NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Resolver un triángulo del que conocemos $b = 7$ cm, $c = 4$ cm y $A = 40º$. *(2 ptos)*

2) Encontrar todas las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 2x \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$. *(2 ptos)*

3) Encontrar todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $x^3 + 27 = 0$, dando los resultados en forma binómica *exacta*. *(1,5 puntos)*

4) Pasar a forma polar el complejo $z = -1 - \sqrt{3}\, i$ *(1 punto)*

5) Calcular las coordenadas de los puntos que dividen el segmento PQ en tres partes iguales, siendo $P(-3, 1)$ y $Q(3, 10)$. *(1 punto)*

6) Hallar el punto simétrico de $Q(3, 8)$ respecto de $M(-1, 5)$. *(1 punto)*

7) Dados los puntos $A(2, 1)$, $B(3, -1)$ y $C(1, -2)$, calcular el ángulo del vértice B del triángulo ABC y deducir qué tipo de triángulo es. *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Resolver un triángulo del que conocemos $b = 7$ cm, $c = 4$ cm y $A = 40º$. *(2 ptos)*

Como conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ambos, aplicamos el *Teorema del Coseno*:

$$\boxed{a =} \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{49 + 16 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cos 40º} \approx \boxed{4{,}70 \text{ cm}}$$

Recalcar que hay que explicitar las unidades y que, para cálculos ulteriores, no usaremos la aproximación que hemos dado, sino que almacenaremos este resultado en una memoria de la calculadora (por ejemplo, *SHIFT*, *STO*, *A*) para usar *todos* los decimales que utiliza ésta, incluidos los que no nos muestra.

Ahora, para calcular el ángulo B podemos usar tanto el *Teorema del Seno* como el del *Coseno*. Pero considerando que con el primero de ellos obtendremos 2 resultados (el que proporciona la calculadora y 180º menos tal valor), y que sólo detectaríamos la invalidez de uno de ellos si sumándolos al ángulo conocido $A = 40º$ superase los 180º que totalizan los ángulos de un triángulo, podría darse el caso de que ambas soluciones pareciesen válidas. De hecho, si así procediéramos veríamos que tal es el caso, porque resultaría $B = 73{,}155º$ ó $B = 106{,}845º$. Pero cuando un problema se puede empezar por el *Teorema del Coseno*, sólo tiene una posible solución. O, de otra forma, como para calcular este ángulo podemos aplicar el *Teorema del Coseno*, sólo una de las dos soluciones es válida. De modo que no sabríamos cuál es si aplicásemos el *Teorema del Seno*. Por tanto, sólo cabe usar el otro:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4{,}7^2 + 4^2 - 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 4{,}7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 106{,}845º = 106º\ 50'40{,}7''}$$

Almacenamos, de igual forma, este resultado en una memoria de la calculadora. Y, finalmente:

$$\boxed{C =} 180º - A - B = 180º - 40º - 106{,}845º = \boxed{33{,}155º \approx 33º\ 9'19{,}22''}$$

2) Encontrar todas las soluciones de la ecuación $\text{sen } 2x \cos x = 6 \text{ sen}^3 x$. *(2 ptos)*

Aplicando fórmulas de Trigonometría:

$$\text{sen } 2x \cos x = 6 \text{ sen}^3 x \Rightarrow 2 \text{ sen } x \cos x \cos x = 6 \text{ sen}^3 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \text{ sen } x \cos^2 x = 6 \text{ sen}^3 x \Rightarrow 6 \text{ sen}^3 x - 2 \text{ sen } x \cos^2 x = 0$$

Parecería que podíamos simplificar $\text{sen } x$, pero no debemos hacerlo, porque la simplificación sería posible si, y sólo si $\text{sen } x \neq 0$. Deberíamos, para poder hacerla con rigor, distinguir que $\text{sen } x = 0$, en cuyo caso la igualdad sería válida y aportaría soluciones, o que $\text{sen } x \neq 0$, que es cuando podríamos simplificar y continuar. Con lo que hemos hecho, evitamos tal discusión, porque ahora bastará sacar factor común $\text{sen } x$ y tener en cuenta que un producto vale 0 si alguno de los factores es nulo siempre y cuando existan los demás factores para los valores resultantes. Así:

$$\Rightarrow 2\text{sen } x\,(3\text{sen}^2 x - \cos^2 x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0º + 180º k,\ k \in \mathbb{Z}} \\ \quad ó \\ 3 \text{ sen}^2 x - \cos^2 x = 0 \end{cases}$$

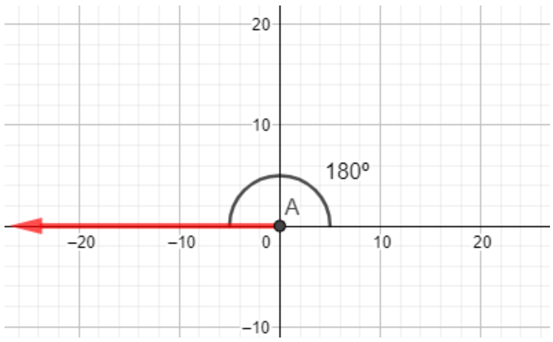
Desarrollando la segunda posibilidad:

$$3\text{sen}^2 x - (1 - \text{sen}^2 x) = 0 \Rightarrow 4\,\text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}\, x = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 210^\circ + 360^\circ k} \\ \boxed{x = 330^\circ + 360^\circ k} \end{cases} \\ \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 30^\circ + 360^\circ k} \\ \boxed{x = 150^\circ + 360^\circ k} \end{cases} \end{cases}$$

