IES Fernando de Herrera **Curso 2015 / 16**

Segundo trimestre - Primer examen – 1º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta permanente**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Sabiendo que $\cos(x-\pi) = -\dfrac{1}{6}$, siendo $x \in (\pi, 2\pi)$, se pide:

   a) Hallar, sin calculadora: $\operatorname{sen} 2x$; $\cos 2x$; $\cos(x + \pi/3)$ *(1,5 puntos)*

   b) Con la calculadora, decir el valor de x en grados, minutos, segundos. *(0,5 p)*

2) Obtener todos los valores de $x \in [0, 360^\circ)$ que verifican la ecuación: *(2 puntos)*

$$\operatorname{sen} 2x = 4 \operatorname{sen}^2 x \cos x$$

3) Demostrar que $\dfrac{\operatorname{sen} 5a + \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} 3a - \operatorname{sen} a} = 3\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$ *(2 puntos)*

4) Hallar los ángulos de cualquier triángulo cuyos lados midan $a = 24$ cm, $b = 28$ cm, $c = 36$ cm. *(2 puntos)*

5) Desde el punto de mira de un teodolito (altura 1,50 m) situado en una calle, vemos la parte más alta de una torre con un ángulo de 30º. Si avanzamos 140 m hacia la torre, la observamos con un ángulo de 60º. ¿Cuál es la altura de la torre? *(2 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sabiendo que $\cos(x-\pi) = -\dfrac{1}{6}$, siendo $x \in (\pi, 2\pi)$, se pide:

a) Hallar, sin calculadora: sen $2x$; cos $2x$; cos $(x + \pi/3)$ *(1,5 puntos)*

$$\cos(x-\pi) = \cos x \cos\pi + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\pi = (\cos x)(-1) + (\operatorname{sen} x)0 = -\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cos x = -\frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{\cos x = \frac{1}{6}}$$

Siendo $x \in (\pi, 2\pi)$ y su coseno positivo $\Rightarrow$ x está en el cuarto cuadrante. Por tanto:

$$\boxed{\operatorname{sen} x =} -\sqrt{1-\cos^2 x} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{1}{36}} = -\sqrt{\frac{35}{36}} = \boxed{-\frac{\sqrt{35}}{6}}$$

Por tanto:

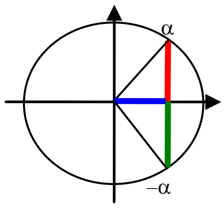
$$\boxed{\operatorname{sen} 2x =} 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2\left(-\frac{\sqrt{35}}{6}\right)\frac{1}{6} = -\frac{\sqrt{35}}{3}\frac{1}{6} = \boxed{-\frac{\sqrt{35}}{18}}$$

$$\boxed{\cos 2x =} \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{36} - \frac{35}{36} = -\frac{34}{36} = \boxed{-\frac{17}{18}}$$

$$\boxed{\cos(x+\pi/3) =} \cos x \cos\pi/3 - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\pi/3 = \frac{1}{6}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{35}}{6}\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{1+\sqrt{105}}{12}}$$

b) Con la calculadora, decir el valor de x en grados, minutos, segundos. *(0,5 p)*

Pulsando $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{(}$ 1 $\boxed{\div}$ 6 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ se obtiene: 80,406º. Pero como x está en el cuarto cuadrante, el ángulo será 360º – 80,406º = 279,594º = $\boxed{279º\ 35'\ 38{,}6''}$.



2) Obtener todos los valores de $x \in [0, 360º)$ que verifican la ecuación: *(2 puntos)*

$$\operatorname{sen} 2x = 4 \operatorname{sen}^2 x \cos x$$

$$\operatorname{sen} 2x = 4\operatorname{sen}^2 x \cos x \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x = 4 \operatorname{sen}^2 x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = 4\operatorname{sen}^2 x \cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x (2 \operatorname{sen} x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = 0º \text{ ó } x = 180º \\ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = 90º \text{ ó } x = 270º \\ 2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 30º \text{ ó } x = 150º \end{cases}$$

Luego todas las soluciones son:

$$\boxed{0º;\ 30º;\ 90º;\ 150º;\ 180º;\ 270º}$$

3) Demostrar que $\dfrac{\operatorname{sen} 5a + \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} 3a - \operatorname{sen} a} = 3\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$ *(2 puntos)*

Transformando sumas en productos en numerador y denominador:

$$\boxed{\frac{\text{sen } 5a + \text{sen } a}{\text{sen } 3a - \text{sen } a}} = \frac{2\,\text{sen}\frac{5a+a}{2}\cos\frac{5a-a}{2}}{2\cos\frac{3a+a}{2}\,\text{sen}\frac{3a-a}{2}} = \frac{\text{sen } 3a\ \cos 2a}{\cos 2a\ \text{sen } a} = \frac{\text{sen } 3a}{\text{sen } a} =$$

$$= \frac{\text{sen }(2a+a)}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } 2a\ \cos a + \cos 2a\ \text{sen } a}{\text{sen } a} =$$

$$= \frac{2\text{sen } a\ \cos a\ \cos a + (\cos^2 a - \text{sen}^2 a)\,\text{sen } a}{\text{sen } a} =$$

$$= \frac{2\text{sen } a\ \cos^2 a + \cos^2 a\ \text{sen } a - \text{sen}^3 a}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } a\,(2\cos^2 a + \cos^2 a - \text{sen}^2 a)}{\text{sen } a} =$$

$$\boxed{= 3\cos^2 a - \text{sen}^2 a}$$

4) Hallar los ángulos de cualquier triángulo cuyos lados midan a = 24 cm, b = 28 cm, c = 36 cm. *(2 puntos)*

