IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**

Segundo trimestre - Primer examen – 1º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Hallar a para que la división de $a + 3i$ entre $2 - i$ esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante. *(1,5 puntos)*
2) Hallar todas las soluciones *complejas* de la ecuación $z^5 - 32 = 0$. *(1,5 puntos)*
3) Escribir $z = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$ en forma binómica, cartesiana, polar y trigonométrica. *(1,5 ptos)*
4) Demostrar la siguiente identidad: $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{tg} \alpha$ *(1 punto)*
5) Resolver la siguiente ecuación: $\cos 2x + 5\cos x = 5$. *(1,5 puntos)*
6) Si $\cos \alpha = -1/3$, siendo $-\pi/2 < \alpha < \pi$, hallar el valor exacto de $\operatorname{sen} 2\alpha$ y de $\operatorname{sen}(90 + \alpha)$. Posteriormente, usando la calculadora, decir el valor exacto de α en grados, minutos y segundos. *(1,5 puntos)*
7) El punto más alto de una elevación se observa bajo un ángulo de 67º. Alejándonos 20 m en línea recta con la base de dicha elevación, se vuelve a observar, esta vez bajo un ángulo de 35º. Calcular la altura de la elevación con una precisión de dos decimales. *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Hallar a para que la división de $a + 3i$ entre $2 - i$ esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante. *(1,5 puntos)*

$$\frac{a+3i}{2-i} = \frac{a+3i}{2-i}\,\frac{2+i}{2+i} = \frac{2a+ai+6i+3i^2}{2^2-i^2} = \frac{2a+(a+6)i+3(-1)}{4-(-1)} =$$
$$= \frac{2a+(a+6)i-3}{4+1} = \frac{2a-3+(a+6)i}{5} = \frac{2a-3}{5}+\frac{a+6}{5}i$$

Este complejo, que está en forma binómica, estará en la bisectriz del primer y tercer cuadrante si coinciden sus partes real e imaginaria:

$$\frac{2a-3}{5} = \frac{a+6}{5} \Leftrightarrow 2a - 3 = a + 6 \Leftrightarrow 2a - a = 6 + 3 \Leftrightarrow \boxed{a = 9}$$

2) Hallar todas las soluciones *complejas* de la ecuación $z^5 - 32 = 0$. *(1,5 puntos)*

$z^5 - 32 = 0 \Leftrightarrow z^5 = 32 \Leftrightarrow z = \sqrt[5]{32}$

Hemos de hallar las 5 raíces *complejas* de 32. Para ello, hemos de pasar 32 a polar. Como $32 = 32 + 0i = (32, 0)$ está sobre la parte positiva del eje OX, se tiene:

$$32 = 32_{0^\circ}$$

Todas las raíces tendrán como *módulo:*

$r = \sqrt[5]{32} = 2$

Y sus respectivos argumentos son:

1) $\frac{0}{5}+\frac{360}{5}\cdot 0 = 0^\circ$
2) $\frac{0}{5}+\frac{360}{5}\cdot 1 = 72^\circ$
3) $\frac{0}{5}+\frac{360}{5}\cdot 2 = 144^\circ$
4) $\frac{0}{5}+\frac{360}{5}\cdot 3 = 216^\circ$
5) $\frac{0}{5}+\frac{360}{5}\cdot 4 = 288^\circ$

Luego las 5 soluciones son: $\boxed{2_{0^\circ} = 2 \text{ (nº real)};\ 2_{72^\circ};\ 2_{144^\circ};\ 2_{216^\circ};\ 2_{288^\circ}}$.

3) Escribir $z = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ en forma binómica, cartesiana, polar y trigonométrica. *(1,5 ptos)*

$$\boxed{z = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2} \quad (Binómica)}$$

$$\boxed{z = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (Cartesiana)}$$

Módulo: $\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$

Argumento: Sin estuviera en el primer cuadrante, sería: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ $\alpha = 30º$. Pero como z está en el segundo cuadrante, puesto que su *parte real* es negativa y la *imaginaria*, positiva, debe ser: $\alpha = 180º - 30º = 150º$. En consecuencia:

$\boxed{z = 1_{150º}\ (Polar)}$

$\boxed{z = 1(\cos 150º + i\ \text{sen}\ 150º)\ \ (Trigonométrica)}$

4) Demostrar la siguiente identidad: $(1 + \text{tg}^2\alpha)\ \text{sen}\ 2\alpha = 2\text{tg}\ \alpha$ *(1 punto)*

$$(1 + \text{tg}^2\alpha)\ \text{sen}\ 2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} 2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = 2\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 2\ \text{tg}\ \alpha$$

5) Resolver la siguiente ecuación: $\cos 2x + 5\cos x = 5$. *(1,5 puntos)*

Buscamos quedarnos con una única razón trigonométrica de un único ángulo, y despejarla. Empezamos por convertir $\cos 2x$:

$$\cos^2 x - \text{sen}^2 x + 5\cos x = 5 \Rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 5\cos x = 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 5\cos x = 5 \Rightarrow 2\cos^2 x + 5\cos x - 6 = 0$$

