IES Fernando de Herrera **Curso 2017 / 18**

Segundo trimestre – Observación evaluable escrita nº 1 – 1º Bach C-T

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Resolver un triángulo del que conocemos $b = 7$ cm, $c = 4$ cm y $A = 40º$. *(2 ptos)*

2) Encontrar todas las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 2x \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$. *(2 ptos)*

3) Encontrar todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $x^3 + 27 = 0$, dando los resultados en forma binómica *exacta*. *(1,5 puntos)*

4) Pasar a forma polar el complejo $z = -1 - \sqrt{3}\, i$ *(1 punto)*

5) Calcular las coordenadas de los puntos que dividen el segmento PQ en tres partes iguales, siendo $P(-3, 1)$ y $Q(3, 10)$. *(1 punto)*

6) Hallar el punto simétrico de $Q(3, 8)$ respecto de $M(-1, 5)$. *(1 punto)*

7) Dados los puntos $A(2, 1)$, $B(3, -1)$ y $C(1, -2)$, calcular el ángulo del vértice B del triángulo ABC y deducir qué tipo de triángulo es. *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Resolver un triángulo del que conocemos $b = 7$ cm, $c = 4$ cm y $A = 40º$. *(2 ptos)*
Como conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ambos, aplicamos el *Teorema del Coseno*:

$$\boxed{a =} \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A} = \sqrt{49 + 16 - 2 \cdot 7 \cdot 4\cos 40º} \approx \boxed{4{,}70 \text{ cm}}$$

Recalcar que hay que explicitar las unidades y que, para cálculos ulteriores, no usaremos la aproximación que hemos dado, sino que almacenaremos este resultado en una memoria de la calculadora (por ejemplo, *SHIFT*, *STO*, *A*) para usar *todos* los decimales que utiliza ésta, incluidos los que no nos muestra.
Ahora, para calcular el ángulo B podemos usar tanto el *Teorema del Seno* como el del *Coseno*. Pero considerando que con el primero de ellos obtendremos 2 resultados (el que proporciona la calculadora y 180º menos tal valor), y que sólo detectaríamos la invalidez de uno de ellos si sumándolos al ángulo conocido $A = 40º$ superase los 180º que totalizan los ángulos de un triángulo, podría darse el caso de que ambas soluciones pareciesen válidas. De hecho, si así procediéramos veríamos que tal es el caso, porque resultaría $B = 73{,}155º$ ó $B = 106{,}845º$. Pero cuando un problema se puede empezar por el *Teorema del Coseno*, sólo tiene una posible solución. O, de otra forma, como para calcular este ángulo podemos aplicar el *Teorema del Coseno*, sólo una de las dos soluciones es válida. De modo que no sabríamos cuál es si aplicásemos el *Teorema del Seno*. Por tanto, sólo cabe usar el otro:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4{,}7^2 + 4^2 - 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 4{,}7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 106{,}845º = 106º\ 50'40{,}7''}$$

Almacenamos, de igual forma, este resultado en una memoria de la calculadora. Y, finalmente:

$$\boxed{C =} 180º - A - B = 180º - 40º - 106{,}845º = \boxed{33{,}155º \approx 33º\ 9'19{,}22''}$$

2) Encontrar todas las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 2x \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$. *(2 ptos)*
Aplicando fórmulas de Trigonometría:

$$\operatorname{sen} 2x \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x = 6 \operatorname{sen}^3 x \Rightarrow 6 \operatorname{sen}^3 x - 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x = 0$$

Parecería que podíamos simplificar $\operatorname{sen} x$, pero no debemos hacerlo, porque la simplificación sería posible si, y sólo si $\operatorname{sen} x \neq 0$. Deberíamos, para poder hacerla con rigor, distinguir que $\operatorname{sen} x = 0$, en cuyo caso la igualdad sería válida y aportaría soluciones, o que $\operatorname{sen} x \neq 0$, que es cuando podríamos simplificar y continuar. Con lo que hemos hecho, evitamos tal discusión, porque ahora bastará sacar factor común $\operatorname{sen} x$ y tener en cuenta que un producto vale 0 si alguno de los factores es nulo siempre y cuando existan los demás factores para los valores resultantes. Así:

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen} x\,(3\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0º + 180º k,\ k \in \mathbb{Z}} \\ \text{ó} \\ 3\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 0 \end{cases}$$

