PROBLEMAS RESUELTOS DE TRIGONOMETRÍA

1) Sabiendo que $\alpha > 90^{\circ}$ y que tg $\alpha = 1/3$, calcular el resto de razones trigonométricas de α sin usar la calculadora. Posteriormente, decir el valor de α en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora.

En este tipo de problemas es importante tener en cuenta el cuadrante en el que está el ángulo, para decidir los signos correctos.

Si $\alpha > 90^{\circ}$ y $\operatorname{tg}\alpha > 0 \Rightarrow \alpha$ está en el tercer cuadrante. Pues bien:

Como $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \dfrac{10}{9} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{9}{10} \Rightarrow$

$\cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{9}{10}} = -\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}} = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$, donde el signo – se debe a que estamos en el tercer cuadrante.

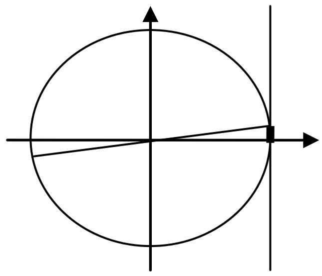
Por otra parte, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{1}{3}\dfrac{3}{\sqrt{10}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}} = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Las otras tres razones son:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{-\dfrac{1}{\sqrt{10}}} = -\sqrt{10}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}} = -\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\dfrac{1}{3}} = 3$$



Por último, como tg $\alpha = 1/3$, con la calculadora obtenemos que: $\alpha = 18{,}43^{\circ}$. Trasladándolo al tercer cuadrante: $\alpha = 180^{\circ} + 18{,}43^{\circ} = 198{,}43^{\circ} = 198^{\circ}\ 26'\ 5{,}8''$ (Ver figura).

2) Empleando las fórmulas que relacionan las distintas razones trigonométricas entre si, y sin usar calculadora, hallar las restantes razones de α, sabiendo que tg α = –5/3, 90º≤α≤180º. Después, decir el valor de α con ayuda de la calculadora.

α es del segundo cuadrante. $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\dfrac{25}{9} = \dfrac{34}{9} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{34}}}$. Por otra parte: $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = -\dfrac{5}{3}\dfrac{-3}{\sqrt{34}} = \boxed{\dfrac{5}{\sqrt{34}}}$. Por tanto: $\boxed{\operatorname{cotg}\alpha = -\dfrac{3}{5},\ \sec\alpha = -\dfrac{\sqrt{34}}{3},\ \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{\sqrt{34}}{5}}$.

Con la calculadora, usando que tg α = –5/3, obtenemos que α= –59,03º. Pero tratándose de un ángulo del segundo cuadrante, el verdadero valor es 180º – 59,03º: $\boxed{\alpha = 120{,}97^{\circ}}$.

3) Conociendo que cos α = 1/3 y que α está en el cuarto cuadrante, hallar, sin usar calculadora, el resto de las razones trigonométricas de dicho ángulo. Posteriormente, con ayuda de la calculadora, decir cuánto vale el ángulo.

Como $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \;\Rightarrow\; \boxed{\text{sen}\,\alpha} = -\sqrt{\frac{8}{9}} =$

$= -\frac{\sqrt{8}}{3} = \boxed{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$, donde el signo negativo es por ser del cuarto cuadrante.

Por tanto, $\boxed{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \boxed{-2\sqrt{2}}$.

Con lo que: $\boxed{\text{cotg}\,\alpha} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}}$; $\boxed{\sec\alpha} = \frac{1}{1/3} = \boxed{3}$;

$\boxed{\text{cosec}\,\alpha} = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{3\sqrt{2}}{4}}$

Como $\cos\alpha = 1/3 \;\Rightarrow\; \alpha = 70{,}53^\circ$. Pero considerando que es del 4º cuadrante, el resultado real es: $\boxed{\alpha} = 360^\circ - 70{,}53^\circ = \boxed{289{,}47^\circ = 289^\circ\, 28'\, 16''}$.