Llamamos $t = \cos x$ y resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$2t^2 + 5t - 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{-5\pm\sqrt{25+48}}{4} = \frac{-5\pm\sqrt{73}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-5-\sqrt{73}}{4} \\ = \dfrac{-5+\sqrt{73}}{4} \end{array}\right.$$

- Si $\cos x = \dfrac{-5-\sqrt{73}}{4} \approx -3.39 \Rightarrow$ No tiene solución, pues $\cos x$ sólo toma valores entre -1 y 1.
- Si $\cos x = \dfrac{-5+\sqrt{73}}{4} \approx 0.886 \Rightarrow$ $\boxed{x = \pm 27º\ 37'\ 30.18'' + 360º k,\ \ k \in Z}$

6) Si $\cos\alpha = -1/3$, siendo $-\pi/2 < \alpha < \pi$, hallar el valor exacto de $\text{sen}\ 2\alpha$ y de $\text{sen}(90 + \alpha)$. Posteriormente, usando la calculadora, decir el valor exacto de α en grados, minutos y segundos. *(1,5 puntos)*

- Como $\text{sen}\ 2\alpha = 2\ \text{sen}\ \alpha\cos\alpha$, empecemos calculando $\text{sen}\ \alpha$.

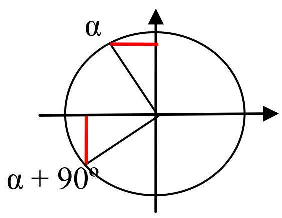
$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

  donde el valor correcto es el positivo, ya que α está en el segundo cuadrante, teniendo en cuenta que $-\pi/2 < \alpha < \pi$, lo que significa que está en el 4º, 1er ó 2º cuadrante y que $\cos\alpha$ es negativo, lo que ocurre, de los tres cuadrantes posibles, sólo en el segundo.
  Por tanto:

$$\text{sen}\ 2\alpha = 2\ \frac{\sqrt{8}}{3}\ \frac{-1}{3} = -\frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{9} = \boxed{-\frac{4\sqrt{2}}{9}}$$

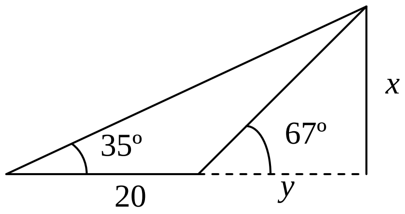
- $\text{sen}(90 + \alpha) = \cos\alpha$, según podemos deducir razonando sobre los gráficos de la circunferencia trigonométrica, teniendo presente que, por los cuadrantes en los que estamos, ambos son negativos. Y, por tanto:

$$\text{sen}(90 + \alpha) = \cos\alpha = \boxed{-\frac{1}{3}}$$



- Por último, si cos α = –1/3, la calculadora nos dice que: $\boxed{\alpha = 109^\circ\ 28'\ 16{,}3''}$, que es correcto, porque estamos en el segundo cuadrante.

7) El punto más alto de una elevación se observa bajo un ángulo de 67º. Alejándonos 20 m en línea recta con la base de dicha elevación, se vuelve a observar, esta vez bajo un ángulo de 35º. Calcular la altura de la elevación con una precisión de dos decimales. *(1,5 puntos)*



En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x e y, deducimos:

$$\operatorname{tg} 67^\circ = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad x = y \operatorname{tg} 67^\circ \qquad (1)$$

En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x y $20+y$, se tiene:

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{x}{20+y} \quad \Rightarrow \quad x = (20+y) \operatorname{tg} 35^\circ$$

Igualando:

$$y \operatorname{tg} 67^\circ = (20+y) \operatorname{tg} 35^\circ = 20 \operatorname{tg} 35^\circ + y \operatorname{tg} 35^\circ \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y \operatorname{tg} 67^\circ - y \operatorname{tg} 35^\circ = 20 \operatorname{tg} 35^\circ \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y(\operatorname{tg} 67^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ) = 20 \operatorname{tg} 35^\circ \quad \Rightarrow \quad y = \frac{20 \operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 67^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ}$$

Sustituyendo en (1): $x = \dfrac{20 \operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 67^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ} \operatorname{tg} 67^\circ = \boxed{19{,}93\ m}$

IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**

Segundo trimestre - Examen Global – 1º Bach CT

NOMBRE: ____

1ª EVALUACIÓN: □ APROBADA □ SUSPENDIDA (Marcar lo correcto)

Instrucciones: **1)** Todas las **hojas** deben tener el **nombre** y estar **numeradas** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Dar en forma polar las soluciones de la ecuación: $x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 4 = 0$. *(1,5 puntos)*