Hemos de abordar el problema con el *Teorema del coseno*. De modo que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{28^2+36^2-24^2}{2\cdot 28\cdot 36} \Rightarrow$$

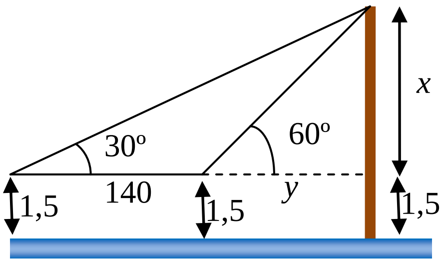
$$\Rightarrow \boxed{A = 41{,}75^\circ = 41^\circ\ 45'\ 7{,}94''}$$

Para hallar B podríamos emplear el *Teorema del Seno*, pero éste nos va a producir dos resultados y, como también podemos emplear el *Teorema del Coseno* que nos da un único resultado, sólo uno de los dos que proporciona el *Teorema del Seno* será válido, y tendremos que dilucidar cuál es. Para evitarnos dicho trabajo, usamos directamente el *Teorema del Coseno*:

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{24^2+36^2-28^2}{2\cdot 24\cdot 36} \Rightarrow \boxed{B = 50{,}98^\circ = 50^\circ\ 58'\ 37{,}91''}$$

Por último: $\boxed{C =}\ 180^\circ - A - B\ \boxed{= 87{,}27^\circ = 87^\circ\ 16'\ 14{,}15''}$

5) Desde el punto de mira de un teodolito (altura 1,50 m) situado en una calle, vemos la parte más alta de una torre con un ángulo de 30º. Si avanzamos 140 m hacia la torre, la observamos con un ángulo de 60º. ¿Cuál es la altura de la torre? *(2 puntos)*



En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x e y, deducimos:

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y \text{ tg } 60^\circ \qquad (1)$$

En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x y $140 + y$, se tiene:

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{x}{140+y} \Rightarrow x = (140 + y) \text{ tg } 30^\circ$$

Igualando:

$$y \text{ tg } 60^\circ = (140 + y) \text{ tg } 30^\circ = 140 \text{ tg } 30^\circ + y \text{ tg } 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \text{ tg } 60^\circ - y \text{ tg } 30^\circ = 140 \text{ tg } 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(\text{tg } 60^\circ - \text{tg } 30^\circ) = 140 \text{ tg } 30^\circ \Rightarrow y = \frac{140 \text{ tg } 30^\circ}{\text{tg } 60^\circ - \text{tg } 30^\circ} = 70$$

Sustituyendo en (1): $x = 70 \text{ tg } 60^\circ = 121{,}24\ m$. Como hay que sumarle la altura del aparato de observación, la altura final de la torre es: $121{,}24 + 1{,}5 = \boxed{122.74\ m}$

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta permanente**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Sabiendo que $\cos(\pi - x) = \frac{1}{6}$, siendo $x \in (0, \pi)$, se pide (sin calculadora):

   a) $\operatorname{tg} x$ *(0,5 puntos)*
   b) $\cos 2x$ *(0,5 puntos)*
   c) $\cos(x + \pi/6)$ *(0,5 puntos)*
   d) Valor de x en grados (con calculadora) *(0,5 puntos)*

2) Resolver la ecuación: $4\cos 2x + 3\cos x = 1$ *(1,5 puntos)*

3) Hallar los ángulos y lados de cualquier triángulo tal que sus lados miden $a = 9$ cm, $b = 8$ cm y $A = 30º$. *(1,5 puntos)*

4) Hallar el área del triángulo delimitado por $A(-4, -1)$, $B(5, 2)$ y $C(1, 6)$. *(1,5 ptos)*

5) Hallar el simétrico de $A(-4, -1)$ respecto de $r \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 13 + 5t \end{cases}$ *(1,5 puntos)*

6) Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$ y tangente a la recta $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 13 + 5t \end{cases}$ *(1,5 puntos)*

7) Dada la recta $r \equiv 2x - 3y + 13 = 0$ y el punto $A(-4, -1)$, hallar la paralela a r que pase por A. *(0,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sabiendo que $\cos(\pi - x) = \frac{1}{6}$, siendo $x \in (0, \pi)$, se pide (sin calculadora):

a) $\operatorname{tg} x$ *(0,5 puntos)*

$$\cos(\pi - x) = \cos\pi \cos x + \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen} x = -\cos x + 0\cdot\operatorname{sen} x = -\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cos x = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{\cos x = -\frac{1}{6}}$$