3) Encontrar todas las soluciones en C de la ecuación $x^3 + 27 = 0$, dando los resultados en forma binómica *exacta*. *(1,5 puntos)*

$$x^3 + 27 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-27}$$

En R, esta ecuación tiene solución única –3. Pero una ecuación cúbica tiene, en C, tres soluciones. Como $R \subset C$, una de ellas coincidirá con la que tenemos. Pero necesitamos las otras dos. Para ello, hemos de calcular las tres raíces cúbicas de –27 que hay en C. Pero calcular raíces complejas nos obliga a pasar el radicando a forma *polar*, y lo tenemos en *binómica* ($-27 = -27 + 0\cdot i$). Dado que –27 está sobre el *eje real*, es inmediato pasarlo a *polar*: $-27 = 27_{180^\circ}$. De modo que las soluciones de la ecuación son las tres raíces cúbicas de este complejo.



Módulo de las soluciones: $\sqrt[3]{27} = 3$

Argumentos de las soluciones:

- $\alpha_1 = \dfrac{180^\circ}{3} + \dfrac{360^\circ}{3}\cdot 0 = 60^\circ \Rightarrow$ Solución 1: $3_{60^\circ} = 3(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\, 60^\circ) =$
$$= \boxed{\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$
- $\alpha_2 = \dfrac{180^\circ}{3} + \dfrac{360^\circ}{3}\cdot 1 = 180^\circ \Rightarrow$ Solución 2: $3_{180^\circ} = 3(\cos 180^\circ + i\,\text{sen}\, 180^\circ) = \boxed{-3}$
- $\alpha_3 = \dfrac{180^\circ}{3} + \dfrac{360^\circ}{3}\cdot 2 = 300^\circ \Rightarrow$ Solución 3: $3_{300^\circ} = 3(\cos 300^\circ + i\,\text{sen}\, 300^\circ) =$
$$= \boxed{\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Hemos pasado las tres soluciones a *binómica*, que así se nos pedían. La segunda es la solución real que conocíamos de antemano.

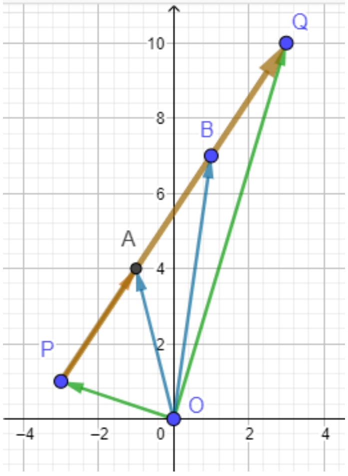
4) Pasar a forma polar el complejo $z = -1 - \sqrt{3}\,i$ *(1 punto)*

Módulo $= \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

Argumento: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$. Pero como la *parte real* es negativa (–1) y la imaginaria, también ($-\sqrt{3}$), estamos en el tercer cuadrante. Por tanto, el argumento es $\alpha = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$. Así que, finalmente:

$$\boxed{z = 2_{240^\circ}}.$$

5) Calcular las coordenadas de los puntos que dividen el segmento PQ en tres partes iguales, siendo $P(-3, 1)$ y $Q(3, 10)$. *(1 punto)*



Los puntos tienen las mismas coordenadas que sus vectores de posición (los que van desde el origen O hasta los puntos correspondientes). Por tanto:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (3, 10) - (-3, 1) = (6, 9)$$

Y siendo A y B los puntos buscados:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = (-3, 1) + \frac{1}{3}(6, 9) =$$
$$= (-3, 1) + (2, 3) = (-1, 4)$$
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ} = (-3, 1) + \frac{2}{3}(6, 9) =$$
$$= (-3, 1) + (4, 6) = (1, 7)$$

Luego los puntos buscados son $\boxed{A(-1, 4) \text{ y } B(1, 7)}$.

6) Hallar el punto simétrico de $Q(3, 8)$ respecto de $M(-1, 5)$. *(1 punto)*

Si llamamos $P(x, y)$ al punto simétrico pedido, M será el punto medio entre P y Q. Por tanto:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} = -1 \Rightarrow x+3 = -2 \Rightarrow x = -5 \\ \dfrac{y+8}{2} = 5 \Rightarrow y+8 = 10 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(-5, 2)}$$

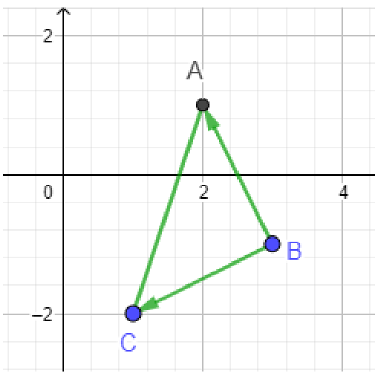
7) Dados los puntos $A(2, 1)$, $B(3, -1)$ y $C(1, -2)$, calcular el ángulo del vértice B del triángulo ABC y deducir qué tipo de triángulo es. *(1,5 puntos)*

El ángulo lo obtenemos trabajando con el *producto escalar*. Se tiene:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (2, 1) - (3, -1) = (-1, 2)$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (1, -2) - (3, -1) = (-2, -1)$$

De donde: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1, 2)\cdot(-2, -1) = -1(-2) + 2(-1) = 0$

Por tanto, estos vectores son ortogonales, lo que implica que $\boxed{\text{el ángulo en } B \text{ es recto}}$. Y, de ahí, que $\boxed{\text{el triángulo } ABC \text{ es rectángulo}}$.



NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Resolver un triángulo del que conocemos $b = 7$ cm, $c = 4$ cm y $A = 30º$. *(2 ptos)*

2) Hallar todas las soluciones de la ecuación $6\cos 2x + 6\text{sen}^2 x = 5 + \text{sen } x$. *(2 ptos)*

3) Encontrar todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $x^3 + 125 = 0$, dando los resultados en forma binómica *exacta*. *(1,5 puntos)*

4) Hallar $(-2 + 2i)^6$, dando el resultado en polar, trigonométrica y binómica. *(1,5 ptos)*

5) Calcular las coordenadas de los puntos que dividen el segmento PQ en tres partes iguales, siendo $P(-3, 1)$ y $Q(3, 10)$. *(1 punto)*

6) ¿Forman los vectores $(-3, 1)$ y $(1/3, -1/9)$ una base? *(1 punto)*

7) Dados los puntos $A(3, 1)$, $B(4, -1)$ y $C(2, -2)$, calcular un cuarto punto D de manera que se forme un paralelogramo. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Resolver un triángulo del que conocemos $b = 7$ cm, $c = 4$ cm y $A = 30º$. *(2 ptos)*

Como conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ambos, aplicamos el *Teorema del Coseno*:

$$\boxed{a =} \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A} = \sqrt{49 + 16 - 2{\cdot}7{\cdot}4\cos 30º} \approx \boxed{4{,}06 \text{ cm}}$$

Recalcar que hay que explicitar las unidades y que, para cálculos ulteriores, no usaremos la aproximación que hemos dado, sino que almacenaremos este resultado en una memoria de la calculadora (por ejemplo, *SHIFT*, *STO*, *A*) para usar *todos* los decimales que utiliza ésta, incluidos los que no nos muestra.

Ahora, para calcular el ángulo B podemos usar tanto el *Teorema del Seno* como el del *Coseno*. Pero considerando que con el primero de ellos obtendremos 2 resultados (el que proporciona la calculadora y 180º menos tal valor), y que sólo detectaríamos la invalidez de uno de ellos si sumándolos al ángulo conocido $A = 30º$ superase los 180º que totalizan los ángulos de un triángulo, podría darse el caso de que ambas soluciones pareciesen válidas. De hecho, si así procediéramos veríamos que tal es el caso, porque resultaría $B = 59{,}494º$ ó $B = 120{,}506º$. Pero cuando un problema se puede empezar por el *Teorema del Coseno*, sólo tiene una posible solución. O, de otra forma, como para calcular este ángulo podemos aplicar el *Teorema del Coseno*, sólo una de las dos soluciones es válida. De modo que no sabríamos cuál es si aplicásemos el *Teorema del Seno*. Por tanto, sólo cabe usar el otro:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4{,}06^2 + 4^2 - 7^2}{2{\cdot}4{\cdot}4{,}06} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 120{,}506º = 120º\ 30´22{,}7''}$$

Almacenamos, de igual forma, este resultado en una memoria de la calculadora. Y, finalmente:

$$\boxed{C =} 180º - A - B = 180º - 30º - 120{,}506º = \boxed{29{,}494º \approx 29º\ 29´37{,}24''}$$

2) Hallar todas las soluciones de la ecuación $6\cos 2x + 6\text{sen}^2 x = 5 + \text{sen } x$. *(2 ptos)*

Aplicando fórmulas de Trigonometría, realizamos cambios buscando que aparezca una sola razón trigonométrica de un único ángulo:

$$6(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + 6\text{sen}^2 x = 5 + \text{sen } x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cos^2 x - 6\text{sen}^2 x + 6\,\text{sen}^2 x = 5 + \text{sen } x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cos^2 x = 5 + \text{sen } x \Rightarrow 6(1 - \text{sen}^2 x) = 5 + \text{sen } x \Rightarrow 6 - 6\text{sen}^2 x = 5 + \text{sen } x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 6\text{sen}^2 x + \text{sen } x + 5 - 6 \Rightarrow 6\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0 \Rightarrow$$

Se trata de una ecuación de segundo grado en sen x (podríamos hacer un *cambio de incógnita*: $t = \text{sen } x$, pero la abordamos directamente):

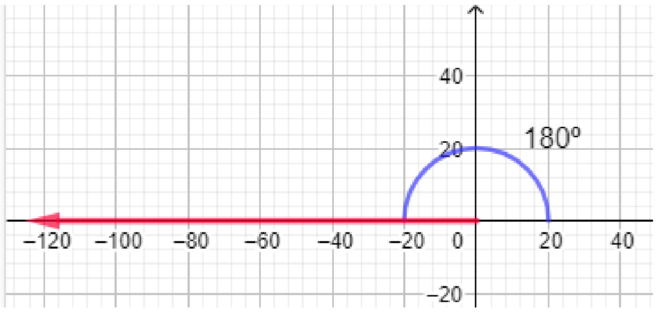
$$\text{sen } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} = \begin{cases} = \dfrac{-1-5}{12} = \dfrac{-6}{12} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 210º + 360º\,k} \\ \boxed{x = 330º + 360º\,k} \end{cases} \\ = \dfrac{-1+5}{12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 19{,}471º + 360º\,k} \\ \boxed{x = 160{,}529º + 360º\,k} \end{cases} \end{cases}$$

La calculadora proporciona solo uno de los ángulos que hemos expuesto como soluciones, pero el otro viene de que, en la primera vuelta, hay otro ángulo, en cada uno de los dos casos, con el mismo seno (ver representación gráfica del seno en la circunferencia trigonométrica, en los *Resúmenes de Trigonometría* de nuestra web).