2) Hallar el período principal de: $y = \text{tg}\,\frac{4}{3}x$ *(1,5 puntos)*

3) Resolver la ecuación: $2\cos 2x = 1 - 2\text{sen}^2 x$. *(1,5 puntos)*

4) Sabemos que $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5}$, siendo $x \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$. Se pide hallar, sin calculadora:

   a) sen x. ¿En qué cuadrante está x? *(0,8 puntos)*

   b) $\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ *(0,7 puntos)*

5) *(Sólo para quienes tienen aprobada la 1ª evaluación)* Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de 120º. ¿Cuánto distan A y C? Calcular, también, todos los ángulos del triángulo que se forma. *(1,5 puntos)*

6) *(Sólo para quienes tienen aprobada la 1ª evaluación)* a) Demostrar el *Teorema del Coseno* para un ángulo obtuso. *(1,2 puntos)*

   b) ¿Qué relación tiene el *Teorema de Pitágoras* con el del *Coseno*? *(0,3 puntos)*

7) *(Sólo para quienes tienen aprobada la 1ª evaluación)* Demostrar que, para los valores para los cuales tiene sentido la igualdad, es cierto que: *(1 punto)*

$$\frac{2\text{sen}\,x - \text{sen}\,2x}{2\text{sen}\,x + \text{sen}\,2x} = \text{tg}^2\,\frac{x}{2}$$

5) *(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación)* Resolver la ecuación: $2\log(2 + x) - \log(5x + 6) = 0$ *(1 punto)*

6) *(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación)* Resolver la inecuación:

$$\frac{-2x^2+12x-10}{x^2-2x} \geq 0$$ *(1,5 puntos)*

7) *(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación)* Resolver y discutir (clasificar) el siguiente sistema por el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método). Si tuviera más de una solución, además de dar la forma general de todas las soluciones, decir una solución en la que $y = -2$: *(1,5 puntos)*

$$\begin{cases} -4x+3y-2z = -4 \\ 3x+2y+5z = -16 \\ 5x-8y-z = 24 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1) Dar en forma polar las soluciones de la ecuación: $x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 4 = 0$. *(1,5 puntos)*

$$x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{4\cdot 3 - 16}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{-1}}{2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = \frac{2(\sqrt{3} \pm i)}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \sqrt{3} - i \\ = \sqrt{3} + i \end{array} \right.$$

- $z_1 = \sqrt{3} - i$. Módulo: $r = \sqrt{3+1} = 2$

  Argumento: Si estuviera en el I cuadrante, sería: $\text{tg}\ \sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sigma = 30^\circ$.

  Pero como la parte real es positiva y la imaginaria, negativa, el cuadrante es el IV $\Rightarrow \alpha = 330^\circ$

  Por tanto: $\boxed{z_1 = 2_{330^\circ}}$

- $z_1 = \sqrt{3} + i$. Módulo: $r = \sqrt{3+1} = 2$

  Argumento: Es del I cuadrante: $\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

  Por tanto: $\boxed{z_2 = 2_{30^\circ}}$

2) Hallar el período principal de: $y = \text{tg}\ \frac{4}{3}x$ *(1,5 puntos)*

f será periódica de período k si $\forall x \in \text{Dom}(f)$ se tiene que $f(x) = f(x + k)$, para cierto k que hemos de encontrar.

En nuestro caso, $f(x) = \text{tg}\ \frac{4}{3}x$. Esta función se basa en una función *tangente*, que es periódica de período π, por lo que $\forall z$, $\text{tg}\ z = \text{tg}\ (z + \pi)$. Por ello (usando $z = \frac{4}{3}x$):

$f(x) = \text{tg}\ \frac{4}{3}x = \text{tg}\left(\frac{4}{3}x + \pi\right)$. Pues bien:

$$\begin{cases} f(x) = \text{tg}\frac{4}{3}x = \text{tg}\left(\frac{4}{3}x + \pi\right) \\ f(x+k) = \text{tg}\frac{4}{3}(x+k) \end{cases}$$

Para que $f(x) = f(x + k)$ se requiere, entonces, que coincidan estos dos resultados:

$$\text{tg}\ \frac{4}{3}(x+k) = \text{tg}\left(\frac{4}{3}x + \pi\right) \Rightarrow \frac{4}{3}(x+k) = \frac{4}{3}x + \pi \Rightarrow \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}k = \frac{4}{3}x + \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}k = \pi \Rightarrow k = \frac{3}{4}\pi$$

Por lo que $\boxed{f \text{ es periódica de período } \frac{3}{4}\pi}$.