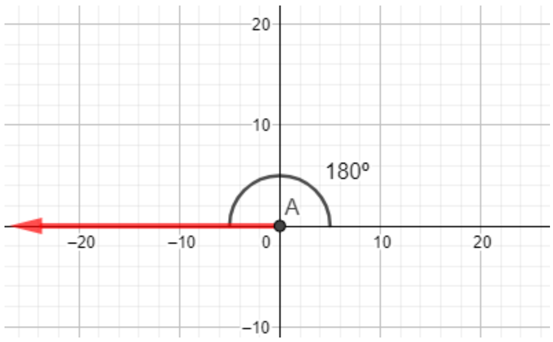
Desarrollando la segunda posibilidad:

$$3\text{sen}^2 x-(1-\text{sen}^2 x)=0 \;\Rightarrow\; 4\,\text{sen}^2 x=1 \;\Rightarrow\; \text{sen}\, x=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases}\boxed{x=210^\circ+360^\circ k}\\ \boxed{x=330^\circ+360^\circ k}\end{cases}\\ \dfrac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases}\boxed{x=30^\circ+360^\circ k}\\ \boxed{x=150^\circ+360^\circ k}\end{cases}\end{cases}$$

3) Encontrar todas las soluciones en C de la ecuación $x^3+27=0$, dando los resultados en forma binómica *exacta*. *(1,5 puntos)*

$$x^3+27=0 \;\Rightarrow\; x=\sqrt[3]{-27}$$

En R, esta ecuación tiene solución única –3. Pero una ecuación cúbica tiene, en C, tres soluciones. Como $R\subset C$, una de ellas coincidirá con la que tenemos. Pero necesitamos las otras dos. Para ello, hemos de calcular las tres raíces cúbicas de –27 que hay en C. Pero calcular raíces complejas nos obliga a pasar el radicando a forma *polar*, y lo tenemos en *binómica* ($-27=-27+0\cdot i$). Dado que –27 está sobre el *eje real*, es inmediato pasarlo a *polar*: $-27=27_{180^\circ}$. De modo que las soluciones de la ecuación son las tres raíces cúbicas de este complejo.



Módulo de las soluciones: $\sqrt[3]{27}=3$

Argumentos de las soluciones:

- $\alpha_1=\dfrac{180^\circ}{3}+\dfrac{360^\circ}{3}\cdot 0=60^\circ \Rightarrow$ Solución 1: $3_{60^\circ}=3(\cos 60^\circ+i\,\text{sen}\,60^\circ)=$

$$=\boxed{\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

- $\alpha_2=\dfrac{180^\circ}{3}+\dfrac{360^\circ}{3}\cdot 1=180^\circ \Rightarrow$ Solución 2: $3_{180^\circ}=3(\cos 180^\circ+i\,\text{sen}\,180^\circ)=\boxed{-3}$
- $\alpha_3=\dfrac{180^\circ}{3}+\dfrac{360^\circ}{3}\cdot 2=300^\circ \Rightarrow$ Solución 3: $3_{300^\circ}=3(\cos 300^\circ+i\,\text{sen}\,300^\circ)=$

$$=\boxed{\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Hemos pasado las tres soluciones a *binómica*, que así se nos pedían. La segunda es la solución real que conocíamos de antemano.

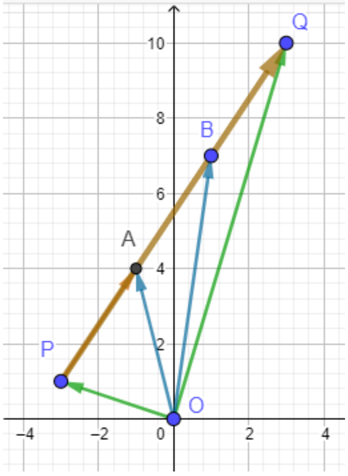
4) Pasar a forma polar el complejo $z=-1-\sqrt{3}\,i$ *(1 punto)*

Módulo $=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=2$

Argumento: $\text{tg}\,\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \alpha=60^\circ$. Pero como la *parte real* es negativa (–1) y la imaginaria, también ($-\sqrt{3}$), estamos en el tercer cuadrante. Por tanto, el argumento es $\alpha=180^\circ+60^\circ=240^\circ$. Así que, finalmente:

$$\boxed{z=2_{240^\circ}}.$$

5) Calcular las coordenadas de los puntos que dividen el segmento PQ en tres partes iguales, siendo $P(-3, 1)$ y $Q(3, 10)$. *(1 punto)*



Los puntos tienen las mismas coordenadas que sus vectores de posición (los que van desde el origen O hasta los puntos correspondientes). Por tanto:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (3, 10) - (-3, 1) = (6, 9)$$

Y siendo A y B los puntos buscados:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = (-3, 1) + \frac{1}{3}(6, 9) =$$
$$= (-3, 1) + (2, 3) = (-1, 4)$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ} = (-3, 1) + \frac{2}{3}(6, 9) =$$
$$= (-3, 1) + (4, 6) = (1, 7)$$

Luego los puntos buscados son $\boxed{A(-1, 4) \text{ y } B(1, 7)}$.