3) Encontrar todas las soluciones en C de la ecuación $x^3 + 125 = 0$, dando los resultados en forma binómica *exacta*. *(1,5 puntos)*

$$x^3 + 125 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-125}$$

En R, esta ecuación tiene solución única –3. Pero una ecuación cúbica tiene, en C, tres soluciones. Como $R \subset C$, una de ellas coincidirá con la que tenemos. Pero necesitamos las otras dos. Para ello, hemos de calcular las tres raíces cúbicas de –125 que hay en C. Pero calcular raíces complejas nos obliga a pasar el radicando a forma *polar*, y lo tenemos en *binómica* ($-125 = -125 + 0 \cdot i$). Dado que –125 está sobre el *eje real*, es inmediato pasarlo a *polar*: $-125 = 125_{180^o}$.



De modo que las soluciones de la ecuación son las tres raíces cúbicas de este complejo.

Módulo de las soluciones: $\sqrt[3]{125} = 5$

Argumentos de las soluciones:

- $\alpha_1 = \dfrac{180^o}{3} + \dfrac{360^o}{3} \cdot 0 = 60^o \Rightarrow$ Solución 1: $5_{60^o} = 5(\cos 60^o + i \text{ sen } 60^o) = \boxed{\dfrac{5}{2} + i\dfrac{5\sqrt{3}}{2}}$
- $\alpha_2 = \dfrac{180^o}{3} + \dfrac{360^o}{3} \cdot 1 = 180^o \Rightarrow$ Solución 2: $5_{180^o} = 5(\cos 180^o + i \text{ sen } 180^o) = \boxed{-5}$
- $\alpha_3 = \dfrac{180^o}{3} + \dfrac{360^o}{3} \cdot 2 = 300^o \Rightarrow$ Solución 3: $5_{300^o} = 5(\cos 300^o + i \text{ sen } 300^o) = \boxed{\dfrac{5}{2} - i\dfrac{5\sqrt{3}}{2}}$

Hemos pasado las tres soluciones a *binómica*, que así se nos pedían. La segunda es la solución real que conocíamos de antemano.

4) Hallar $(-2 + 2i)^6$, dando el resultado en polar, trigonométrica y binómica. *(1,5 ptos)*

Es más fácil calcular la potencia de un complejo en forma *polar*. Así que comenzamos por pasar la base a *polar*:

Módulo = $\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

Argumento: $\text{tg } \alpha = \left|\dfrac{2}{-2}\right| = 1 \Rightarrow \alpha = 45^o$. Pero, en realidad, al tener el complejo una parte real negativa (–2) e imaginaria positiva (2), está en el segundo cuadrante, por lo que $\alpha = 180^o - 45^o = 135^o$.

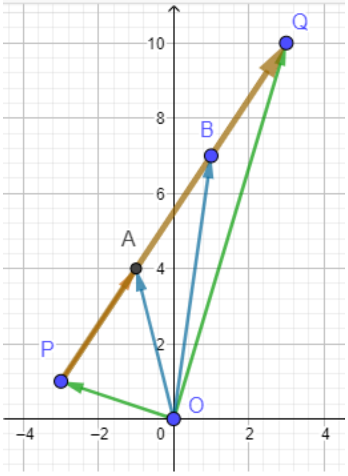
Por tanto, $z = -2 + 2i = \left(\sqrt{8}\right)_{135^o}$. De donde:

$$z^6 = \left[\left(\sqrt{8}\right)_{135^o}\right]^6 = \left(\sqrt{8}\right)^6_{135^o \cdot 6} = \left(\sqrt{8^6}\right)_{810^o} = (8^3)_{810^o - 720^o} = 512_{90^o}$$

Ponemos el resultado en las formas pedidas:

- Polar: $\boxed{512_{90^\circ}}$
- Trigonométrica: $\boxed{512(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)}$
- Binómica: $512(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = 512(0 + i) = \boxed{512i}$

5) Calcular las coordenadas de los puntos que dividen el segmento PQ en tres partes iguales, siendo $P(-3, 1)$ y $Q(3, 10)$. *(1 punto)*



Los puntos tienen las mismas coordenadas que sus vectores de posición (los que van desde el origen O hasta los puntos correspondientes). Por tanto:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (3, 10) - (-3, 1) = (6, 9)$$

Y siendo A y B los puntos buscados:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = (-3, 1) + \frac{1}{3}(6, 9) =$$
$$= (-3, 1) + (2, 3) = (-1, 4)$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ} = (-3, 1) + \frac{2}{3}(6, 9) =$$
$$= (-3, 1) + (4, 6) = (1, 7)$$

Luego los puntos buscados son $\boxed{A(-1, 4) \text{ y } B(1, 7)}$.

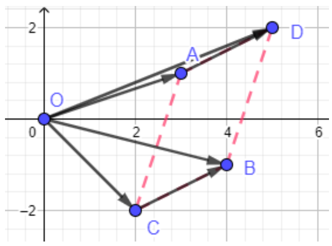
6) ¿Forman los vectores $(-3, 1)$ y $(1/3, -1/9)$ una base? *(1 punto)*

Como $(-3, 1) = -9(1/3, -1/9)$, un vector es combinación lineal del otro, puesto que es múltiplo suyo. En ese caso, son linealmente dependientes, por lo que $\boxed{\textit{no pueden formar base}}$. Tienen la misma dirección.