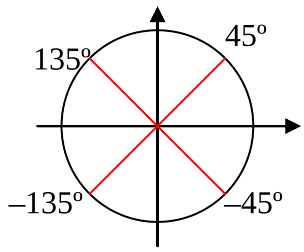
3) Resolver la ecuación: $2\cos 2x = 1 - 2\text{sen}^2 x$. *(1,5 puntos)*

$$2\cos 2x = 1 - 2\text{sen}^2 x \Rightarrow 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = 1 - 2\text{sen}^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x - 2\text{sen}^2 x = 1 - 2\text{sen}^2 x \Rightarrow 2\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

- $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{x = \pm 45^\circ + 360^\circ k,\ k \in \mathbb{Z}}$
- $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{x = \pm 135^\circ + 360^\circ k,\ k \in \mathbb{Z}}$



Podemos unificar ambas, si observamos el gráfico y vemos la situación (no es necesario), en: $\boxed{x = 45^\circ + 45^\circ k,\ k \in \mathbb{Z}}$

4) Sabemos que $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5}$, siendo $x \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$. Se pide hallar, sin calculadora:

a) sen x. ¿En qué cuadrante está x? *(0,8 puntos)*

Desarrollamos $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ usando la fórmula cos(a + b). Además, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1$. Así:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -\operatorname{sen} x$$

$$\text{Como } \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5} \Rightarrow -\operatorname{sen} x = -\frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = \frac{1}{5}}$$

Además, dado que coseno es negativo y seno positivo, x sólo puede estar en el $\boxed{\text{segundo cuadrante}}$.

b) $\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ *(0,7 puntos)*

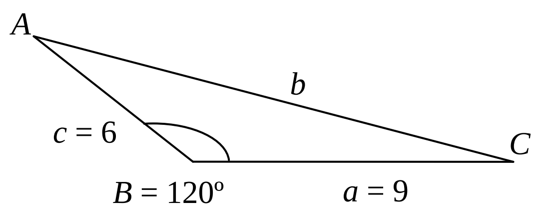
$$\text{Como } \operatorname{sen} x = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = -\sqrt{1-\frac{1}{25}} = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$

Donde el signo se ha tomado negativo porque sabemos que x está en el segundo cuadrante.

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = \operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{5}\frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{24}}{5}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{10} + \frac{\sqrt{72}}{10} =$$

$$= \boxed{\frac{1+6\sqrt{2}}{10}}$$

5) *(Sólo para quienes tienen aprobada la 1ª evaluación)* Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de 120º. ¿Cuánto distan A y C? Calcular, también, todos los ángulos del triángulo que se forma. *(1,5 puntos)*



Como conocemos dos lados y el ángulo comprendido, usamos el *Teorema del Coseno*:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B =$$
$$= 81 + 36 - 2\cdot 9\cdot 6 \cos 120^\circ =$$
$$= 117 + 108\cdot 0{,}5 = 171$$

De donde: $\boxed{b = \sqrt{171} \approx 13.08 \text{ km}}$

Por el *Teorema de los Senos*:

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{a}{\text{sen } A} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{a \text{ sen } B}{b} = \frac{9 \text{ sen } 120}{\sqrt{171}} = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{171}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 36.58^\circ = 36^\circ 35' 12.39''}$$

La otra solución (180º – 36.58º) no es válida, porque un triángulo sólo puede tener un ángulo obtuso.

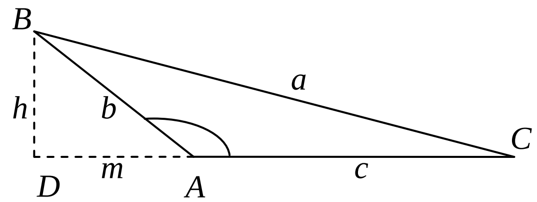
Por último: $\boxed{C =}$ $180 - (A + B) =$ $\boxed{23.41^\circ = 23^\circ 24' 47.61''}$

6) *(Sólo para quienes tienen aprobada la 1ª evaluación)* a) Demostrar el *Teorema del Coseno* para un ángulo obtuso. *(1,2 puntos)*

Según el gráfico:

- Triángulo rectángulo cuyos lados son b, h y m (T. de Pitágoras):

$$b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2 \quad (1)$$



- En el mismo triángulo:

$$\cos(180 - A) = \frac{m}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = b \cos(180 - A) = -b \cos A \ (2)$$

- Triángulo CBD (T. de Pitágoras):

$$a^2 = h^2 + (m + c)^2 = h^2 + m^2 + 2mc + c^2$$

Sustituimos (1) y (2):

$$a^2 = (b^2 - m^2) + m^2 + 2(-b \cos A)\ c + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

b) ¿Qué relación tiene el *Teorema de Pitágoras* con el del *Coseno*? *(0,3 puntos)*

Si el ángulo $A = 90^\circ$ (es decir, estamos en un triángulo rectángulo) el Teorema del Coseno, que es la última fórmula a la que hemos llegado en el apartado anterior, se transforma en:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0 = b^2 + c^2$$

que es el *Teorema de Pitágoras*. Por tanto, éste teorema es un caso particular del *Teorema del Coseno* para triángulos rectángulos. Sin embargo, se necesita el *Teorema de Pitágoras* para la demostración del *Teorema del Coseno*.