4) Empleando las fórmulas que relacionan las distintas razones trigonométricas entre si, y sin usar calculadora, hallar las restantes razones de a, sabiendo que tg $a = -3/4$, $270^\circ \le a \le 360^\circ$. Después, decir el valor de a con ayuda de la calculadora.

α es del cuarto cuadrante $\Rightarrow$

$$1 + \text{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \;\Rightarrow\; \boxed{\cos\alpha = \frac{4}{5}}.$$

Por otra parte: $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \;\Rightarrow\; \boxed{\text{sen}\,\alpha} = \text{tg}\,\alpha\,\cos\alpha = -\frac{3}{4}\frac{4}{5} = \boxed{-\frac{3}{5}}$.

Por tanto: $\boxed{\text{cotg}\,\alpha = -\frac{4}{3},\ \sec\alpha = \frac{5}{4},\ \text{cosec}\,\alpha = -\frac{5}{3}}$.

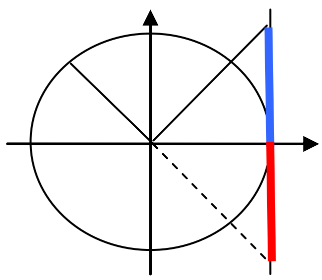
Con la calculadora, usando que tg $\alpha = -3/4$, obtenemos que:

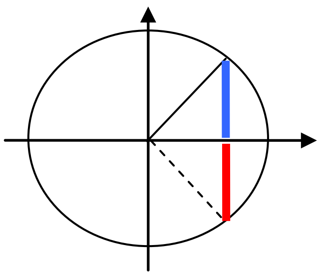
$$\alpha = -36{,}87^\circ = -36{,}87^\circ + 360^\circ = 323{,}13^\circ = \boxed{323^\circ\, 7'\, 48{,}4''}.$$

5) Sin usar la calculadora, decir el valor de: a) tg 1920º; b) sen (–765º).

Dividiendo 1920 entre 360 se obtiene 5 de cociente y 120 de resto. Es decir: $1920^\circ = 360^\circ \cdot 5 + 120^\circ$. Luego 1920º coincide, sobre la circunferencia, con 120º, después de dar 5 vueltas. Por tanto, tg 1920º = tg 120º.

Además tg 1920º = tg 120º = tg (180 – 60º) = – tg 60º = $-\sqrt{3}$





De la misma forma, $765 = 360 \cdot 2 + 45^\circ \;\Rightarrow\; -765^\circ$ coincide con -45°, después de dos vueltas en sentido negativo. Y además, por tratarse de un ángulo del 4º cuadrante: $\text{sen}(-765^\circ) = \text{sen}(-45^\circ) = -\text{sen}(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6) a) Calcular *cos* 105º sin utilizar la calculadora, expresando 105º en función de otros ángulos cuyas razones trigonométricas sean conocidas.

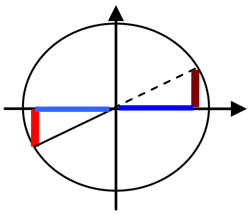
$$\boxed{\cos 105^\circ} = \cos(60^\circ+45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}.$$

b) Sin usar la calculadora, hallar cos 2370º.

Dividiendo 2370º entre 360º, se tiene que 2370º = 6·360º + 210º. Es decir, que tras 6 vueltas completas, 2370º se sitúa en el mismo lugar de la circunferencia que 210º. Razonando sobre la circunferencia trigonométrica, tendremos, por tanto:

$$\cos 2370^\circ = \cos 210^\circ = -\cos(210^\circ - 180^\circ) =$$

$$= -\cos 30^\circ = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



7) Demostrar la siguiente identidad: $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$

Para demostrar identidades se puede proceder de varias formas:

- Desarrollar el primer miembro hasta llegar al segundo.
- Al contrario, del segundo al primero.
- Desarrollar ambos por separado hasta conseguir la misma expresión.
- Cambiar la identidad a demostrar por otra equivalente, más sencilla.