6) Hallar el punto simétrico de $Q(3, 8)$ respecto de $M(-1, 5)$. *(1 punto)*

Si llamamos $P(x, y)$ al punto simétrico pedido, M será el punto medio entre P y Q. Por tanto:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} = -1 \Rightarrow x+3 = -2 \Rightarrow x = -5 \\ \dfrac{y+8}{2} = 5 \Rightarrow y+8 = 10 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(-5, 2)}$$

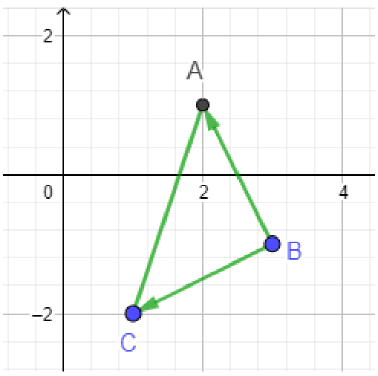
7) Dados los puntos $A(2, 1)$, $B(3, -1)$ y $C(1, -2)$, calcular el ángulo del vértice B del triángulo ABC y deducir qué tipo de triángulo es. *(1,5 puntos)*

El ángulo lo obtenemos trabajando con el *producto escalar*. Se tiene:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (2, 1) - (3, -1) = (-1, 2)$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (1, -2) - (3, -1) = (-2, -1)$$

De donde: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1, 2)\cdot(-2, -1) = -1(-2) + 2(-1) = 0$

Por tanto, estos vectores son ortogonales, lo que implica que $\boxed{\text{el ángulo en } B \text{ es recto}}$. Y, de ahí, que $\boxed{\text{el triángulo } ABC \text{ es rectángulo}}$.



NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Resolver un triángulo del que conocemos $b = 7$ cm, $c = 4$ cm y $A = 30º$. *(2 ptos)*

2) Hallar todas las soluciones de la ecuación $6\cos 2x + 6\text{sen}^2 x = 5 + \text{sen } x$. *(2 ptos)*

3) Encontrar todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $x^3 + 125 = 0$, dando los resultados en forma binómica *exacta*. *(1,5 puntos)*

4) Hallar $(-2 + 2i)^6$, dando el resultado en polar, trigonométrica y binómica. *(1,5 ptos)*

5) Calcular las coordenadas de los puntos que dividen el segmento PQ en tres partes iguales, siendo $P(-3, 1)$ y $Q(3, 10)$. *(1 punto)*

6) ¿Forman los vectores $(-3, 1)$ y $(1/3, -1/9)$ una base? *(1 punto)*

7) Dados los puntos $A(3, 1)$, $B(4, -1)$ y $C(2, -2)$, calcular un cuarto punto D de manera que se forme un paralelogramo. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Resolver un triángulo del que conocemos $b = 7$ cm, $c = 4$ cm y $A = 30º$. *(2 ptos)*
Como conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ambos, aplicamos el *Teorema del Coseno*:

$$\boxed{a =} \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A} = \sqrt{49+16-2\cdot 7\cdot 4\cos 30º} \approx \boxed{4{,}06 \text{ cm}}$$

Recalcar que hay que explicitar las unidades y que, para cálculos ulteriores, no usaremos la aproximación que hemos dado, sino que almacenaremos este resultado en una memoria de la calculadora (por ejemplo, *SHIFT*, *STO*, *A*) para usar *todos* los decimales que utiliza ésta, incluidos los que no nos muestra.
Ahora, para calcular el ángulo B podemos usar tanto el *Teorema del Seno* como el del *Coseno*. Pero considerando que con el primero de ellos obtendremos 2 resultados (el que proporciona la calculadora y 180º menos tal valor), y que sólo detectaríamos la invalidez de uno de ellos si sumándolos al ángulo conocido $A = 30º$ superase los 180º que totalizan los ángulos de un triángulo, podría darse el caso de que ambas soluciones pareciesen válidas. De hecho, si así procediéramos veríamos que tal es el caso, porque resultaría $B = 59{,}494º$ ó $B = 120{,}506º$. Pero cuando un problema se puede empezar por el *Teorema del Coseno*, sólo tiene una posible solución. O, de otra forma, como para calcular este ángulo podemos aplicar el *Teorema del Coseno*, sólo una de las dos soluciones es válida. De modo que no sabríamos cuál es si aplicásemos el *Teorema del Seno*. Por tanto, sólo cabe usar el otro:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{4{,}06^2+4^2-7^2}{2\cdot 4\cdot 4{,}06} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 120{,}506º = 120º\ 30´22{,}7''}$$