Y como $\cos x < 0$ y $x \in (0, \pi) \Rightarrow$ <u>x está en el II cuadrante</u>. Por otra parte:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} x =} -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = -\sqrt{\frac{1}{1/36} - 1} = -\sqrt{36 - 1} = \boxed{-\sqrt{35}}$$

b) $\cos 2x$ *(0,5 puntos)*

$$\text{Si } \cos x = -\frac{1}{6} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{35}{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

Por tanto:

$$\boxed{\cos 2x =} \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{36} - \frac{35}{36} = -\frac{34}{36} = \boxed{-\frac{17}{18}}$$

c) $\cos(x + \pi/6)$ *(0,5 puntos)*

$$\boxed{\cos(x + \pi/6) =} \cos x \cos\pi/6 - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\pi/6 = \frac{-1}{6}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{35}}{6}\frac{1}{2} = \boxed{-\frac{\sqrt{3} + \sqrt{35}}{12}}$$

d) Valor de x en grados (con calculadora) *(0,5 puntos)*

Como $\cos x = -\frac{1}{6}$, utilizando la tecla $\cos^{-1}$ de la calculadora, obtenemos: $\boxed{x = 99{,}59^\circ}$.

2) Resolver la ecuación: $4\cos 2x + 3\cos x = 1$ *(1,5 puntos)*

$$4\cos 2x + 3\cos x = 1 \Rightarrow 4(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 3\cos x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x - 4\operatorname{sen}^2 x + 3\cos x - 1 = 0 \Rightarrow$$

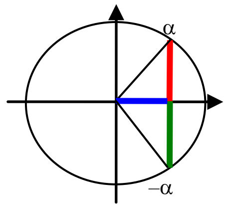
$$\Rightarrow 4\cos^2 x - 4(1 - \cos^2 x) + 3\cos x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x - 4 + 4\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0 \Rightarrow 8\cos^2 x + 3\cos x - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \left\langle \begin{array}{l} = -1 \\ = \frac{5}{8} \end{array} \right.$$

- $\cos x = -1 \Rightarrow \boxed{x = 180^\circ + 360^\circ k,\ k \in \mathbb{Z}}$
- $\cos x = \frac{5}{8} \Rightarrow \boxed{x = 51{,}32^\circ + 360^\circ k}$ ó $\boxed{x = 308{,}68^\circ + 360^\circ k,\ k \in \mathbb{Z}}$

Simplemente, hemos desarrollado la expresión de la ecuación original hasta encontrar otra donde sólo aparece una única razón trigonométrica (coseno) de un sólo ángulo (x). Llegados hasta aquí, podríamos haber efectuado el *cambio de incógnita* $t = \cos x$ y resolver la ecuación de segundo grado en t que resultaría, pero hemos optado por resolverla directamente, para no tener que deshacer dicho *cambio*. En la segunda posibilidad (cos x = 5/8), hay dos ángulos que la proporcionan en la primera vuelta: uno del primer cuadrante y su correspondiente del cuarto, en el que coseno es positivo, también. La calculadora nos da el del primer cuadrante, pero el del cuarto hemos de obtenerlo manualmente: 360º – 51,32º (que es, también, –51,32º: ver figura).



3) Hallar los ángulos y lados de cualquier triángulo tal que sus lados miden a = 9 cm, b = 8 cm y A = 30º. *(1,5 puntos)*

Tenemos que comenzar con el *Teorema del Seno*, que proporciona dos soluciones para el ángulo buscado:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{8 \text{ sen } 30^\circ}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 26{,}39^\circ} \text{ ó } B = 180^\circ - 26{,}39^\circ = 153{,}61^\circ.$$

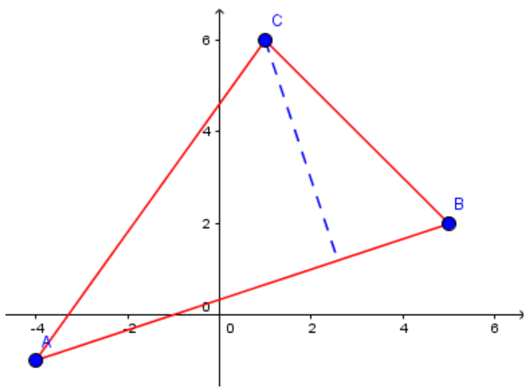
La segunda opción no es válida, porque $A + B > 180º$.

$$\boxed{C =} \ 180^\circ - A - B = 180^\circ - 30^\circ - 26{,}39^\circ = \boxed{123{,}61^\circ}$$

Empleado de nuevo el *Teorema del Seno*:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow \boxed{c =} \ \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A} = \frac{9 \text{ sen } 123{,}61^\circ}{\text{sen } 30^\circ} = \boxed{14.99 \text{ cm}}$$

4) Hallar el área del triángulo delimitado por $A(-4, -1)$, $B(5, 2)$ y $C(1, 6)$. *(1,5 ptos)*