En nuestro caso, usando que $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ y que $1+\operatorname{cotg}^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$, tenemos:

$$\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha} = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$$

8) Demostrar que $2\operatorname{tg} x \cos^2\dfrac{x}{2} - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$

$$2\operatorname{tg} x\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 2\operatorname{tg} x\,\frac{1+\cos x}{2} - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x\,(1+\cos x) - \operatorname{sen} x =$$

$$= \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x\cos x - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cos x - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$$

9) Demostrar que $\operatorname{tg}(45^\circ+x) - \operatorname{tg}(45^\circ-x) = 2\operatorname{tg} 2x$

$$\boxed{\operatorname{tg}(45^\circ+x)-\operatorname{tg}(45^\circ-x)} = \frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}x} - \frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}x} = \frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x} - \frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x} =$$

$$= \frac{(1+\operatorname{tg}x)^2-(1-\operatorname{tg}x)^2}{(1-\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}x)} = \frac{1+2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x-(1-2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x)}{1^2-\operatorname{tg}^2x} =$$

$$= \frac{1+2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x-1+2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}^2x} = \frac{4\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x} = 2\cdot\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x} = \boxed{2\operatorname{tg}2x}$$

10) Demostrar que $2\ \mathrm{tg}\ a\ \mathrm{sen}^2 \dfrac{a}{2} + \mathrm{sen}\ a = \mathrm{tg}\ a$

$$2\ \mathrm{tg}\ a\ \mathrm{sen}^2 \frac{a}{2} + \mathrm{sen}\ a = 2\ \mathrm{tg}\ a \left(\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}\right)^2 + \mathrm{sen}\ a = 2\ \mathrm{tg}\ a\ \frac{1-\cos a}{2} + \mathrm{sen}\ a =$$

$$= \mathrm{tg}\ a\ (1-\cos a) + \mathrm{sen}\ a = \mathrm{tg}\ a - \mathrm{tg}\ a \cos a + \mathrm{sen}\ a = \mathrm{tg}\ a - \frac{\mathrm{sen}\ a}{\cos a} \cos a + \mathrm{sen}\ a =$$

$$= \mathrm{tg}\ a - \mathrm{sen}\ a + \mathrm{sen}\ a = \mathrm{tg}\ a$$

11) Demostrar que $\dfrac{\mathrm{tg}\ x\ \mathrm{cosec}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \mathrm{cotg}\ x$

$$\frac{\mathrm{tg}\ x\ \mathrm{cosec}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{\dfrac{\mathrm{sen}\ x}{\cos\ x}\dfrac{1}{\mathrm{sen}^2 x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\dfrac{1}{\cos\ x\,\mathrm{sen}\ x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{\cos\ x\,\mathrm{sen}\ x} = \frac{\cos\ x}{\mathrm{sen}\ x} = \mathrm{cotg}\ x$$

12) Demostrar que $\cos x + \mathrm{sen}\ x\ \mathrm{tg}\ x = \sec x$

$$\boxed{\cos x + \mathrm{sen}\ x \mathrm{tg}\ x =} \cos x + \mathrm{sen}\ x\ \frac{\mathrm{sen}\ x}{\cos x} = \cos x + \frac{\mathrm{sen}^2\ x}{\cos x} = \frac{\cos^2\ x + \mathrm{sen}^2\ x}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{\cos x} \boxed{= \sec x}$$

13) Demostrar la siguiente identidad: $(1 + \mathrm{tg}^2\ \alpha)\ \mathrm{sen}\ 2\alpha = 2\mathrm{tg}\ \alpha$

$$(1 + \mathrm{tg}^2\ \alpha)\ \mathrm{sen}\ 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} 2\mathrm{sen}\ \alpha \cos \alpha = 2\frac{\mathrm{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = 2\ \mathrm{tg}\ \alpha$$

14) Demostrar que, para los valores para los cuales tiene sentido la igualdad, es cierto que:

$$\frac{2\mathrm{sen}\ x - \mathrm{sen}\ 2x}{2\mathrm{sen}\ x + \mathrm{sen}\ 2x} = \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}$$

$$\frac{2\mathrm{sen}\ x - \mathrm{sen}\ 2x}{2\mathrm{sen}\ x + \mathrm{sen}\ 2x} = \frac{2\mathrm{sen}\ x - 2\mathrm{sen}\ x \cos x}{2\mathrm{sen}\ x + 2\mathrm{sen}\ x \cos x} = \frac{2\mathrm{sen}\ x(1-\cos x)}{2\mathrm{sen}\ x(1+\cos x)} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)^2 = \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}$$