7) *(Sólo para quienes tienen aprobada la 1ª evaluación)* Demostrar que, para los valores para los cuales tiene sentido la igualdad, es cierto que: *(1 punto)*

$$\frac{2\text{sen } x - \text{sen } 2x}{2\text{sen } x + \text{sen } 2x} = \text{tg}^2 \frac{x}{2}$$

$$\frac{2\text{sen } x - \text{sen } 2x}{2\text{sen } x + \text{sen } 2x} = \frac{2\text{sen } x - 2\text{sen } x \cos x}{2\text{sen } x + 2\text{sen } x \cos x} = \frac{2\text{sen } x(1 - \cos x)}{2\text{sen } x(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}\right)^2 = \text{tg}^2 \frac{x}{2}$$

5) *(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación)* Resolver la ecuación: $2\log(2 + x) - \log(5x + 6) = 0$ *(1 punto)*

$$2\log(2 + x) - \log(5x + 6) = 0 \Rightarrow \log(2 + x)^2 - \log(5x + 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \frac{(2 + x)^2}{5x + 6} = \log 1 \Rightarrow \frac{(2 + x)^2}{5x + 6} = 1 \Rightarrow 4 + 4x + x^2 = 5x + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = -1 \\ = 2 \end{array} \right.$$

Ambas soluciones son válidas porque, si las sustituimos en la ecuación original, ni anulan ni hacen 0 ningún argumento de logaritmos. Así: $\boxed{x = -1 \text{ ó } x = 2}$.

6) *(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación)* Resolver la inecuación: $\dfrac{-2x^2 + 12x - 10}{x^2 - 2x} \geq 0$ *(1,5 puntos)*

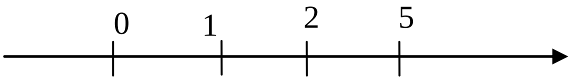
- Factorizamos y hallamos las raíces de numerador y denominador.
  - $-2x^2 + 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = 1 \\ = 5 \end{array} \right.$

    Por lo que, como conocemos las dos raíces del polinomio de grado 2, aplicando el Teorema de Descomposición Factorial tenemos que:

    $\boxed{-2x^2 + 12x - 10 = -2(x-1)(x-5) \text{ y sus raíces son } 1 \text{ y } 5}$.
  - $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ó} \\ x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$ porque un producto vale cero si, y sólo si alguno de los factores se anula. Luego:

    $\boxed{x^2 - 2x = x(x-2) \text{ y sus raíces son } 0 \text{ y } 2}$.
- Inecuación simplificada:

  La inecuación se transforma en: $\dfrac{-2(x-1)(x-5)}{x(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{(x-1)(x-5)}{x(x-2)} \leq 0}$
- Cuadro de signos. Dividimos R en intervalos mediante las raíces obtenidas, una vez ordenadas, y creamos el cuadro de signos: ninguno de los factores intervinientes cambiará de signo dentro de dichos intervalos, por lo que basta tomar un punto cualquiera de cada uno de ellos para evaluar los signos (cualquier otro punto ofrecerá el mismo signo):



	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, 5)$	5	$(5, +\infty)$
$x-1$	–	...	–	0	+	...	+	...	+
$x-5$	–	...	–	...	–	...	–	0	+
x	–	0	+	...	+	...	+	...	+
$x-2$	–	...	–	...	–	0	+	...	+
$\dfrac{(x-1)(x-5)}{x(x-2)}$	+	$\nexists$	–	0	+	$\nexists$	–	0	+
¿Sirven? →	No	No	Si	Si	No	No	Si	Si	No

Los signos de la última fila, que son los que nos interesan, los obtenemos mediante la regla de los signos con los que están en su misma columna. Los valores que anulan el denominador provocan que no se pueda completar la operación, por lo que también los descartamos. De este modo, las soluciones son todos los puntos del conjunto:

$$\boxed{(0, 1] \cup (2, 5]}$$

7) *(Sólo para quienes tienen suspendida la 1ª evaluación)* Resolver y discutir (clasificar) el siguiente sistema por el método de Gauss en su forma matricial (no es válido

ningún otro método). Si tuviera más de una solución, además de dar la forma general de todas las soluciones, decir una solución en la que $y = -2$: *(1,5 puntos)*

$$\begin{cases} -4x+3y-2z = -4 \\ 3x+2y+5z = -16 \\ 5x-8y-z = 24 \end{cases}$$

Triangularizamos la *matriz ampliada*:

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 5 & -16 \\ 5 & -8 & -1 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2+5F_3]{F_1-2F_3} \begin{pmatrix} -14 & 19 & 0 & -52 \\ 28 & -38 & 0 & 104 \\ 5 & -8 & -1 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+2F_1}$$

$$\begin{pmatrix} -14 & 19 & 0 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -1 & 24 \end{pmatrix}$$

