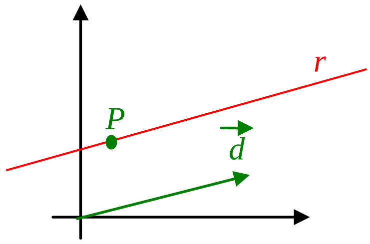
RECTAS EN EL PLANO

- **Ecuación de la recta**
  La ecuación de una recta puede darse de diferentes formas, que veremos a continuación.

- **Conocidos un punto $P(p_1, p_2)$ y un vector de dirección $\vec{d} = (d_1, d_2)$** (o sea, un vector que lleva la misma dirección que la recta), es posible determinar una recta (ver gráfico). Con estos datos, podemos dar la ecuación de dicha recta de varias formas:



  - Ecuación vectorial
    $\boxed{(x, y) = (p_1, p_2) + t\,(d_1, d_2)}$
  - Ecuaciones paramétricas
    $\boxed{\begin{cases} x = p_1 + td_1 \\ y = p_2 + td_2 \end{cases}}$ Es la ec. vectorial escrita componente a componente.
  - Ecuación continua
    $\boxed{\dfrac{x - p_1}{d_1} = \dfrac{y - p_2}{d_2}}$

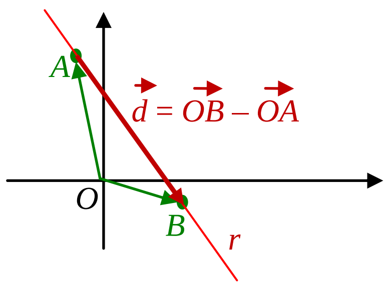
Si **se conocen dos puntos** de la recta, $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ $\Rightarrow$ $\vec{d} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ es un *vector de dirección* de la misma, y se pueden construir las ecuaciones vectorial, paramétricas y continua.

Vamos a suponer siempre que hablamos de rectas no verticales ni horizontales, de las que trataremos al final. Estas rectas presentan peculiaridades porque sus vectores de dirección tienen nula una de sus componentes. Por tanto, no se puede escribir la ecuación continua.

En una recta, un vector de dirección puede sustituirse por otro proporcional (puede, pues, simplificarse, dividiendo entre un mismo número ambas coordenadas). Eso no puede hacerse con un punto. Sí que puede sustituirse, en las ecuaciones anteriores, un punto por otro de la recta, obtenido a partir de las propias ecuaciones. Por todo ello, hay infinitas ecuaciones de los tipos anteriores para una misma recta.

Ejemplos

1) Construir las ecuaciones vectorial, paramétricas y continua de una recta que pasa por los puntos $A(-1, 5)$ y $B(2, -1)$



Tomamos como vector de dirección:

$$\vec{d} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, -1) - (-1, 5) = (3, -6)$$

Y, más aún. Todo vector proporcional al anterior lleva la misma dirección, por lo que también será vector de dirección de la misma recta. Así que, en lugar del anterior, vamos a tomar como vector de dirección ése multiplicado por 1/3: $\vec{d}\,' = (1, -2)$.

Necesitamos un punto de la recta, y tenemos dos. Tomamos cualquiera de ellos, por ejemplo B.

Ecuación vectorial: $\boxed{(x, y) = (2, -1) + t(1, -2)}$

Si desarrollamos, nos queda: $(x, y) = (2, –1) + (t, –2t) = (2 + t, –1 – 2t)$. Igualando primeras componentes de las coordenadas, y segundas componentes, tendremos las ecuaciones paramétricas: $\boxed{\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \end{cases}}$

Ecuación continua: $\boxed{\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2}}$

Ninguna de estas ecuaciones son cómodas para trabajar, si bien las paramétricas son útiles para resolver determinados problemas (la vectorial y las paramétricas son lo mismo: éstas últimas son la vectorial componente a componente, como hemos visto en este problema). Y la continua es muy útil para calcular la ecuación general o la explícita (que se ven más adelante) conocidos dos puntos de la recta, o un punto y un vector de dirección.

2) En la recta anterior, calcular las coordenadas de algunos puntos de la recta, usando las ecuaciones que de ella conocemos.