15) Demostrar que, si tiene sentido: $\dfrac{\mathrm{sen}\ 5a + \mathrm{sen}\ a}{\mathrm{sen}\ 3a - \mathrm{sen}\ a} = 3\cos^2 a - \mathrm{sen}^2 a$

Transformando sumas en productos en numerador y denominador:

$$\boxed{\frac{\mathrm{sen}\ 5a + \mathrm{sen}\ a}{\mathrm{sen}\ 3a - \mathrm{sen}\ a}} = \frac{2\,\mathrm{sen}\dfrac{5a+a}{2}\cos\dfrac{5a-a}{2}}{2\cos\dfrac{3a+a}{2}\,\mathrm{sen}\dfrac{3a-a}{2}} = \frac{\mathrm{sen}\ 3a\ \cos 2a}{\cos 2a\ \mathrm{sen}\ a} = \frac{\mathrm{sen}\ 3a}{\mathrm{sen}\ a} =$$

$$= \frac{\mathrm{sen}\ (2a+a)}{\mathrm{sen}\ a} = \frac{\mathrm{sen}\ 2a\ \cos a + \cos 2a\ \mathrm{sen}\ a}{\mathrm{sen}\ a} =$$

$$= \frac{2\mathrm{sen}\ a\ \cos a\ \cos a + (\cos^2 a - \mathrm{sen}^2\ a)\ \mathrm{sen}\ a}{\mathrm{sen}\ a} =$$

$$= \frac{2\text{sen}\, a\ \cos^2 a + \cos^2 a\ \text{sen}\, a - \text{sen}^3 a}{\text{sen}\, a} = \frac{\text{sen}\, a\,(2\cos^2 a + \cos^2 a - \text{sen}^2 a)}{\text{sen}\, a} =$$

$$\boxed{= 3\cos^2 a - \text{sen}^2 a}$$

16) Demostrar que, para los valores para los cuales tiene sentido, es cierto que: $\dfrac{\cos^2\alpha - sen^2\alpha}{\cos^4\alpha - sen^4\alpha} = 1$

Mirando el numerador, podemos estar tentados de usar la fórmula de $\cos 2\alpha$. Pero eso nos introduciría en la expresión un nuevo ángulo no existente: 2α, lo que complicaría la expresión (siempre es más fácil tener un solo ángulo y, mejor, una sola expresión trigonométrica del mismo). Pero hay otro camino, que es usar que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, de donde $c^4 - d^4 = (c^2)^2 - (d^2)^2 = (c^2 - d^2)(c^2 + d^2)$. Así:

$$\frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - sen^2\alpha}{(\cos^2\alpha - sen^2\alpha)(\cos^2\alpha + sen^2\alpha)} = \frac{1}{\cos^2\alpha + sen^2\alpha} = \frac{1}{1} = 1$$

17) Resolver la ecuación sen $2x = \cos x$

Para resolver una ecuación trigonométrica, lo habitual es intentar llegar a una ecuación en la que sólo aparece *una única razón trigonométrica* de *un único ángulo* igual a *un resultado*.

$$\text{sen}\, 2x = \cos x \ \Rightarrow\ 2\,\text{sen}\, x \cos x = \cos x \ \Rightarrow\ 2\,\text{sen}\, x\cos x - \cos x = 0 \ \Rightarrow$$
$$(\cos x)(2\text{sen}\, x - 1) = 0 \ \Rightarrow$$

Como un producto vale cero si, y sólo si alguno de los factores es cero (siempre que el otro factor exista para el resultado conseguido), se tienen dos posibilidades:

a) $\cos x = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{x = 90^\circ + 360^\circ k \text{ ó } x = 270^\circ + 360^\circ k}$ (que pueden escribirse en una sola fórmula como $\boxed{x = 90^\circ + 180^\circ k}$), $\forall k\in Z$.