Ya está triangularizada. Al ser la segunda fila completa de 0, la eliminamos. Quedan, entonces, 2 ecuaciones con 3 incógnitas, por lo que estamos ante un **sistema compatible indeterminado**. Reconstruimos el sistema y lo resolvemos:

$$\begin{cases} -14x+19y = -52 \\ 5x-8y-z = 24 \end{cases}$$

Llamamos $y = t$ y lo pasamos al segundo miembro, donde t será un número real arbitrariamente escogido por nosotros. Podríamos haber llamado $x = t$, pero no deberíamos hacerlo con z, porque nos obligaría a triangularizar de nuevo. Además, como nos van a pedir una solución para un valor de y determinado, es mejor que el valor que elegimos nosotros (t) quede asignado a y:

$$\begin{cases} -14x = -52-19t \\ 5x-z = 24+8t \end{cases} \Rightarrow$$

Despejando en la 1ª:

$$52+19t = 14x \Rightarrow x = \frac{52+19t}{14}$$

Sustituyendo en la 2ª: $5\frac{52+19t}{14} - z = 24+8t \ \Rightarrow \ z = \frac{260+95t}{14} - 24 - 8t =$

$$= \frac{260+95t-336-112t}{14} = \frac{-17t-76}{14}$$

Luego la solución final tiene la forma:

$$\boxed{\left(\frac{52+19t}{14},\ t,\ \frac{-17t-76}{14}\right)}$$

La solución que piden es:

- Si $t = -2$: $\boxed{(1, -2, -3)}$

IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**

Segundo trimestre - Recuperación – 1º Bach CT

NOMBRE: ____

2ª EVALUACIÓN: □ APROBADA □ SUSPENDIDA (Marcar lo correcto)

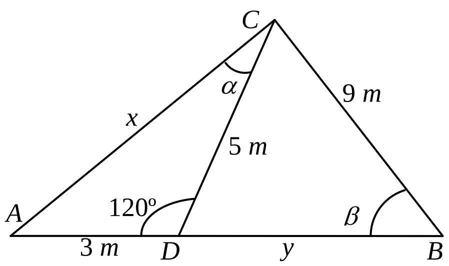
Instrucciones: **1)** Todas las **hojas** deben tener el **nombre** y estar **numeradas** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Resolver la ecuación: $\log x^2 - 1 = \log \frac{10x+11}{10}$ *(1,5 puntos)*

2) Resolver la inecuación: $\frac{-2x^2+12x-10}{x^2-2x} \geq 0$ *(1,5 puntos)*

3) (En este problema sólo se obtendrán puntos por la resolución si se llega a la solución final correcta completa). Aplicando el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método ni forma), clasificar y resolver el sistema siguiente. Además, si tuviese más de una solución, decir una en la que $z = 3$: *(1,5 puntos)*

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y+2z &= 4 \\ -3x+5y+5z &= 2 \\ 7x-2y-3z &= 2 \end{aligned}\right\}$$



4) En el triángulo de la figura, hallar x, α, β, y. *(1,5 puntos)*

5) Sabiendo que $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, siendo $x \in (0, \pi)$, hallar, *sin calculadora*: a) $\cos 2x$; b) $\operatorname{sen} 2x$; c) $\operatorname{tg}(x + \pi/3)$. *(1,5 puntos)*

6) Resolver la ecuación: $z^3 = 15 - 15\sqrt{3}\, i$ *(1,5 puntos)*

7) Hallar el período principal de la función $y = \cos\left(\frac{3}{2}x\right)$ *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Resolver la ecuación: $\log x^2 - 1 = \log \dfrac{10x+11}{10}$ *(1,5 puntos)*

Como no podemos ponerlo todo en función de $\log x$, vamos a intentar eliminar los logaritmos:

$$\log x^2 - 1 = \log \frac{10x+11}{10} \Rightarrow \log x^2 - \log 10 = \log \frac{10x+11}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \frac{x^2}{10} = \log \frac{10x+11}{10} \Rightarrow \frac{x^2}{10} = \frac{10x+11}{10} \Rightarrow x^2 - 10x - 11 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100+44}}{2} = \frac{10 \pm 12}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{-2}{2} = -1 \\ = \frac{22}{2} = 11 \end{array} \right.$$

Ninguna de las dos hace 0 ni negativo ningún argumento de logaritmos en la ecuación original, por lo que son válidas: $\boxed{x = -1 \text{ ó } x = 11}$.