En la vectorial o paramétricas, basta dar valores a t. Por ejemplo, en la vectorial, para $t = –2$:

$$(x, y) = (2, –1) + –2\,(1, –2) = (2, –1) + (–2, 4) = \boxed{(0, 3)}$$

En las paramétricas es igual; por ejemplo, para $t = 3$:

$$\begin{cases} x = 2 + 3 = 5 \\ y = -1 - 2\cdot 3 = -1 - 6 = -7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(5, –7)} \text{ es un punto de la recta.}$$

La continua es incómoda mientras no se simplifique. Al hacerlo, obtenemos la que llamaremos más adelante *ecuación explícita*:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} \Rightarrow -2\,(x – 2) = y + 1 \Rightarrow -2x + 4 – 1 = y \Rightarrow \boxed{y = – 2x + 3}$$

Y en ésta, tomamos, por ejemplo $x = – 2 \Rightarrow y = 4 + 3 = 7 \Rightarrow \boxed{(– 2, 7)}$ es otro punto de la recta.

3) ¿Pertenece el punto (2, 3) a la recta?

En paramétricas (en vectorial es lo mismo), será un punto de la recta si hay algún valor de t que lo proporcione:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2 + t \Rightarrow 2 - 2 = t \Rightarrow t = 0 \\ 3 = -1 - 2t \Rightarrow 3 + 1 = 2t \Rightarrow 4 = 2t \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

Lo que quiere decir que **no** está en la recta, porque ningún valor de t proporciona sus coordenadas *a la vez* (si tomamos $t = 0$, obtenemos la primera coordenada, pero no la segunda; y al revés con $t = 2$).

En la ecuación que hemos llamado *explícita* es más mucho fácil: basta sustituir la x por 2 y ver si obtenemos $y = 3$. Como no es así (se obtiene $y = –1$), el punto no está en la recta. O, de otra forma, al sustituir $x = 2$ con $y = 3$ la ecuación (explícita) debería ser cierta, y no lo es: $3 \neq –2\cdot 2 + 3$.

- Ecuación general

  $\boxed{Ax + By + C = 0}$

  Donde: (A, B) es un vector *normal* de la recta (perpendicular a su dirección).
  $(–B, A)$ es un *vector de dirección*.

  La *ecuación general*, también llamada *implícita*, se puede obtener simplificando la *ecuación continua*. Por otra parte, como de la ecuación general se puede obtener un vector de dirección, como se ha indicado antes, y dando un valor arbitrario a x se obtienen las coordenadas de un punto de la recta, despejando el y correspondiente, es posible construir la ecuación continua (o las paramétricas o la vectorial) a partir de la general.

- Ecuación explícita

  $\boxed{y = mx + n}$

  - m = pendiente: directamente relacionada con la dirección de la recta, de manera que:
    a) Dos rectas son paralelas si, y sólo si, tienen la misma pendiente
    b) Si la pendiente es positiva, la recta es creciente, más cuanto mayor es m. Si la pendiente es negativa, es decreciente, más cuanto más negativa. Si la pendiente es nula, la recta es horizontal.
  - n = ordenada en el origen. Cuando $x = 0$, siempre se obtiene $y = n$.
  - $(1, m)$ es un vector de dirección de la recta.

- Ecuación punto-pendiente

  $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$

  Permite calcular la ecuación conocida la pendiente m y un punto (x_0, y_0). Por ejemplo, cuando se quiere calcular una paralela a una recta dada y que pase por cierto punto. Simplificando, se obtiene la general o la explícita.

- Ecuación normal

  $\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$

  Nos da la ecuación de la recta cuando conocemos un vector normal (A, B) y un punto (x_0, y_0) de la recta.

Ejemplos

4) Escribir las ecuaciones de la recta que pasa por $A(-1, 5)$ y $B(2, -1)$ de todas las formas conocidas.

Es la misma recta anterior. Ya tenemos la vectorial, paramétricas, continua y explícita, de los ejercicios anteriores. Veamos las que nos faltan.
Tomamos la explícita: $y = -2x + 3$. Vemos que su *pendiente* es -2, y su *ordenada en el origen*, 3. Poniéndola toda en el primer miembro, obtenemos la *general*:

$$\boxed{2x + y + 3 = 0}$$

Tomando un punto, por ejemplo B, y la pendiente, que es -2, escribimos la *punto-pendiente*:

$$\boxed{y + 1 = -2(x - 2)}$$

Y de la ecuación general obtenemos un vector normal: (2, 1). Por tanto, la ecuación *normal* es:

$$\boxed{2(x - 2) + 1(y + 1) = 0}$$

5) Escribir todas las ecuaciones de la recta $3x + 2y + 1 = 0$. Decir, además, un vector de dirección, uno normal, la pendiente y la ordenada en el origen.

