a^4} - 10\cdot 2^2a^6\frac{3^3}{a^6} + 5\cdot 2a^3\frac{3^4}{a^8} - \frac{3^5}{a^{10}} =$$

$$= \boxed{32a^{15} - 240a^{10} + 720a^5 - 1080 + \frac{810}{a^5} - \frac{243}{a^{10}}}$$

3) Resolver la ecuación: *(2 puntos)*

$$\frac{5x-1}{3x^2-5x-12} - \frac{x+1}{3x+4} = \frac{-2x^2+8x+8}{(x-3)(3x+4)}$$

Como $3x^2 - 5x - 12 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+144}}{6} = \dfrac{5 \pm 13}{6} = \left\langle \begin{matrix} = -\dfrac{8}{6} = -\dfrac{4}{3} \\ = 3 \end{matrix} \right.$

Por el *Teorema de Descomposición Factorial de un polinomio* (si conocemos *las n* raíces reales de un polinomio de grado n el polinomio es el coeficiente del término o sumando de mayor grado multiplicado por monomios de la forma x – *raíz*, para cada una de las n raíces), se concluye: $3x^2 - 5x - 12 = 3(x - 3)(x + 4/3)$.

Por otra parte, $3x + 4 = 3\left(x + \dfrac{4}{3}\right)$, lo que se obtiene sacando 3 factor común o por Ruffini. Por tanto:

$$\frac{5x-1}{3x^2-5x-12} - \frac{x+1}{3x+4} = \frac{-2x^2+8x+8}{(x-3)(3x+4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5x-1}{3(x-3)\left(x+\frac{4}{3}\right)}-\frac{x+1}{3\left(x+\frac{4}{3}\right)}=\frac{-2x^2+8x+8}{(x-3)3\left(x+\frac{4}{3}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5x-1}{3(x-3)\left(x+\frac{4}{3}\right)}-\frac{(x+1)(x-3)}{3(x-3)\left(x+\frac{4}{3}\right)}-\frac{-2x^2+8x+8}{3(x-3)\left(x+\frac{4}{3}\right)}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5x-1-(x+1)(x-3)-(-2x^2+8x+8)}{3(x-3)\left(x+\frac{4}{3}\right)}=0$$

Un cociente es 0 si lo es el numerador pero no el denominador. Así, igualamos a 0 el numerador comprobando que las soluciones obtenidas no anulan el denominador:

$$5x-1-(x^2-3x+x-3)+2x^2-8x-8=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 5x-1-x^2+3x-x+3+2x^2-8x-8=0 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x=-2$ ó $x=3$. Pero $x=3$ no es válida porque anula denominadores en la ecuación inicial. Por tanto, la única solución es $\boxed{x=-2}$.

4) Clasificar, resolver y dar, si es posible, una solución en la que $x=-20$, el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método): *(1,5 puntos)*

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y+5z&=-3\\ 2x+3y+4z&=1\\ -2x+10y-2z&=8 \end{aligned}\right\}$$

La última ecuación es simplificable entre 2. Por tanto:

$$A'=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -3\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ -1 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2+2F_3]{F_1+3F_3} \begin{pmatrix} 0 & 13 & 2 & 9\\ 0 & 13 & 2 & 9\\ -1 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 13 & 2 & 9\\ -1 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

La tenemos triangularizada. Como ninguna fila ha resultado ser nula salvo la última posición, el sistema es compatible. Como las filas nulas se descartan, quedan menos filas que incógnitas, por lo que es un $\boxed{\textit{sistema compatible indeterminado}}$.