7) Dados los puntos $A(3, 1)$, $B(4, -1)$ y $C(2, -2)$, calcular un cuarto punto D de manera que se forme un paralelogramo. *(1 punto)*

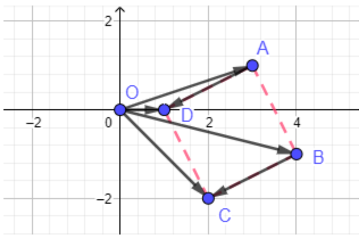
Hay tres posibilidades (admitiremos como respuesta válida cualquiera de las tres):

- Si D está entre A y B, como $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$, se tiene:



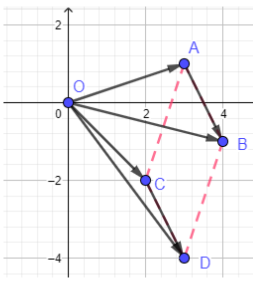
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} =$$
$$= \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) =$$
$$= (3, 1) + (4, -1) - (2, -2) = (5, 2)$$

- Si D está entre A y C:



$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} =$$
$$= \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) =$$
$$= (3, 1) + (2, -2) - (4, -1) = (1, 0)$$

- Si D está entre B y C:



$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} =$$
$$= \overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) =$$
$$= (2, -2) + (4, -1) - (3, 1) = (3, -4)$$

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Resolver la ecuación: $\cos 2x = 1 + 4 \operatorname{sen} x$ *(2 puntos)*

2) Dado $z = -2 - 2\sqrt{3}\,i$, calcular z^{14}. *(2 puntos)*

3) Hallar a para que las dos rectas siguientes sean a) perpendiculares; b) paralelas:
$r \equiv 3x - 7y + 5 = 0$; $s \equiv ax + 6y - 3 = 0$ *(0,7+0,8 puntos)*

4) Hallar el simétrico del punto $(-1, -6)$ respecto de la recta $(x, y) = (4, -5) + t(-3, 2)$.
(1,5 puntos)

5) Dados los puntos $A(-1, -2)$, $B(1, 4)$ y $C(0, 5)$, *(1,5 puntos)*
   a) Hallar la distancia de A a B.
   b) Hallar la distancia de C a la recta que pasa por A y B.
   c) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son dichos puntos.

6) Hallar la circunferencia concéntrica con $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ que sea tangente a la recta $r \equiv 3x + 4y - 3 = 0$. *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Resolver la ecuación: $\cos 2x = 1 + 4 \operatorname{sen} x$ *(2 puntos)*

Buscamos que aparezca un solo ángulo (ahora hay dos: x y $2x$) y una única razón trigonométrica de dicho ángulo:

$$\cos 2x = 1 + 4 \operatorname{sen} x \Rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 1 - 4 \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 1 - 4 \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow -2\operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{(divid. entre } -2\text{)}: \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x + 2) = 0 \Rightarrow$$

Un producto vale 0 si alguno de los factores se anula, mientras que existan todos los factores. Por tanto, eso es cierto si, y sólo si:

$\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0^\circ + 180^\circ k,\ k \in Z}$

ó

$\operatorname{sen} x + 2 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -2$, imposible $(\forall x,\ -1 \le \operatorname{sen} x \le 1)$

2) Dado $z = -2 - 2\sqrt{3}\, i$, calcular z^{14}. *(2 puntos)*

Como el exponente es elevado, lo mejor es pasar z a polar para efectuar la operación:

Módulo $= \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4\cdot 3} = \sqrt{16} = 4$ (no puede ser negativo)

Argumento: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$. Pero como las partes real e imaginaria de z son negativas ambas, z está en el tercer cuadrante $\Rightarrow \alpha = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$.

De donde $\boxed{z = 4_{240^\circ}}$. Por tanto:

$$\boxed{z^{14} =} (4_{240^\circ})^{14} = (4^{14})_{240^\circ\cdot 14} = 268.435.456_{3360^\circ} =$$
$$= 268.435.456_{9\cdot 360^\circ + 120^\circ} = \boxed{268.435.456_{120^\circ}}$$

Pues al dividir 3360 entre 360 sale 9 de cociente y 120 de resto. Lo que significa que 3360° se obtiene dando 9 vueltas completas más 120°.

3) Hallar a para que las dos rectas siguientes sean a) perpendiculares; b) paralelas:

$r \equiv 3x - 7y + 5 = 0$; $\quad s \equiv ax + 6y - 3 = 0$ *(0,7+0,8 puntos)*

a) Serán perpendiculares si sus respectivos vectores normales lo son. Y eso ocurre si, y sólo si su producto escalar es nulo:

$$(3, -7)\,(a, 6) = 3a - 42 = 0 \Leftrightarrow 3a = 42 \Leftrightarrow \boxed{a = 14}$$

b) Serán paralelos si sus respectivos vectores normales son múltiplos el uno del otro (tendrán, así, la misma dirección):

$$\frac{a}{3} = \frac{6}{-7} \Leftrightarrow \boxed{a = -\frac{18}{7}}$$

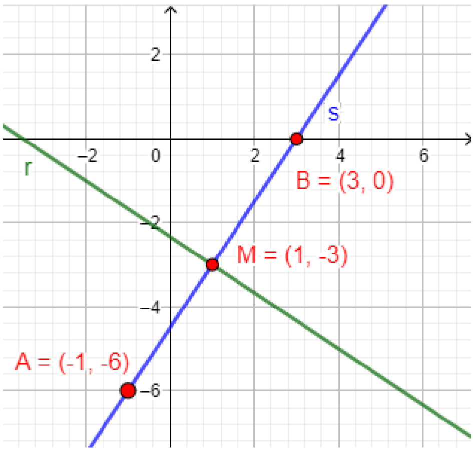
4) Hallar el simétrico del punto $(-1, -6)$ respecto de la recta $(x, y) = (4, -5) + t(-3, 2)$. *(1,5 puntos)*