Almacenamos, de igual forma, este resultado en una memoria de la calculadora. Y, finalmente:

$$\boxed{C =} 180º - A - B = 180º - 30º - 120{,}506º = \boxed{29{,}494º \approx 29º\ 29´37{,}24''}$$

2) Hallar todas las soluciones de la ecuación $6\cos 2x + 6\text{sen}^2 x = 5 + \text{sen}\, x$. *(2 ptos)*
Aplicando fórmulas de Trigonometría, realizamos cambios buscando que aparezca una sola razón trigonométrica de un único ángulo:

$$6(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + 6\text{sen}^2 x = 5 + \text{sen}\, x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cos^2 x - 6\text{sen}^2 x + 6\,\text{sen}^2 x = 5 + \text{sen}\, x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cos^2 x = 5 + \text{sen}\, x \Rightarrow 6(1-\text{sen}^2 x) = 5 + \text{sen}\, x \Rightarrow 6 - 6\text{sen}^2 x = 5 + \text{sen}\, x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 6\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x + 5 - 6 \Rightarrow 6\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 = 0 \Rightarrow$$

Se trata de una ecuación de segundo grado en $\text{sen}\, x$ (podríamos hacer un *cambio de incógnita*: $t = \text{sen}\, x$, pero la abordamos directamente):

$$\text{sen}\, x = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1\pm 5}{12} = \begin{cases} = \dfrac{-1-5}{12} = \dfrac{-6}{12} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 210º + 360º k} \\ \boxed{x = 330º + 360º k} \end{cases} \\ = \dfrac{-1+5}{12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 19{,}471º + 360º k} \\ \boxed{x = 160{,}529º + 360º k} \end{cases} \end{cases}$$

La calculadora proporciona solo uno de los ángulos que hemos expuesto como soluciones, pero el otro viene de que, en la primera vuelta, hay otro ángulo, en cada uno de los dos casos, con el mismo seno (ver representación gráfica del seno en la circunferencia trigonométrica, en los *Resúmenes de Trigonometría* de nuestra web).

3) Encontrar todas las soluciones en C de la ecuación $x^3 + 125 = 0$, dando los resultados en forma binómica *exacta*. *(1,5 puntos)*

$$x^3 + 125 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-125}$$

En R, esta ecuación tiene solución única –3. Pero una ecuación cúbica tiene, en C, tres soluciones. Como $R \subset C$, una de ellas coincidirá con la que tenemos. Pero necesitamos las otras dos. Para ello, hemos de calcular las tres raíces cúbicas de –125 que hay en C. Pero calcular raíces complejas nos obliga a pasar el radicando a forma *polar*, y lo tenemos en *binómica* ($-125 = -125 + 0 \cdot i$). Dado que –125 está sobre el *eje real*, es inmediato pasarlo a *polar*: $-125 = 125_{180^\circ}$.

De modo que las soluciones de la ecuación son las tres raíces cúbicas de este complejo.

Módulo de las soluciones: $\sqrt[3]{125} = 5$

Argumentos de las soluciones:

- $\alpha_1 = \dfrac{180^\circ}{3} + \dfrac{360^\circ}{3} \cdot 0 = 60^\circ \Rightarrow$ Solución 1: $5_{60^\circ} = 5(\cos 60^\circ + i \text{ sen } 60^\circ) =$
$$= \boxed{\frac{5}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2}}$$
- $\alpha_2 = \dfrac{180^\circ}{3} + \dfrac{360^\circ}{3} \cdot 1 = 180^\circ \Rightarrow$ Solución 2: $5_{180^\circ} = 5(\cos 180^\circ + i \text{ sen } 180^\circ) = \boxed{-5}$
- $\alpha_3 = \dfrac{180^\circ}{3} + \dfrac{360^\circ}{3} \cdot 2 = 300^\circ \Rightarrow$ Solución 3: $5_{300^\circ} = 5(\cos 300^\circ + i \text{ sen } 300^\circ) =$
$$= \boxed{\frac{5}{2} - i\frac{5\sqrt{3}}{2}}$$

Hemos pasado las tres soluciones a *binómica*, que así se nos pedían. La segunda es la solución real que conocíamos de antemano.