- La ecuación nos viene dada en forma *general*. De ella obtenemos un *vector de dirección*: $\vec{d} = (-B, A) = (-2, 3)$ y un *vector normal*: $\vec{n} = (A, B) = (3, 2)$

- Despejando y, obtendremos la ecuación en forma ***explícita***: 2y = – 3x – 1 $\Rightarrow$ $y=\dfrac{-3x-1}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y=-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}}$, de donde concluimos que la *pendiente* es $m=-\dfrac{3}{2}$ y la *ordenada en el origen*, $n=-\dfrac{1}{2}$
- De la explícita tenemos la *pendiente*, ya dicha, y podemos conseguir un punto. Para esto, tomamos, por ejemplo, $x = 1 \Rightarrow y = -4/2 = -2$. Así que (1, – 2) es un punto de la recta. Por tanto, la forma *punto-pendiente* es: $\boxed{y+2=-\dfrac{3}{2}(x-1)}$
- De la ecuación *general* obtuvimos un vector normal: $\vec{n}$ = (3, 2). De la *explícita*, un punto: (1, – 2). Con ellos construimos la *ecuación normal*:

$$\boxed{3(x-1)+2(y+2)=0}$$

- Con el punto (1, – 2) y el vector de dirección $\vec{d}$ = (– 2, 3), construimos el resto de ecuaciones:
  - *Continua*: $\boxed{\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{3}}$
  - *Vectorial*: $\boxed{(x, y) = (1, -2) + t(-2, 3)}$
  - *Paramétricas*: $\boxed{\begin{cases} x=1-2t \\ y=-2+3t \end{cases}}$

6) Hallar la paralela a la recta $3x + 2y + 1 = 0$ que pase por el punto (1, 2).

Como muchos problemas de esta teoría, hay varias formas de resolverlo. Vamos a ver dos.

Si volvemos a la ecuación en forma *explícita*, que calculamos antes, tendremos que la *pendiente* es $m=-\dfrac{3}{2}$. Entonces, la recta paralela que buscamos, por ser paralela, tendrá la misma pendiente. Como la conocemos y, además, tenemos un punto de la recta que buscamos, usando la forma *punto-pendiente*, es:

$$y-2=-\frac{3}{2}(x-1) \Rightarrow 2y-4=-3(x-1) \Rightarrow 2y-4=-3x+3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x+2y-4-3=0 \Rightarrow \boxed{3x+2y-7=0}$$

La segunda forma de solucionarlo consiste en emplear el vector normal $\vec{n}$ = (3, 2) y el punto conocido (1, 2). De esta forma, la ecuación, en forma *normal*, será:

$$3(x-1)+2(y-2)=0 \Rightarrow 3x-3+2y-4=0 \Rightarrow \boxed{3x+2y-7=0}$$

A tener en cuenta que:

La recta obtenida es paralela, por cuanto, como se ve en la ecuación, tiene el mismo vector normal (podría tener vectores normales respectivos proporcionales) y pasa por (1, 2), lo que se comprueba sustituyendo $x = 1$, $y = 2$. Es bueno comprobar que no nos hemos equivocado.

Las soluciones finales las damos siempre en forma *general*, *explícita* o *paramétricas*.

- **Paralela a una recta dada**

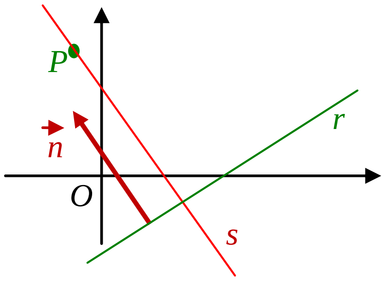
Nos dan una recta y un punto por el que debe pasar la paralela.

Si de la recta obtenemos el vector normal, con el punto dado podemos construir inmediatamente la ecuación en forma *normal*.

Si de la recta obtenemos el vector de dirección, con el punto dado podemos construir la ecuación *continua*.
Si de la recta obtenemos la pendiente, con el punto dado podemos construir la ecuación *punto-pendiente*.
Ver el problema 6 anterior.

- **Perpendicular a una recta dada**

Nos dan una recta r y un punto P por el que debe pasar una perpendicular s a la recta dada. Pues bien, el vector normal al la recta r: $\vec{n}$, es vector de dirección de la perpendicular solicitada s. De modo que podemos usar la forma *continua* para obtener la ecuación de s.