- Recta r que pasa por AB:

$$\frac{x+4}{5+4} = \frac{y+1}{2+1} \Rightarrow 3x + 12 = 9y + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 9y + 3 = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 1 = 0 \equiv r$$

- Distancia de C a la recta r:

$$d(C, r) = \frac{|1 - 3 \cdot 6 + 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{16}{\sqrt{10}} \ u$$

Si nos fijamos en el gráfico, este resultado es lo que mide la altura sobre la base AB. Y la longitud de dicha base es:

$$d(A, B) = \sqrt{(5+4)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \ u$$

Por tanto, el área del triángulo es:

$$\boxed{S =} \ \frac{bh}{2} = \frac{3\sqrt{10}\,\frac{16}{\sqrt{10}}}{2} = 3 \cdot 8 = \boxed{24 \ u^2}$$

u se refiere a *unidades de longitud*. Dicha unidad es en la que se miden los ejes de coordenadas.

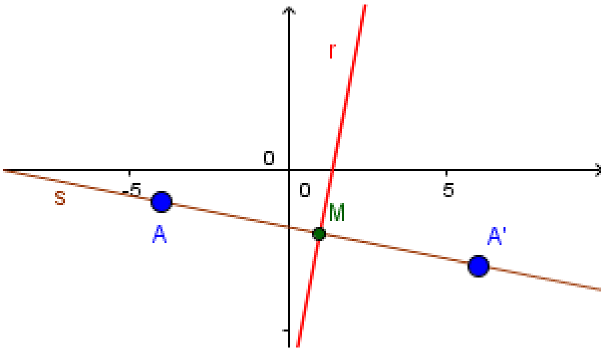
5) Hallar el simétrico de $A(-4, -1)$ respecto de $r \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 13 + 5t \end{cases}$ *(1,5 puntos)*

Pasamos r a forma general. Despejamos t e igualamos, y tendremos la ecuación en forma continua, de donde partimos:

$$x - 4 = \frac{y - 13}{5} \Rightarrow 5x - 20 = y - 13 \Rightarrow 5x - y - 20 + 13 = 0 \Rightarrow \boxed{5x - y - 7 = 0 \equiv r}$$

Hallamos la perpendicular s a esta recta que pasa por A. El vector normal de r, que es (5, –1), será vector de dirección de la perpendicular s. Por tanto, s es:

$$\frac{x+4}{5} = \frac{y+1}{-1} \Rightarrow x + 4 = -5y - 5 \Rightarrow \boxed{x + 5y + 9 = 0 \equiv s}$$



Calculamos el punto M intersección de estas dos rectas:

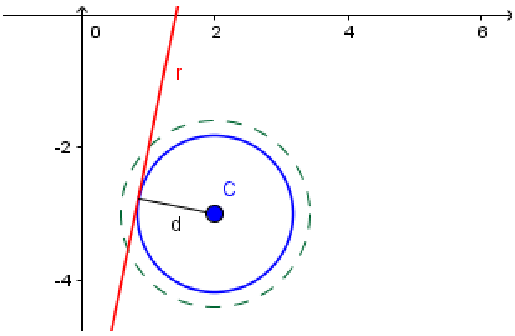
$$\begin{cases} 5x - y = 7 \\ x + 5y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x - 5y = 35 \\ \quad x + 5y = -9 \\ \hline 26x \qquad = 26 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \qquad \text{Sust. en } r\text{: } y = 5 - 7 = -2$$

Luego $\boxed{M(1, -2)}$.

M es el punto medio entre $A(-4, -1)$ y su simétrico $A'(a, b)$. Por tanto, teniendo en cuenta cómo se calcula el punto medio de un segmento:

$$\begin{cases} \dfrac{-4+a}{2} = 1 \Rightarrow -4 + a = 2 \Rightarrow a = 6 \\ \dfrac{-1+b}{2} = -2 \Rightarrow -1 + b = -4 \Rightarrow b = -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A'(6, -3)}$$

6) Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$ y tangente a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 13 + 5t \end{cases}$ *(1,5 puntos)*



Hallamos el centro de la circunferencia que nos dan (en discontinuo en el gráfico):

$$a = \frac{-D}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad b = \frac{-E}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow \boxed{C(2, -3)}$$

Éste será el centro, también, de la circunferencia pedida (en azul continuo, en el gráfico), puesto que son concéntricas (tienen el mismo centro). El radio (d en el gráfico) será la distancia de este punto a la recta $r \equiv 5x - y - 7 = 0$ (ver problema anterior), puesto que dicha recta es tangente:

$$d = \text{d}(C, r) = \frac{|5 \cdot 2 - 1(-3) - 7|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{26}}$$

Por tanto, la circunferencia es:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{36}{26} \Leftrightarrow \boxed{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{18}{13}}$$

7) Dada la recta $r \equiv 2x - 3y + 13 = 0$ y el punto $A(-4, -1)$, hallar la paralela a r que pase por A. *(0,5 puntos)*