4) Hallar $(-2 + 2i)^6$, dando el resultado en polar, trigonométrica y binómica. *(1,5 ptos)*

Es más fácil calcular la potencia de un complejo en forma *polar*. Así que comenzamos por pasar la base a *polar*:

Módulo = $\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

Argumento: $\text{tg } \alpha = \left|\dfrac{2}{-2}\right| = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$. Pero, en realidad, al tener el complejo una parte real negativa (–2) e imaginaria positiva (2), está en el segundo cuadrante, por lo que $\alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

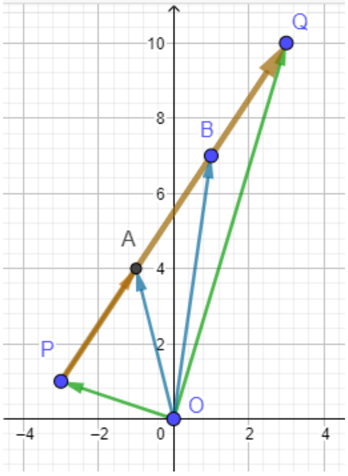
Por tanto, $z = -2 + 2i = \left(\sqrt{8}\right)_{135^\circ}$. De donde:

$$z^6 = \left[\left(\sqrt{8}\right)_{135^\circ}\right]^6 = \left(\sqrt{8}\right)^6_{135^\circ \cdot 6} = \left(\sqrt{8^6}\right)_{810^\circ} = (8^3)_{810^\circ - 720^\circ} = 512_{90^\circ}$$

Ponemos el resultado en las formas pedidas:

- Polar: $\boxed{512_{90º}}$
- Trigonométrica: $\boxed{512(\cos 90º + i \operatorname{sen} 90º)}$
- Binómica: $512(\cos 90º + i \operatorname{sen} 90º) = 512(0 + i) = \boxed{512i}$

5) Calcular las coordenadas de los puntos que dividen el segmento PQ en tres partes iguales, siendo $P(–3, 1)$ y $Q(3, 10)$. *(1 punto)*



Los puntos tienen las mismas coordenadas que sus vectores de posición (los que van desde el origen O hasta los puntos correspondientes). Por tanto:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (3, 10) - (-3, 1) = (6, 9)$$

Y siendo A y B los puntos buscados:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = (-3, 1) + \frac{1}{3}(6, 9) =$$
$$= (-3, 1) + (2, 3) = (-1, 4)$$
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ} = (-3, 1) + \frac{2}{3}(6, 9) =$$
$$= (-3, 1) + (4, 6) = (1, 7)$$

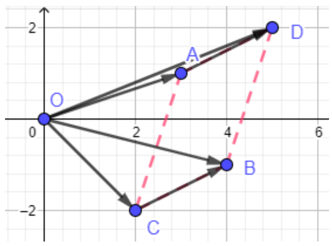
Luego los puntos buscados son $\boxed{A(-1, 4) \text{ y } B(1, 7)}$.

6) ¿Forman los vectores $(–3, 1)$ y $(1/3, –1/9)$ una base? *(1 punto)*
Como $(–3, 1) = –9(1/3, –1/9)$, un vector es combinación lineal del otro, puesto que es múltiplo suyo. En ese caso, son linealmente dependientes, por lo que $\boxed{\textit{no pueden formar base}}$. Tienen la misma dirección.

7) Dados los puntos $A(3, 1)$, $B(4, –1)$ y $C(2, –2)$, calcular un cuarto punto D de manera que se forme un paralelogramo. *(1 punto)*
Hay tres posibilidades (admitiremos como respuesta válida cualquiera de las tres):

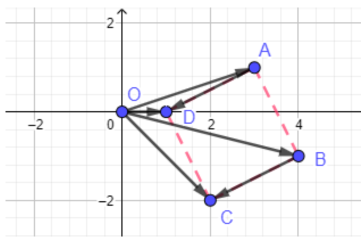
- Si D está entre A y B, como $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$, se tiene:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} =$$
$$= \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) =$$
$$= (3, 1) + (4, -1) - (2, -2) = (5, 2)$$



- Si D está entre A y C:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} =$$
$$= \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) =$$
$$= (3, 1) + (2, -2) - (4, -1) = (1, 0)$$



- Si D está entre B y C:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} =$$
$$= \overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) =$$
$$= (2, -2) + (4, -1) - (3, 1) = (3, -4)$$