Ejemplo

7) Hallar la ecuación de la perpendicular a la recta $3x + 2y + 1 = 0$ que pase por el punto (1, 2).

El vector normal de esta recta (3, 2), es vector de dirección de la recta pedida. De ésta última conocemos, pues, el vector de dirección y un punto (1, 2). Por tanto, su ecuación en forma *continua* es:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow 2(x-1) = 3(y-2) \Rightarrow 2x - 2 = 3y - 6 \Rightarrow 2x - 3y - 2 + 6 = 0$$

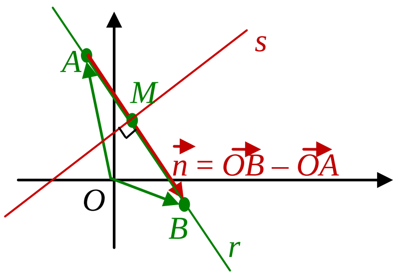
$$\Rightarrow \boxed{2x - 3y + 4 = 0}$$

Observar que pasa por (1, 2), como se comprueba al sustituir $x = 1$, $y = 2$ en la ecuación obtenida y viendo que es cierta, y que su vector normal (2, – 3) es perpendicular al normal de la recta inicial (3, 2), por lo que ambas rectas son perpendiculares. Y estos vectores se sabe que son perpendiculares entre si porque su producto escalar vale 0:

$$(2, -3)\cdot(3, 2) = 2\cdot 3 - 3\cdot 2 = 6 - 6 = 0$$

- **Mediatriz de dos puntos**

La mediatriz de dos puntos dados A y B es, por definición, la perpendicular en el punto medio M del segmento que los une. Por tanto, se calcula dicho punto medio y el vector $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ es un vector *normal* a la mediatriz. Usando la forma *normal* se obtiene su ecuación.



Ejemplo

8) Hallar la mediatriz del segmento delimitado por los puntos (– 1, 3) y (5, – 1).

El punto medio del segmento es:

$$x = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad y = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad M(2, 1)$$

Por otro lado, el vector normal de la mediatriz será:

$$\vec{n} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5, -1) - (-1, 3) = (6, -4)$$

Aunque es más fácil tomar un proporcional: lo multiplicamos por ½:

$$\vec{n} = (3, -2)$$

La mediatriz, en forma *normal*, es:

$$3(x-2) - 2(y-1) = 0 \Rightarrow 3x - 2y - 6 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{3x - 2y - 4 = 0}$$

- **Posiciones relativas de dos rectas**

Estudiamos el sistema formado por sus respectivas ecuaciones generales:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

- Si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, las rectas se cortan en un punto. Para hallarlo, basta resolver el sistema.
- Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$, las rectas son paralelas.
- Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, son la misma recta.

Ejemplos

9) Hallar la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $r \equiv 2x - y - 8 = 0; \quad s \equiv -6x + 3y + 24 = 0$

Son la misma recta, ya que la segunda se obtiene de la primera multiplicando la ecuación por – 3. O bien, por el criterio expresado antes:

$$\frac{-6}{2} = \frac{3}{-1} = \frac{24}{-8}$$

b) $r \equiv 2x - y - 8 = 0; \quad s \equiv -6x + 3y + 2 = 0$

Son paralelas, ya que:

$$\frac{-6}{2} = \frac{3}{-1} \neq \frac{2}{-8}$$

c) $r \equiv 2x - y - 8 = 0; \quad s \equiv 2x + y - 4 = 0$

Se cortan en un punto, puesto que sus respectivos vectores normales no son proporcionales:

$$\frac{2}{2} \neq \frac{1}{-1}$$

Si nos pidieran averiguar el punto donde se cortan, habría que resolver el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas. Así, por reducción:

$$\begin{cases} 2x - y - 8 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 8 \\ \underline{2x + y = 4} \end{cases}$$

$$Sumando: \qquad 4x \quad = 12 \Rightarrow x = 3$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$2 \cdot 3 + y - 4 = 0 \;\Rightarrow\; y + 2 = 0 \;\Rightarrow\; y = -2$$

Es decir, se cortan en (3, – 2).