Lo primero será poner la recta en forma general. Para ello, como conocemos un punto y un vector de dirección, la ponemos en continua y despejamos:

$$\frac{x-4}{-3} = \frac{y+5}{2} \Rightarrow 2x - 8 = -3y - 15 \Rightarrow \boxed{2x + 3y + 7 = 0 \equiv r}$$

<u>Paso 1</u>: Perpendicular a r que pasa por $A(-1, -6)$. El vector normal de r será vector de dirección de su perpendicular:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+6}{3} \Rightarrow 3x + 3 = 2y + 12 \Rightarrow \boxed{3x - 2y - 9 = 0 \equiv s}$$



Paso 2: Intersección de r y s:

$$\left.\begin{cases}2x+3y=-7\\ 3x-2y=9\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}(\cdot 2):\ \ 4x+6y=-14\\ (\cdot 3):\ \ 9x-6y=27\end{array}\right\}$$
$$13x \quad = 13 \Rightarrow x=1$$

$$\left.\begin{cases}2x+3y=-7\\ 3x-2y=9\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}\cdot(-3): -6x-9y=21\\ (\cdot 2):\ \ 6x-4y=18\end{array}\right\}$$
$$-13y=39 \Rightarrow y=-3$$

Luego r y s se cortan en el punto $M(1, -3)$.

Paso 3: $M(1, -3)$ es el punto medio entre $A(-1, -6)$ y su simétrico $B(x, y)$. Luego:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=1 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3\\ \dfrac{y-6}{2}=-3 \Rightarrow y-6=-6 \Rightarrow y=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{B(3, 0)}$$

5) Dados los puntos $A(-1, -2)$, $B(1, 4)$ y $C(0, 5)$, *(1,5 puntos)*

a) Hallar la distancia de A a B.

$$\boxed{d(A, B) =} \sqrt{(1-(-1))^2+(4-(-2))^2} = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40} = \boxed{2\sqrt{10}\ u}$$

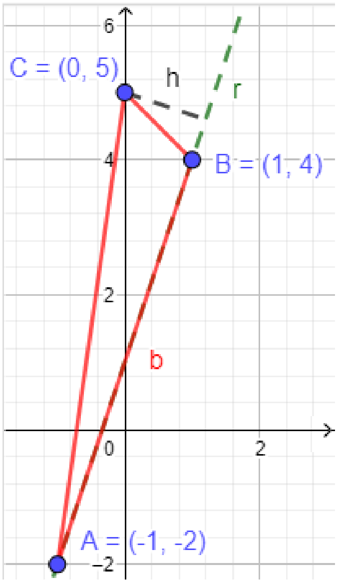
b) Hallar la distancia de C a la recta que pasa por A y B.

Recta r que pasa por A y B:

$$\frac{x+1}{1+1}=\frac{y+2}{4+2} \Rightarrow 6x + 6 = 2y + 4 \Rightarrow 6x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow$$
$$\boxed{3x - y + 1 = 0 \equiv r}$$

Por tanto:

$$\boxed{d(C, r) =} \frac{|3\cdot 0-5+1|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}\ u$$



c) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son dichos puntos.

El primer resultado (apartado a) es la *base* del triángulo, y el segundo (apartado b), la *altura*. Por tanto:

$$\boxed{A =} \frac{bh}{2} = \frac{2\sqrt{10}\,\dfrac{4}{\sqrt{10}}}{2} = \boxed{4\ u^2}$$

6) Hallar la circunferencia concéntrica con $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ que sea tangente a la recta $r \equiv 3x + 4y - 3 = 0$. *(1,5 puntos)*

Lo primero es calcular el centro de la circunferencia dada, porque coincidirá con el de la que piden:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2\cdot 2\cdot x + 4 - 4 + y^2 - 2\cdot 3\cdot y + 9 - 9 + 9 = 0 \Rightarrow$$

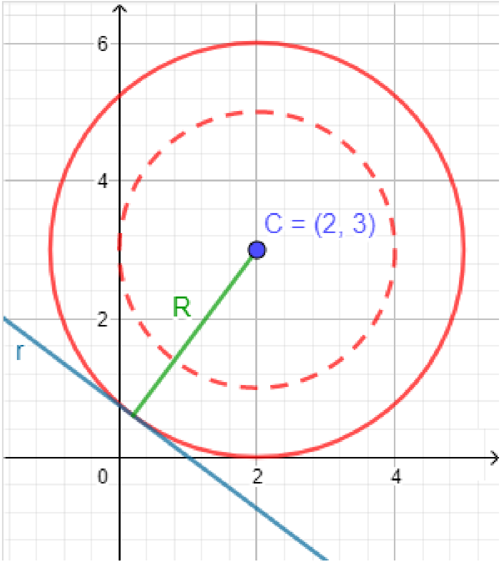
$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 - 4 - 9 + 9 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2^2}$$

Por tanto, la circunferencia que nos han dado (en línea discontinua en el gráfico) tiene como centro $C(2, 3)$ y radio 2. La que nos piden tiene el mismo centro. Y el radio será la distancia entre el mismo y la recta r, puesto que dicha recta es tangente a la nueva circunferencia. Dicho valor es:

$$R = \mathrm{d}(C, r) = \frac{|3\cdot 2 + 4\cdot 3 - 3|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{15}{5} = 3\ u$$

De donde, la circunferencia buscada es:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow \boxed{(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9}$$