2) Resolver la inecuación: $\dfrac{-2x^2+12x-10}{x^2-2x} \geq 0$ *(1,5 puntos)*

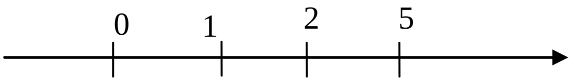
- Factorizamos y hallamos las raíces de numerador y denominador.
  - $-2x^2 + 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} =1 \\ =5 \end{array} \right.$

    Por lo que, como conocemos las dos raíces del polinomio de grado 2, aplicando el Teorema de Descomposición Factorial tenemos que:

    $\boxed{-2x^2 + 12x - 10 = -2(x-1)(x-5) \text{ y sus raíces son } 1 \text{ y } 5}$.
  - $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ó} \\ x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$ porque un producto vale cero si, y sólo si alguno de los factores se anula. Luego:

    $\boxed{x^2 - 2x = x(x-2) \text{ y sus raíces son } 0 \text{ y } 2}$.
- Inecuación simplificada:

  La inecuación se transforma en: $\dfrac{-2(x-1)(x-5)}{x(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{(x-1)(x-5)}{x(x-2)} \leq 0}$
- Cuadro de signos. Dividimos R en intervalos mediante las raíces obtenidas, una vez ordenadas, y creamos el cuadro de signos: ninguno de los factores intervinientes cambiará de signo dentro de dichos intervalos, por lo que basta tomar un punto cualquiera de cada uno de ellos para evaluar los signos (cualquier otro punto ofrecerá el mismo signo):



	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, 5)$	5	$(5, +\infty)$
$x-1$	–	...	–	0	+	...	+	...	+
$x-5$	–	...	–	...	–	...	–	0	+
x	–	0	+	...	+	...	+	...	+
$x-2$	–	...	–	...	–	0	+	...	+
$\frac{(x-1)(x-5)}{x(x-2)}$	+	$\nexists$	–	0	+	$\nexists$	–	0	+
¿Sirven? $\rightarrow$	No	No	Si	Si	No	No	Si	Si	No

Los signos de la última fila, que son los que nos interesan, los obtenemos mediante la regla de los signos con los que están en su misma columna. Los valores que anulan el denominador provocan que no se pueda completar la operación, por lo que también los descartamos. De este modo, las soluciones son todos los puntos del conjunto:

$$\boxed{[0,\,1] \cup (2,\,5]}$$

3) (En este problema sólo se obtendrán puntos por la resolución si se llega a la solución final correcta completa). Aplicando el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método ni forma), clasificar y resolver el sistema siguiente. Además, si tuviese más de una solución, decir una en la que $z = 3$: *(1,5 puntos)*

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y+2z&=4\\ -3x+5y+5z&=2\\ 7x-2y-3z&=2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4\\ -3 & 5 & 5 & 2\\ 7 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[4F_3-7F_1]{4F_2+3F_1} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4\\ 0 & 29 & 26 & 20\\ 0 & -29 & -26 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4\\ 0 & 29 & 26 & 20\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es un $\boxed{\text{sistema compatible indeterminado}}$, en el que puede eliminarse la fila 3. Reconstruimos el sistema y resolvemos. Para ello, llamamos $z = t$ (podríamos también haber elegido $y = t$, pero nos conviene dejar las soluciones en función de z porque nos piden una con un valor determinado de z):

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y&=4-2t\\ 29y&=20-26t \end{aligned}\right\}$$

2ª ec: $y = \dfrac{20-26t}{29}$

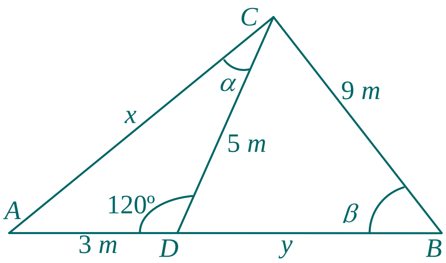
1ª ec: $4x + 3\dfrac{20-26t}{29} = 4 - 2t \Rightarrow 4x = 4-2t-\dfrac{60-78t}{29} =$

$= \dfrac{116-58t-60+78t}{29} = \dfrac{56+20t}{29} \Rightarrow x = \dfrac{14+5t}{29}$

Solución general: $\boxed{\left(\dfrac{14+5t}{29}, \dfrac{20-26t}{29}, t\right)}$

Y si $t = 3$: $\boxed{(1, -2, 3)}$

4) En el triángulo de la figura, hallar x, α, β, y. *(1,5 puntos)*



Aplicando el *Teorema del Coseno* en el triángulo *ACD*:

$$\boxed{x =}\ \sqrt{9+25-2\cdot 3\cdot 5\cos 120^{\circ}} = \sqrt{9+25+15} = \sqrt{49} = \boxed{7\ m}$$

Por otra parte, por el *Teorema de los Senos*, en el mismo triángulo:

$$\frac{7}{\text{sen}\,120^\circ} = \frac{3}{\text{sen}\,\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{3\,\text{sen}\,120^\circ}{7} = \frac{3\frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{3\sqrt{3}}{14} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 21.79^\circ = 21^\circ\,47'\,12.44''}$$