Tienen el mismo vector normal. Luego es:

$$2(x + 4) - 3(y + 1) = 0 \Rightarrow 2x + 8 - 3y - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{2x - 3y + 5 = 0}$$

IES Fernando de Herrera **Curso 2015 / 16**
Segundo trimestre - Prueba de observación continua – 1º Bach CT
Recuperación y subida de nota de la 2ª evaluación
NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta permanente**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Sabiendo que $90º < \alpha < 360º$ y que $\operatorname{tg} \alpha = 1/3$, calcular: *(1 + 0,5 + 0,5 puntos)*
   a) El resto de razones trigonométricas de α, sin usar la calculadora.
   b) El valor de $\operatorname{sen} 2\alpha$, sin calculadora.
   c) El valor de α en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora.

2) Resolver un triángulo, del que conocemos $a = 4\ m$, $b = 7\ m$ y $A = 30º$. *(1,5 ptos)*

3) Resolver la ecuación: $\operatorname{tg} x \sec x = 2 \operatorname{tg} x$ *(1,5 puntos)*

4) Hallar el área del triángulo delimitado por $A(–4, 1)$, $B(5, 2)$ y $C(1, 6)$, tomando como base el segmento AB y calculando la longitud de la base y la de la altura sobre dicho segmento. *(1,5 ptos)*

5) Hallar el simétrico de $A(4, –1)$ respecto de $r \equiv \begin{cases} x = \quad -t \\ y = -7 + 5t \end{cases}$ *(1,5 puntos)*

6) Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con $x^2 + y^2 – 4x + 6y + 9 = 0$ y tangente a la recta $3x + 4y + 11 = 0$ *(1,5 puntos)*

7) Dada la recta $r \equiv 2x – 3y + 13 = 0$ y el punto $A(–4, 1)$, hallar la paralela a r que pase por A. *(0,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sabiendo que $90^\circ < \alpha < 360^\circ$ y que $\operatorname{tg}\alpha = 1/3$, calcular:

a) El resto de razones trigonométricas de α, sin usar la calculadora. *(1 pto)*

Si $\alpha > 90^\circ$ y $\operatorname{tg}\alpha > 0 \Rightarrow \alpha$ está en el tercer cuadrante. Pues bien:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+\frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha =} -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \boxed{-\frac{3\sqrt{10}}{10}}$$

donde el signo – se debe a que estamos en el tercer cuadrante.
Por otra parte:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{-\frac{3}{\sqrt{10}}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\alpha =} -\frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = \boxed{-\frac{\sqrt{10}}{10}}$$

Las otras tres razones son:

$$\boxed{\operatorname{cosec}\alpha =} \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{10}}} = \boxed{-\sqrt{10}};\ \boxed{\sec\alpha =} \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{\sqrt{10}}} = \boxed{-\frac{\sqrt{10}}{3}}$$

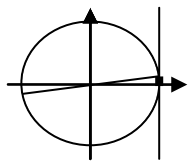
$$\boxed{\operatorname{cotg}\alpha =} \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = \boxed{3}$$

b) El valor de $\operatorname{sen} 2\alpha$, sin calculadora. *(0,5 puntos)*

$$\boxed{\operatorname{sen} 2\alpha =} 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2\frac{-\sqrt{10}}{10}\frac{-3\sqrt{10}}{10} = 6\frac{10}{10^2} = \frac{6}{10} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

c) El valor de α en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora. *(0,5 puntos)*

Por último, como $\operatorname{tg}\alpha = 1/3$, con la calculadora obtenemos que: $\alpha = 18{,}43^\circ$. Trasladándolo al tercer cuadrante: $\boxed{\alpha =}$ $180^\circ + 18{,}43^\circ = 198{,}43^\circ =$ $\boxed{198^\circ\ 26'\ 5{,}8''}$ (Ver figura).



2) Resolver un triángulo, del que conocemos $a = 4\ m$, $b = 7\ m$ y $A = 30^\circ$. *(1,5 ptos)*

Como conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, usamos el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \operatorname{sen} B = \frac{b\operatorname{sen} A}{a} = \frac{7\operatorname{sen} 30}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow B = 61{,}04^\circ$ ó $B = 180^\circ - 61{,}04^\circ = 118{,}96^\circ$.

- Si $B = 61{,}04^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - 61{,}04^\circ - 30^\circ = 88{,}96^\circ$. Y además:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow c = \frac{a\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{4\operatorname{sen} 88{,}96^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 8{,}00\ m$$

- Si $B = 118{,}96^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - 118{,}96^\circ - 30^\circ = 31{,}04^\circ$. De modo que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow c = \frac{a\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{4\operatorname{sen} 31{,}04^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 4{,}13\ m$$

3) Resolver la ecuación: $\operatorname{tg} x \ \sec x = 2 \operatorname{tg} x$ *(1,5 puntos)*

$$\operatorname{tg} x \ \sec x = 2 \operatorname{tg} x \ \Rightarrow\ \operatorname{tg} x \ \sec x - 2 \operatorname{tg} x = 0 \ \Rightarrow\ (\operatorname{tg} x)(\sec x - 2) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \ \text{ ó} \\ \sec x - 2 = 0 \end{cases}$$