IES Fernando de Herrera **Curso 2017 / 18**

Segundo trimestre – Recuperación 1 – 1º Bach C-T

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Resolver la ecuación $2\cos 2x + 5 \text{ sen } x = 3$ *(2 puntos)*
2) Hallar las raíces quintas de $z = 2\sqrt{3} - 2i$ *(2 puntos)*
3) Hallar el simétrico del punto $P(–2, –4)$ respecto de la recta r que tiene como vector de dirección $\vec{d} = (1, –2)$ y pasa por $A(1, –5)$. *(1,5 puntos)*
4) Dada la recta $r \equiv 2x + y + 3 = 0$, hallar la paralela s que pasa por $P(2, –2)$ y la perpendicular s' que pasa por el mismo punto, dando las soluciones en forma vectorial. *(1 punto)*
5) Dada la circunferencia $x^2 + y^2 – 4x + 6y + 9 = 0$, calcular otra circunferencia con el mismo centro y que pase por el punto $P(5, –1)$. *(1,5 puntos)*
6) Dados los puntos $A(1, 5)$, $B(–3, 4)$ y $C(–2, 3)$, se pide: *(2 puntos)*
   a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
   b) Longitud del segmento BC.
   c) Distancia de A a la recta que pasa por B y C.
   d) Área del triángulo que forman.

SOLUCIONES

1) Resolver la ecuación $2\cos 2x + 5\,\text{sen}\, x = 3$ *(2 puntos)*

$$2\cos 2x + 5\,\text{sen}\, x = 3 \Rightarrow 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + 5\,\text{sen}\, x = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(1 - \text{sen}^2 x) - 2\text{sen}^2 x + 5\,\text{sen}\, x = 3 \Rightarrow 2 - 4\text{sen}^2 x + 5\,\text{sen}\, x = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 4\text{sen}^2 x - 5\text{sen}\, x + 1 \Rightarrow \text{sen}\, x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{1}{4} \\ = 1 \end{array} \right.$$

- $\text{sen}\, x = 1/4 \Rightarrow \boxed{x = 14{,}478º + 360ºk \quad ó \quad x = 165{,}522º + 360ºk,\ k \in Z}$
- $\text{sen}\, x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 90º + 360ºk,\ k \in Z}$.

En el primero de estos casos, la calculadora sólo proporciona la solución del primer cuadrante. La otra es porque en el 2º hay otro ángulo con el mismo seno, cuyo valor es 180º – 14,478º = 165,522º.

2) Hallar las raíces quintas de $z = 2\sqrt{3} - 2i$ *(2 puntos)*

Pasamos z a forma polar:

- Módulo: $\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = 4$
- Argumento: $\alpha = \text{arctg}\ \frac{2}{2\sqrt{3}} = 30º$. Pero al ser la parte real positiva y la imaginaria negativa, estamos en el 4º cuadrante $\Rightarrow \alpha = 360º - 30º = 330º$

Por lo que hemos de hallar las raíces quintas de $z = 4_{330º}$.

Módulo de las soluciones: $\sqrt[5]{4}$

Argumentos de las soluciones:

- $\alpha_1 = \frac{330º}{5} + \frac{360º}{5} \cdot 0 = 66º \Rightarrow$ Solución 1: $\boxed{(\sqrt[5]{4})_{66º}}$
- $\alpha_2 = \frac{330º}{5} + \frac{360º}{5} \cdot 1 = 138º \Rightarrow$ Solución 2: $\boxed{(\sqrt[5]{4})_{138º}}$
- $\alpha_3 = \frac{330º}{5} + \frac{360º}{5} \cdot 2 = 210º \Rightarrow$ Solución 3: $\boxed{(\sqrt[5]{4})_{210º}}$
- $\alpha_4 = \frac{330º}{5} + \frac{360º}{5} \cdot 3 = 282º \Rightarrow$ Solución 4: $\boxed{(\sqrt[5]{4})_{282º}}$
- $\alpha_5 = \frac{330º}{5} + \frac{360º}{5} \cdot 4 = 354º \Rightarrow$ Solución 5: $\boxed{(\sqrt[5]{4})_{354º}}$

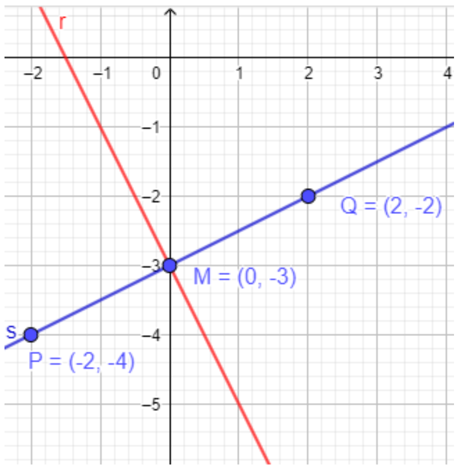
3) Hallar el simétrico del punto $P(-2, -4)$ respecto de la recta r que tiene como vector de dirección $\vec{d} = (1, -2)$ y pasa por $A(1, -5)$. *(1,5 puntos)*

Hallemos la ecuación de la recta:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{-2} \Rightarrow -2x + 2 = y + 5 \Rightarrow \boxed{y = -2x - 3 \equiv r}$$

<u>Paso 1</u>: Perpendicular a r que pasa por $P(-2, -4)$. La pendiente de la perpendicular vale $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$. Así que, en forma punto-pendiente:

$$y + 4 = \frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x - 3 \equiv s}$$



Paso 2: Intersección de r y s:

Igualamos: $-2x-3=\frac{1}{2}x-3 \Rightarrow -4x=x \Rightarrow 0=5x$

$\Rightarrow x=\frac{0}{5}=0$

Sustituyendo en r: $y=-3$. Luego se cortan en $\boxed{M(0,-3)}$.