En el triángulo *BCD*, por el *Teorema de los Senos*, teniendo en cuenta que, en dicho triángulo, $D = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$:

$$\frac{9}{\text{sen}\,60^\circ} = \frac{5}{\text{sen}\,\beta} \Rightarrow \text{sen}\,\beta = \frac{5\frac{\sqrt{3}}{2}}{9} = \frac{5\sqrt{3}}{18} \Rightarrow \boxed{\beta = 28.76^\circ = 28^\circ\,45'\,32.1''}$$

De este modo, el ángulo del vértice *C* del triángulo *BCD* valdrá:

$$C = 180^\circ - (60^\circ + \beta) = 91.24^\circ$$

Y por el *Teorema de los Senos*:

$$\frac{9}{\text{sen}\,60^\circ} = \frac{y}{\text{sen}\,C} \Rightarrow \boxed{y =} \frac{9\,\text{sen}\,C}{\text{sen}\,60^\circ} = \boxed{10.39\ m}$$

5) Sabiendo que $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, siendo $x \in (0, \pi)$, hallar, *sin calculadora*: a) $\cos 2x$; b) $\text{sen}\,2x$; c) $\text{tg}\,(x + \pi/3)$. *(1,5 puntos)*

En primer lugar, como el coseno es negativo y el ángulo se encuentra en el primer o segundo cuadrante, no queda más posibilidad que estemos en el *segundo cuadrante*. Calculamos, primeramente, el seno, considerando que debe ser positivo en el cuadrante en el que se halla:

$$\text{sen}\,x = +\sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

a) $\boxed{\cos 2x =} \cos^2 x - \text{sen}^2\,x = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$

b) $\boxed{\text{sen}\,2x =} 2\,\text{sen}\,x\cos x = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

c) Se tiene que: $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{2}$

Por tanto: $\boxed{\text{tg}(x + \pi/3) =} \frac{\text{tg}\,x + \text{tg}\,\frac{\pi}{3}}{1 - \text{tg}\,x\,\text{tg}\,\frac{\pi}{3}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{6}}}$

6) Resolver la ecuación: $z^3 = 15 - 15\sqrt{3}\,i$ *(1,5 puntos)*

Despejando: $z = \sqrt[3]{15-15\sqrt{3}i}$. Para calcular una raíz de un número complejo, tenemos que tenerlo en forma polar. Convirtámoslo:

$$r = \sqrt{15^2 + \left(15\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{225+225\cdot 3} = \sqrt{4\cdot 225} = 2\cdot 15 = 30$$

tg φ = $\dfrac{15\sqrt{3}}{15} = \sqrt{3}$ ⇒ φ = 60º. Como la parte real es positiva: 15 y la imaginaria, negativa: $-15\sqrt{3}$, estamos en el 4º cuadrante ⇒ α = 300º.

Por tanto, $z = \sqrt[3]{30_{300^o}}$.

El módulo de las tres soluciones será $\sqrt[3]{30}$. Los argumentos:

$$\alpha_1 = \frac{300}{3} + \frac{360}{3}0 = 100^o$$

$$\alpha_2 = \frac{300}{3} + \frac{360}{3}1 = 220^o$$

$$\alpha_3 = \frac{300}{3} + \frac{360}{3}2 = 340^o$$

Las tres soluciones son, entonces: $\boxed{\left(\sqrt[3]{30}\right)_{100^o};\ \left(\sqrt[3]{30}\right)_{220^o};\ \left(\sqrt[3]{30}\right)_{340^o}}$

7) Hallar el período principal de la función $y = \cos\left(\dfrac{3}{2}x\right)$ *(1punto)*

f será periódica de período k si $\forall x \in \text{Dom}(f)$ se tiene que $f(x) = f(x + k)$, para cierto k que hemos de encontrar.

En nuestro caso, $f(x) = \cos\left(\dfrac{3}{2}x\right)$. Esta función se basa en una función *coseno*, que es periódica de período 2π, por lo que ∀z, cos z = cos (z + 2π). Por ello (usando $z = \dfrac{3}{2}x$): $f(x) = \cos\left(\dfrac{3}{2}x\right) = \cos\left(\dfrac{3}{2}x + 2\pi\right)$. Pues bien:

$$\begin{cases} f(x) = \cos\left(\dfrac{3}{2}x\right) = \cos\left(\dfrac{3}{2}x+2\pi\right) \\ f(x+k) = \cos\left[\dfrac{3}{2}(x+k)\right] \end{cases}$$

Para que $f(x) = f(x + k)$ se requiere, entonces, que coincidan estos dos resultados:

$$\cos\left[\frac{3}{2}(x+k)\right] = \cos\left(\frac{3}{2}x+2\pi\right) \Rightarrow \frac{3}{2}(x+k) = \frac{3}{2}x+2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}k = \frac{3}{2}x + 2\pi \Rightarrow \frac{3}{2}k = 2\pi \Rightarrow k = \frac{4\pi}{3}$$

Por lo que $\boxed{f \text{ es periódica de período } \dfrac{4\pi}{3}}$.