- $\operatorname{tg} x = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{x = 0^\circ + 180^\circ k,\ \forall k \in \mathbb{Z}}$
- $\sec x - 2 = 0 \ \Rightarrow\ \sec x = 2 \ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\cos x} = 2 \ \Rightarrow\ \cos x = \dfrac{1}{2} \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 60^\circ + 360^\circ k,\ \forall k \in \mathbb{Z}} \\ \quad \text{ó} \\ \boxed{x = 300^\circ + 360^\circ k,\ \forall k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

4) Hallar el área del triángulo delimitado por $A(-4, 1)$, $B(5, 2)$ y $C(1, 6)$, tomando como base el segmento AB y calculando la longitud de la base y la de la altura sobre dicho segmento. *(1,5 ptos)*

La base debe ser la longitud del segmento AB, esto es:

$$\boxed{b = d(A, B) =} \ \sqrt{(5+4)^2 + (2-1)^2} \ = \ \sqrt{81+1} \ = \boxed{\sqrt{82} \ \ u}$$

Para calcular la altura sobre esta base, hallamos la ecuación de la recta que pasa por A y B, usando la forma *continua*:

$$\frac{x+4}{5+4} = \frac{y-1}{2-1} \ \Leftrightarrow\ x + 4 = 9(y-1) \ \Leftrightarrow\ x + 4 = 9y - 9 \ \Leftrightarrow\ x - 9y + 4 + 9 = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x - 9y + 13 = 0 \ \equiv r}$$

La altura será la distancia de C a esta recta:

$$\boxed{h = d(C, r) =} \ \frac{|1 - 9\cdot 6 + 13|}{\sqrt{1^2 + (-9)^2}} = \boxed{\frac{40}{\sqrt{82}} \ \ u}$$

Por tanto, el área del triángulo será:

$$\boxed{S =} \ \frac{bh}{2} = \frac{\sqrt{82}\,\dfrac{40}{\sqrt{82}}}{2} = \boxed{20 \ \ u^2}$$

El área de un triángulo se pude calcular, de otra forma, usando la *fórmula de Herón*:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo, y s el *semiperímetro*, es decir: $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. En este problema no nos permiten hacerlo más que de la forma anterior, pero por la fórmula citada sería como sigue. Calculamos las longitudes de los tres lados del triángulo:

$a = \sqrt{82}$ (calculada antes)

$b = d(A, C) = \sqrt{(1+4)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$

$c = d(B, C) = \sqrt{(1-5)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

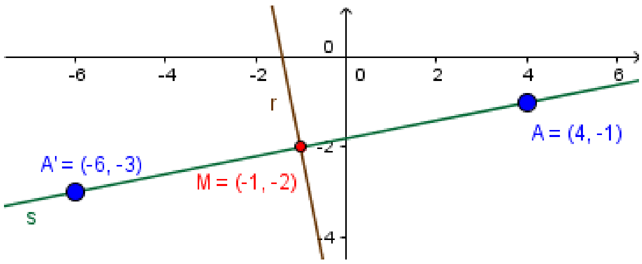
Por tanto, usando la calculadora (se pueden introducir a, b, c en las memorias A, B, C respectivamente, usando *Shift* + *STO* + *memoria*, sumarlas y dividirlas entre 2 y guardar el resultado en D, y calcular $\sqrt{D(D-A)(D-B)(D-C)}$):

$$s = \frac{\sqrt{82}+9\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 20\ u^2$$

5) Hallar el simétrico de $A(4, -1)$ respecto de $r \equiv \begin{cases} x = -t \\ y = -7+5t \end{cases}$ *(1,5 puntos)*

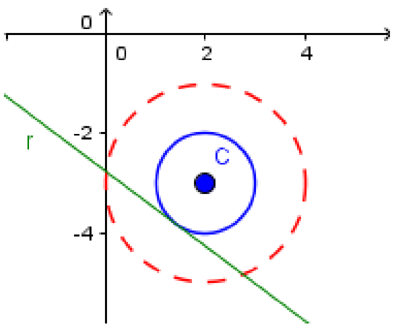
- Comenzamos por poner r en forma *general*. Como $(-1, 5)$ es su vector de dirección y $(0, 7)$ es un punto:
$$\frac{x}{-1} = \frac{y+7}{5} \Leftrightarrow 5x = -y - 7 \Leftrightarrow \boxed{5x + y + 7 = 0 \equiv r}$$
- Calculamos su perpendicular s por $A(4, -1)$. El vector normal de r, que es $(5, 1)$, será de dirección de s:
$$\frac{x-4}{5} = \frac{y+1}{1} \Leftrightarrow x - 4 = 5y + 5 \Leftrightarrow \boxed{x - 5y - 9 = 0 \equiv s}$$
- Hallamos el punto M intersección de ambas rectas:
$$\left.\begin{array}{r} 5x+y=-7 \\ x-5y=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 25x+5y=-35 \\ x-5y=9 \end{array}\right\} \Rightarrow (1^a\text{ ec}): -5 + y = -7 \Rightarrow y = -2$$
$$26x = -26 \Rightarrow x = -1$$
Por lo que $\boxed{M(-1, -2)}$.