b) $2\text{sen}\, x - 1 = 0 \ \Rightarrow\ 2\text{sen}\, x = 1 \ \Rightarrow\ \text{sen}\, x = ½ \ \Rightarrow\ \boxed{\begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \ \text{ ó} \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}}\quad \forall k\in Z.$

18) Resolver la ecuación $\cos 2x + 5\cos^2 x = 6$

$$\cos 2x + 5\cos^2 x = 6 \ \Rightarrow\ \cos^2 x - \text{sen}^2 x + 5\cos^2 x = 6 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ 6\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 6$$
$$\Rightarrow\ 7\cos^2 x - 1 = 6 \ \Rightarrow\ 7\cos^2 x = 7 \ \Rightarrow\ \cos^2 x = 1 \ \Rightarrow\ \cos x = \pm 1.$$

En consecuencia:

- Si $\cos x = -1 \ \Rightarrow\ \boxed{x = 180^\circ + 360^\circ k,\ \ \forall k\in Z}$
- Si $\cos x = 1 \ \Rightarrow\ \boxed{x = 0^\circ + 360^\circ k,\ \ \forall k\in Z}$

19) Resolver la ecuación: $3\,\text{sen}^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$

$$3(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x + \cos x = 0 \ \Rightarrow\ 3 - 3\cos^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0 \ \Rightarrow$$
$$-2\cos^2 x + \cos x + 3 = 0 \ \Rightarrow\ 2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$$

que es una ecuación de segundo grado cuya incógnita es $\cos x$:

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1\pm 5}{4} = \begin{cases} = \dfrac{1-5}{4} = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k,\ \forall k\in Z \\ = \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5 \text{ que no es posible} \end{cases}$$

20) Resolver: $4\cos 2x - 2\,\mathrm{sen}\,x = 1$

$$4\cos 2x - 2\,\mathrm{sen}\,x = 1 \;\Rightarrow\; 4(\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x) - 2\,\mathrm{sen}\,x - 1 = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 4\cos^2 x - 4\,\mathrm{sen}^2 x - 2\,\mathrm{sen}\,x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 4(1 - \mathrm{sen}^2 x) - 4\,\mathrm{sen}^2 x - 2\,\mathrm{sen}\,x - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 4 - 4\,\mathrm{sen}^2 x - 4\,\mathrm{sen}^2 x - 2\,\mathrm{sen}\,x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; -8\,\mathrm{sen}^2 x - 2\,\mathrm{sen}\,x + 3 = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 8\,\mathrm{sen}^2 x + 2\,\mathrm{sen}\,x - 3 = 0 \;\Rightarrow$$

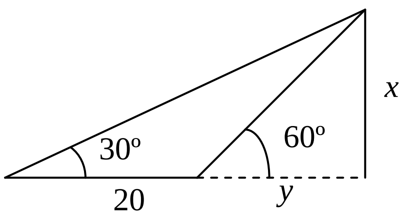
$$\mathrm{sen}\,x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 8(3)}}{2\cdot 8} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-2+\sqrt{100}}{16} = 0{,}5 \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \quad ó \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ = \dfrac{-2-\sqrt{100}}{16} = -0{,}75 \Rightarrow \begin{cases} x = 228{,}59^\circ + 360^\circ k \quad ó \\ x = 311{,}41^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{array} \right.$$

21) Resolver la ecuación: $2\,\mathrm{tg}\,x\;\sec x - \mathrm{tg}\,x = 0$

$$2\,\mathrm{tg}\,x\;\sec x - \mathrm{tg}\,x = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}\,x\,(2\sec x - 1) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathrm{tg}\,x = 0 \quad ó \\ 2\sec x - 1 = 0 \end{cases}$$

- $\mathrm{tg}\,x = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 0^\circ + 180^\circ k,\ \forall k \in \mathbb{Z}}$
- $2\sec x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \sec x = 1/2 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\;$ $\cos x = 2$, sin solución

22) El punto más alto de una elevación se ve, desde un punto del suelo, bajo un ángulo de 60º. Alejándose 20 m en línea recta con la base de dicha elevación, se ve bajo un ángulo de 30º. Averiguar la altura de la elevación.