Llamamos $\boxed{y=t}$. Podríamos elegir también $z=t$, pero y tiene coeficientes más complicados que z, lo que nos llevará a denominadores más simples en la forma general de las soluciones. No deberíamos elegir $x=t$, porque perderíamos la triangularización. Sustituyendo en la 2ª ecuación (la 1ª ha quedado descartada):

$$2z=9-13t \Rightarrow z=\frac{9-13t}{2}$$

Sustituyendo en la tercera: $-x+5t-\frac{9-13t}{2}=4 \Rightarrow -2x+10t-(9-13t)=8 \Rightarrow$

$10t-9+13t-8=2x \Rightarrow 23t-17=2x \Rightarrow x=\frac{23t-17}{2}$

Luego la forma general de las soluciones es: $\boxed{(x,y,z)=\left(\frac{23t-17}{2},t,\frac{9-13t}{2}\right)}$. Por otros caminos: $\boxed{(x,y,z)=\left(\frac{-7-23t}{13},\frac{9-2t}{13},t\right)}$ ó $\boxed{(x,y,z)=\left(t,\frac{17+2t}{23},\frac{-7-13t}{23}\right)}$.

Por último, Si $x=-20$, con la primera de estas soluciones, sería obtenida si:

$$\frac{23t-17}{2} = -20 \Rightarrow 23t - 17 = -40 \Rightarrow 23t = -23 \Rightarrow t = -1$$

Y con este valor: $y = t = -1$; $z = \dfrac{9-13(-1)}{2} = 11$. O sea: $\boxed{(x, y, z) = (-20, -1, 11)}$.

5) Sin utilizar calculadora, siendo $\operatorname{tg} a = \sqrt{3}$ con $90° < a < 270°$, calcular el valor de todas las razones trigonométricas de a deduciéndolas de los datos proporcionados y con ayuda de fórmulas trigonométricas. Una vez completado lo anterior, decir el valor de a. *(1,5 puntos)*

Como $90° < a < 270°$ $\Rightarrow$ a está en el II ó III cuadrante. Pero al ser $\operatorname{tg} a$ positiva, está en el tercer cuadrante. Esto será importante para decidir los signos de las razones. Así:

$$1+\operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 a} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\cos a = -\frac{1}{2}}$$

pues si estamos en el III cuadrante, el coseno debe ser negativo: de los dos signos posibles de la raíz, tomamos el negativo.

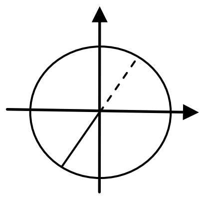
$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} a =} \cos a \operatorname{tg} a = -\frac{1}{2}\sqrt{3} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Y las tres restantes son:

$$\boxed{\operatorname{cotg} a =} \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}; \qquad \boxed{\sec a =} \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{-1/2} = \boxed{-2}$$

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\operatorname{sen} a} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

Por último, los valores que están dando son, si fuesen todos positivos, los correspondientes a $60°$ (si hacemos con la calculadora *SHIFT* *tan* $\sqrt{\ }$ 3 =, nos da dicho resultado). Pero hay que trasladarlo al tercer cuadrante (los cambios habituales de cuadrante siempre se hacen con 180º ó 360º). Luego $\boxed{a =}$ $180° + 60° =$ $\boxed{240°}$.



6) Demostrar que es cierta la siguiente identidad para los valores para los que tenga sentido: *(2 puntos)*

$$\frac{\cos 3a}{\cos a} = 1 - 4\operatorname{sen}^2 a$$

$$\boxed{\frac{\cos 3a}{\cos a}} = \frac{\cos(2a+a)}{\cos a} = \frac{\cos 2a \cos a - \operatorname{sen} 2a \operatorname{sen} a}{\cos a} =$$

$$= \frac{(\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a)\cos a - (2\operatorname{sen} a \cos a)\operatorname{sen} a}{\cos a} = \frac{\cos^3 a - \operatorname{sen}^2 a \cos a - 2\operatorname{sen}^2 a \cos a}{\cos a} =$$

$$= \frac{\cos a(\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a - 2\operatorname{sen}^2 a)}{\cos a} = \cos^2 a - 3\operatorname{sen}^2 a = (1 - \operatorname{sen}^2 a) - 3\operatorname{sen}^2 a =$$

$$= 1 - \operatorname{sen}^2 a - 3\operatorname{sen}^2 a = \boxed{1 - 4\operatorname{sen}^2 a}.$$