- Finalmente, el simétrico $A'(a, b)$ respecto de r del punto $A(4, -1)$ es el mismo que el simétrico de A respecto de $M(-1, -2)$. Y, dado que M es el punto medio del segmento AA':
$$\begin{cases} \dfrac{4+a}{2} = -1 \Rightarrow 4+a=-2 \Rightarrow a=-6 \\ \dfrac{-1+b}{2} = -2 \Rightarrow -1+b=-4 \Rightarrow b=-3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A'(-6, -3)}.$$



6) Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$ y tangente a la recta $3x + 4y + 11 = 0$ *(1,5 puntos)*

Hallamos el centro de la circunferencia que nos dan (en discontinuo en el gráfico):
$$a = \frac{-D}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad b = \frac{-E}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow \boxed{C(2, -3)}$$
Éste será el centro, también, de la circunferencia pedida (en azul continuo, en el gráfico), puesto que son concéntricas (tienen el mismo centro). El radio (d en el gráfico) será la distancia de este punto a la recta $r \equiv 3x + 4y + 11 = 0$ (ver problema anterior), puesto que dicha recta es tangente:



$$d = \mathrm{d}(C, r) = \frac{|3 \cdot 2 + 4(-3) + 11|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1$$

Por tanto, la circunferencia es:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1^2 \Leftrightarrow \boxed{(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1}$$

7) Dada la recta $r \equiv 2x - 3y + 13 = 0$ y el punto $A(-4, 1)$, hallar la paralela a r que pase por A. *(0,5 puntos)*

Dos rectas paralelas tienen el mismo *vector de dirección* y, también, el mismo *vector normal*. Usando éste último, la paralela es:

$$2(x+4) - 3(y-1) = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 8 + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{2x - 3y + 11 = 0}$$

IES Fernando de Herrera **Curso 2015 / 16**

Segundo trimestre - Prueba de observación continua – 1º Bach CT

Subida de nota de las evaluaciones 1ª y 2ª

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta permanente**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Clasificar y resolver el siguiente sistema, aplicando el método de Gauss en su forma matricial. Si tuviese más de una solución, escribir dos soluciones concretas:

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y+2z&=4\\ -3x+2y+5z&=8\\ -5x+9y+17z&=28 \end{aligned}\right\}$$ *(1,5 puntos)*

2) Resolver la ecuación: $\dfrac{x-3}{x^2-x-2}-\dfrac{2}{2x+2}=\dfrac{4}{x+1}$ *(1,5 puntos)*

3) Resolver el sistema: $\left.\begin{aligned} \log x^2+3\log y&=5\\ \log\frac{y^3}{x^4}&=-1 \end{aligned}\right\}$ *(1,5 puntos)*

4) Sabiendo que $90º < \alpha < 360º$ y que $\operatorname{tg}\alpha = 1/3$, calcular: *(1 + 0,5 + 0,5 puntos)*
   a) El resto de razones trigonométricas de α, sin usar la calculadora.
   b) El valor de $\operatorname{sen} 2\alpha$, sin calculadora.
   c) El valor de α en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora.

5) Hallar el simétrico de $A(4, -1)$ respecto de $r \equiv \begin{cases} x=-t\\ y=-7+5t \end{cases}$ *(1,5 puntos)*

6) Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$ y tangente a la recta $3x + 4y + 11 = 0$ *(1,5 puntos)*

7) Dada la recta $r \equiv 2x - 3y + 13 = 0$ y el punto $A(-4, 1)$, hallar la paralela a r que pase por A. *(0,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Clasificar y resolver el siguiente sistema, aplicando el método de Gauss en su forma matricial. Si tuviese más de una solución, escribir dos soluciones concretas:

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y+\ \ 2z&=\ \ 4\\ -3x+2y+\ \ 5z&=\ \ 8\\ -5x+9y+17z&=28\end{aligned}\right\}$$ *(1,5 puntos)*

Escribimos la matriz ampliada y aplicamos las transformaciones lineales de filas que indicamos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4\\ -3 & 2 & 5 & 8\\ -5 & 9 & 17 & 28\end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{3F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4\\ -17 & 0 & 11 & 16\\ -17 & 0 & 11 & 16\end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4\\ -17 & 0 & 11 & 16\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Como tenemos *triangularizada* la matriz y podemos eliminar la F_3 por ser toda de 0, nos quedan menos ecuaciones (2) que incógnitas (3), por lo que estamos ante un **sistema compatible indeterminado**. Lo reconstruimos:

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y+2z&=4\\ -17x\qquad +11z&=16\end{aligned}\right\}$$