En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x e y, deducimos:

$$\mathrm{tg}\,60^\circ = \frac{x}{y} \;\Rightarrow\; x = y\,\mathrm{tg}\,60^\circ \qquad (1)$$

En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x y $20+y$, se tiene:

$$\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{x}{20+y} \;\Rightarrow\; x = (20+y)\,\mathrm{tg}\,30^\circ$$

Igualando:

$y\,\mathrm{tg}\,60^\circ = (20+y)\,\mathrm{tg}\,30^\circ = 20\,\mathrm{tg}\,30^\circ + y\,\mathrm{tg}\,30^\circ \;\Rightarrow\; y\,\mathrm{tg}\,60^\circ - y\,\mathrm{tg}\,30^\circ = 20\,\mathrm{tg}\,30^\circ \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; y(\mathrm{tg}\,60^\circ - \mathrm{tg}\,30^\circ) = 20\,\mathrm{tg}\,30^\circ \;\Rightarrow\; y = \frac{20\,\mathrm{tg}\,30^\circ}{\mathrm{tg}\,60^\circ - \mathrm{tg}\,30^\circ} = 10$$

Sustituyendo en (1): $x = 10\,\mathrm{tg}\,60^\circ = 17{,}32\ m$

23) Resolver un triángulo, del que conocemos $a = 4\ m$, $b = 7\ m$ y $A = 30^\circ$.

Como conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, usamos el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\,A} = \frac{b}{\mathrm{sen}\,B} \;\Rightarrow\; \mathrm{sen}\,B = \frac{b\,\mathrm{sen}\,A}{a} = \frac{7\,\mathrm{sen}\,30}{4} \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; B = 61{,}04^\circ$ ó $B = 180^\circ - 61{,}04^\circ = 118{,}96^\circ$.

- Si $B = 61{,}04^\circ \;\Rightarrow\; C = 180^\circ - 61{,}04^\circ - 30^\circ = 88{,}96^\circ$. Y además:
$$\frac{a}{\mathrm{sen}\,A} = \frac{c}{\mathrm{sen}\,C} \;\Rightarrow\; c = \frac{a\,\mathrm{sen}\,C}{\mathrm{sen}\,A} = \frac{4\,\mathrm{sen}\,88{,}96^\circ}{\mathrm{sen}\,30^\circ} = 8{,}00\ m$$
- Si $B = 118{,}96^\circ \;\Rightarrow\; C = 180^\circ - 118{,}96^\circ - 30^\circ = 31{,}04^\circ$. De modo que:
$$\frac{a}{\mathrm{sen}\,A} = \frac{c}{\mathrm{sen}\,C} \;\Rightarrow\; c = \frac{a\,\mathrm{sen}\,C}{\mathrm{sen}\,A} = \frac{4\,\mathrm{sen}\,31{,}04^\circ}{\mathrm{sen}\,30^\circ} = 4{,}13\ m$$

24) Resolver un triángulo sabiendo que a = 5 cm, b = 4 cm y C = 47º (ángulo comprendido)

Por los datos que tenemos, hemos de utilizar el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 25 + 16 - 2\cdot 5\cdot 4\cos 47^\circ \Rightarrow \boxed{c = 3{,}70 \text{ m}}$$

Según el T. del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow \operatorname{sen} A = \frac{a\operatorname{sen} C}{c} = \frac{5\operatorname{sen} 47^\circ}{3{,}70} \Rightarrow A = 80{,}83^\circ \text{ ó } A = 180^\circ - 80{,}83^\circ = 99{,}17^\circ.$$

En principio, ambas soluciones serían válidas, porque sumadas con el ángulo C no llegan a 180º, por lo que podría existir B en ambos casos. Sin embargo, cuando un problema de este tipo se puede comenzar con el Teorema del coseno, sólo hay una solución válida. Como no tenemos forma de saber cuál de las dos es la correcta, desechamos el procedimiento y recalculamos A usando el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow 25 = 16 + 3{,}70^2 - 2\cdot 4\cdot 3{,}70\cdot\cos A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25 - 16 - 3{,}70^2}{-2\cdot 4\cdot 3{,}70} = \cos A \Rightarrow \boxed{A = 80{,}83^\circ = 80^\circ\, 50'\, 4.18''}.$$

Por tanto, $\boxed{B = 180^\circ - A - C = 52{,}17^\circ = 52^\circ\, 9'\, 55{,}82''}$.