- **Distancia de un punto a una recta**

Dada la recta $r \equiv Ax + By + C = 0$, y un punto que no pertenezca a ella: $P(x_0, y_0)$, la distancia entre ambos es:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo
10) Hallar la distancia entre el punto $P(3, 3)$ y la recta $r \equiv 2x - 3y - 8 = 0$.

$$d(P,r) = \frac{|2\cdot 3 - 3\cdot 3 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|6-9-8|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|-11|}{\sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{13}}$$

- **Distancia entre dos puntos**

Si $P(a, b)$ y $Q(a', b')$, la distancia entre ambos es:

$$d(P, Q) = \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}$$

Ejemplo
11) Hallar la distancia entre los puntos $P(3, 1)$ y $Q(-2, 5)$

$$d(P,Q) = \sqrt{(3+2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

- **Distancia entre dos rectas paralelas**

Si escribimos las ecuaciones en forma general pero <u>con los mismos coeficientes para x y para y</u> (siempre es posible, porque son paralelas y, por tanto, tienen vectores de dirección proporcionales y, también, vectores normales proporcionales, y los coeficientes citados son las coordenadas de sus respectivos vectores normales), entonces:

$$\begin{array}{l} r \equiv Ax + By + C = 0 \\ r' \equiv Ax + By + C' = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \; d(r, r') = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

También puede obtenerse escogiendo un punto de una de las rectas y hallando la distancia a la otra recta, previa comprobación de que son paralelas.

- **Área de un triángulo**

Si nos dan las coordenadas de 3 puntos y nos piden calcular el área del triángulo que forman, procedemos así:

1) Tomamos dos de ellos como base del triángulo. Calculamos la distancia entre ambos y ya tenemos cuánto mide la base.
2) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos que forman la base.
3) Calculamos la distancia entre el tercer punto y la recta anterior. Dicha distancia será la altura del triángulo.
4) $S = b\cdot h / 2$

Ejemplo
12) Hallar el área del triángulo delimitado por $A(-3, 2)$, $B(1, 4)$ y $C(5, -4)$.

La distancia entre B y C es:

$$d(B,C) = \sqrt{(5-1)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = \sqrt{5\cdot 16} = 4\sqrt{5}$$

Hallamos la recta que pasa por B y C. Teniendo en cuenta que un vector de dirección lo obtenemos restando sus coordenadas, la forma continua será:

$$\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-4}{-4-4} \quad \Rightarrow \quad -8x + 8 = 4y - 16 \quad \Rightarrow \quad 8x + 4y - 24 = 0$$

Simplificando entre 4: $2x + y - 6 = 0 \equiv r$.

La distancia de A a esta recta es:

$$d(A,r) = \frac{|2(-3)+2-6|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

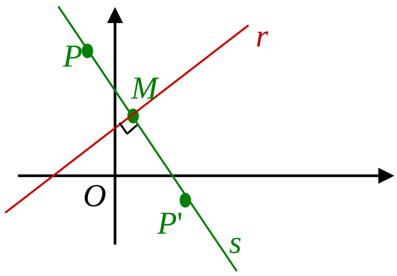
Luego el área del triángulo es:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4\sqrt{5}\,\frac{10}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Estaremos trabajando en un sistema de referencia. Por tanto, la unidad de longitud será la distancia entre el origen y el $x = 1$. Se medirá en metros, cm o lo que sea. Normalmente usamos u refiriéndonos a tal unidad de longitud, sea la que sea. De modo que, por ejemplo,

$$d(B,C) = 4\sqrt{5}\ u$$
$$S = 20\ u^2$$

- **Simétrico de un punto respecto de una recta**



Dada la recta r y un punto P que no esté en la recta, su simétrico P' puede obtenerse así:

1) Calculamos la perpendicular s que pase por P (antes vimos cómo hacerlo).
2) Calculamos el punto M intersección de r y s (resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones).
3) M es el punto medio del segmento PP'. O, de otra forma, P' es el simétrico de P respecto de M. (Ver el documento *Geometría Analítica. Espacios vectorial y euclídeo* (*Vectores en el Plano*), donde se informaba de cómo obtener dicho punto).

- **Rectas horizontales y verticales**

Las horizontales, como ya se ha dicho al hablar de la forma *explícita*, tienen pendiente $m = 0$. Por tanto, sus ecuaciones son de la forma $y = n$ (n = número fijo).
Las verticales son rectas especiales, con ecuación $x = k$ (k = número fijo).

Ejemplo

13) Hallar la recta horizontal, y la vertical, que pasan por el punto $A(-3, 2)$.

Horizontal: $y = 2$ (para que el punto $(-3, 2)$ verifique la ecuación).
Vertical: $x = -3$ (por la misma razón)