Llamamos $z = t$, siendo t un número arbitrario (ya no es incógnita), y lo pasamos al segundo miembro (también podríamos haber llamado $x = t$, pero no deberíamos hacerlo con y, porque perderíamos la triangularización):

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y&=4-2t\\ -17x\qquad &=16-11t\end{aligned}\right\} \Rightarrow (2^{a}\text{ ec.}):\ x=\frac{16-11t}{-17}=\frac{-16+11t}{17}$$

Nunca debe dejarse, en una expresión final, un denominador negativo, por lo que hemos multiplicado numerador y denominador por –1 para evitarlo (al hacerlo, la expresión que tenemos tiene el mismo valor, pues –1/(–1) =1). Sustituimos en la 1ª ec:

$$4\frac{-16+11t}{17}+3y=4-2t \Rightarrow 4(-16+11t)+51y=68-34t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -64+44t+51y=68-34t \Rightarrow 51t=68+64-34t-44t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{132-78t}{51}=\frac{44-26t}{17}$$

Así, la estructura general de las soluciones es: $\boxed{\left(\frac{-16+11t}{17},\frac{44-26t}{17},t\right)}$.

Obtendremos dos soluciones concretas dando valores arbitrarios a t. Por ejemplo:

- $t = 3$: (1, –2, 3)
- $t = 0$: (–16/17, 44/17, 0)

2) Resolver la ecuación: $\dfrac{x-3}{x^2-x-2}-\dfrac{2}{2x+2}=\dfrac{4}{x+1}$ *(1,5 puntos)*

Como $x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}=\left\langle\begin{matrix}=-1\\=2\end{matrix}\right. \Rightarrow x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

Y $2x + 2 = 2(x + 1)$, se tiene:

$$\frac{x-3}{x^2-x-2}-\frac{2}{2x+2}=\frac{4}{x+1} \Rightarrow \frac{x-3}{(x+1)(x-2)}-\frac{2}{2(x+1)}=\frac{4}{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{(x+1)(x-2)}-\frac{1}{x+1}-\frac{4}{x+1}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{(x+1)(x-2)}-\frac{x-2}{(x+1)(x-2)}-\frac{4(x-2)}{(x+1)(x-2)}=0 \Rightarrow \frac{x-3-(x-2)-4(x-2)}{(x+1)(x-2)}=0$$

Un cociente vale 0 si, y sólo si se anula el numerador pero no el denominador. Así que igualamos el numerador a cero, resolvemos la ecuación resultante y comprobamos que las soluciones son válidas porque no coinciden ni con -1 ni con 2, que son los valores que hacen cero el denominador:

$$x-3-x+2-4x+8=0 \Rightarrow -4x+7=0 \Rightarrow \boxed{x=7/4}.$$

Que es válida, porque no anula ningún denominador de la ecuación inicial.

3) Resolver el sistema: $\left.\begin{array}{r}\log x^2+3\log y=5\\ \log\dfrac{y^3}{x^4}=-1\end{array}\right\}$ *(1,5 puntos)*

Si fuera posible *no* quitar logaritmos, las ecuaciones serían más sencillas. Vamos a intentarlo:

$$\left.\begin{array}{r}\log x^2+3\log y=5\\ \log\dfrac{y^3}{x^4}=-1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}2\log x+3\log y=5\\ \log y^3-\log x^4=-1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}2\log x+3\log y=5\\ -4\log x+3\log y=-1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}2\log x+3\log y=5\\ \underline{4\log x-3\log y=1}\\ 6\log x= \qquad 6\end{array}\right\} \Rightarrow \log x=1$$

Sustituyendo en la primera ecuación, en esta última forma del sistema:

$$2\cdot 1+3\log y=5 \Rightarrow 3\log y=3 \Rightarrow \log y=1$$

- $\log x=1 \Rightarrow x=10^1=10$
- $\log y=1 \Rightarrow y=10^1=10$

La solución del sistema es, pues: $\boxed{x=10 \text{ con } y=10}$. Válida, pues ni anula ni hace negativo ningún argumento de logaritmo en las ecuaciones originales.

4) Sabiendo que $90^\circ < \alpha < 360^\circ$ y que $\text{tg}\ \alpha = 1/3$, calcular: *(1 + 0,5 + 0,5 puntos)*

a) El resto de razones trigonométricas de α, sin usar la calculadora.

b) El valor de $\text{sen}\ 2\alpha$, sin calculadora.

c) El valor de α en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora.

(Resuelto en la prueba anterior)

5) Hallar el simétrico de $A(4, -1)$ respecto de $r \equiv \left\{\begin{array}{l}x=\quad -t\\ y=-7+5t\end{array}\right.$ *(1,5 puntos)*

(Resuelto en la prueba anterior)

6) Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con $x^2+y^2-4x+6y+9=0$ y tangente a la recta $3x+4y+11=0$ *(1,5 puntos)*

(Resuelto en la prueba anterior)

7) Dada la recta $r \equiv 2x-3y+13=0$ y el punto $A(-4, 1)$, hallar la paralela a r que pase por A. *(0,5 puntos)*

(Resuelto en la prueba anterior)