25) Resolver un triángulo sabiendo que a = 10, b = 22 y c = 17.

Como conocemos los tres lados, empezamos aplicando el Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{22^2 + 17^2 - 10^2}{2\cdot 22\cdot 17} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 25{,}87^\circ}$$

Con la calculadora, las operaciones son: $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos^{-1}}$ $\boxed{(}$ 22 $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 17 $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 10 $\boxed{x^2}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ 2 $\boxed{\times}$ 22 $\boxed{\times}$ 17 $\boxed{)}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{=}$, donde la última operación es guardar el resultado en la memoria A para su uso posterior.

Para no tener problemas con los dos resultados que produce el uso del Teorema del Seno, aplicamos directamente el del Coseno para el cálculo de otro de los ángulos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{10^2 + 22^2 - 17^2}{2\cdot 10\cdot 22} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 47{,}89^\circ}$$

El uso de la calculadora es similar, salvo que guardamos el resultado en la memoria C.

Por último,

$$B = 180^\circ - (A + C) = \boxed{106{,}23^\circ}$$

Que, con calculadora, es así: 180 $\boxed{-}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{ALPHA A}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ALPHA C}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$.

26) Resolver un triángulo del que se conocen: a = 4, c = 10 y A = 20º.

Por el T. de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow \operatorname{sen} C = \frac{c\operatorname{sen} A}{a} = \frac{10\operatorname{sen} 20}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 58{,}76^\circ \text{ ó } C = 180^\circ - 58{,}76^\circ = 121{,}23^\circ.$$

- Si $C = 58{,}76^\circ \Rightarrow B = 180^\circ - A - C = 101{,}23^\circ$. Y además:

  $$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B} = \sqrt{16 + 100 - 2\cdot 4\cdot 10\cos 101{,}23^\circ} = 11{,}47$$

- Si $C = 121{,}23^\circ \Rightarrow B = 180^\circ - A - C = 38{,}76^\circ$. De modo que:

  $$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B} = \sqrt{16 + 100 - 2\cdot 4\cdot 10\cos 38{,}76^\circ} = 7{,}32$$

27) Resolver un triángulo sabiendo que a = 13 cm y b = 5 cm y C = 100º

Como tenemos dos lados y el ángulo comprendido, aplicamos el T. del Coseno, que nos proporcionará una solución única:

$$\boxed{c =}\ \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C} = \sqrt{169+25-130\cos 100}\ \boxed{\cong 14{,}72 \text{ cm}}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow 2ac\cos B = a^2 + c^2 - b^2 \Rightarrow \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 19{,}55^\circ = 19^\circ\ 32'\ 52{,}2''} \Rightarrow \boxed{A =}\ 180^\circ - 100^\circ - B\ \boxed{= 60{,}45^\circ = 60^\circ\ 27'\ 7{,}75''}$$

28) Resolver un triángulo sabiendo que A=96º, a=12 m y b=9 m

Por el T. de los senos:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{9 \text{ sen } 96^\circ}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 48{,}24^\circ} \text{ ó } B = 180^\circ - 48{,}24^\circ = 131{,}76^\circ.$$

Pero esta segunda solución no es válida, porque $A + B > 180^\circ$, con lo que no puede completarse el triángulo.

Entonces: $\boxed{C} = 180^\circ - A - B = \boxed{35{,}76^\circ}$. Y además:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow \boxed{c} = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A} = \frac{12 \text{ sen } 35{,}76^\circ}{\text{sen } 96^\circ} = \boxed{7{,}05 \text{ m}}$$