Paso 3: $M(0, -3)$ es el punto medio entre $P(-2, -4)$ y su simétrico $Q(x, y)$. Luego:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{x-2}{2}=0 \Rightarrow x=2 \\ \frac{y-4}{2}=-3 \Rightarrow y-4=-6 \Rightarrow y=-2\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{Q(2,-2)}$$

4) Dada la recta $r \equiv 2x+y+3=0$, hallar la paralela s que pasa por $P(2, -2)$ y la perpendicular s' que pasa por el mismo punto, dando las soluciones en forma vectorial. *(1 punto)*

- Paralela: Tiene el mismo vector de dirección: $(1, -2)$. Luego es:

$$\boxed{s \equiv (x, y)=(2,-2)+t(1,-2)}$$

- Perpendicular: El vector normal de r será vector de dirección de s':

$$\boxed{s' \equiv (x, y)=(2,-2)+t(2,1)}$$

5) Dada la circunferencia $x^2+y^2-4x+6y+9=0$, calcular otra circunferencia con el mismo centro y que pase por el punto $P(5, -1)$. *(1,5 puntos)*

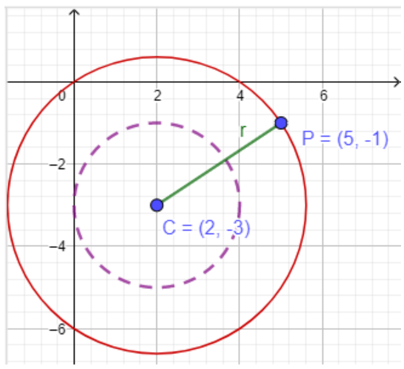
Calculemos centro y radio de la circunferencia que nos dan:

$$x^2-4x+y^2+6y+9=0 \Rightarrow x^2-2\cdot 2x+4-4+y^2+2\cdot 3y+9-9+9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)^2-4+(y+3)^2-9+9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=4$$



Luego el centro es $\boxed{C(2,-3)}$ y el radio $r=\sqrt{4}=2$.

Si la circunferencia buscada pasa por $P(5, -1)$, el radio será la distancia desde el centro hasta P:

$$r=d(C, P)=\sqrt{(2-5)^2+(-3+1)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

Por tanto, la circunferencia que buscamos es:

$$\boxed{(x-2)^2+(y+3)^2=13}$$

Otra forma de calcular el 13 hubiera sido así: Como sabemos el centro de la circunferencia, su ecuación será: c r^2. Y dado que $P(5, -1)$ es un punto de esta circunferencia, verificará su ecuación: $(5-2)^2+(-1+3)^2=r^2 \Rightarrow 9+4=r^2 \Rightarrow 13=r^2$ $\Rightarrow$ la circunferencia es: $(x-2)^2+(y-3)^2=13$.

6) Dados los puntos $A(1, 5)$, $B(-3, 4)$ y $C(-2, 3)$, se pide: *(2 puntos)*

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(1,5)-(-3,4)=(4,1)$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-2,3)-(-3,4)=(1,-1)$$

$$\boxed{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}} = (4, 1) + (1, -1) = \boxed{(5, 0)}$$

b) Longitud del segmento BC.

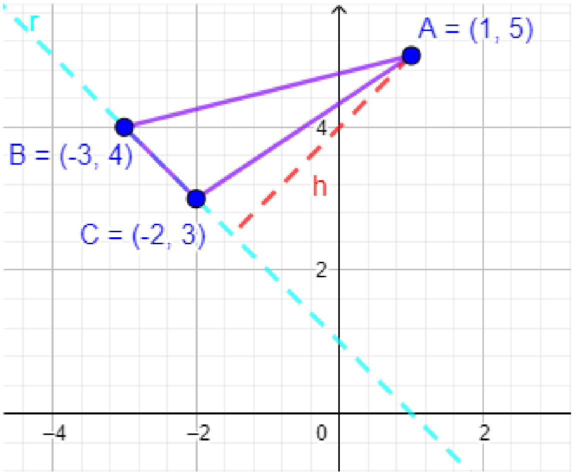
$$\boxed{|\overrightarrow{BC}|} = \sqrt{1^2+1^2} = \boxed{\sqrt{2}\ \ u}$$

c) Distancia de A a la recta que pasa por B y C.

La recta es: $\dfrac{x+3}{-2+3} = \dfrac{y-4}{3-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 3 = -y + 4 \Rightarrow \boxed{x + y - 1 = 0 \equiv r}$

$$\boxed{d(A, r)} = \frac{|1+5-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{2}}\ u}$$



d) Área del triángulo que forman.
La base es la longitud del segmento BC, antes calculada. Y la altura es la distancia de A a la recta que pasa por B y C, también calculada. Por consiguiente:

$$\boxed{A} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{2}\,\frac{5}{\sqrt{2}}}{2} = \boxed{\frac{5}{2}\ u^2}$$

IES Fernando de Herrera **Curso 2017 / 18**

Segundo trimestre – Subida de nota – 1º Bach C-T

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **<u>Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto</u>** <u>o la</u> **<u>anulación</u>** en caso de usar tinta corregible.

1) Clasificar según el número de soluciones y resolver el sistema: *(1,5 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} 4x-3y+2z=21 \\ 3x+2y+3z=9 \\ 5x+9y+7z=6 \end{array}\right\}$$

2) Resolver la ecuación: $\dfrac{5x-10}{5(3x^2-x-2)}-\dfrac{x+10}{5(3x+2)}=\dfrac{-1}{5(x-1)}$ *(1,5 puntos)*

3) Demostrar que es cierta la siguiente identidad cuando tiene sentido: *(2 puntos)*

$$2+\frac{\text{tg } a \text{ sen } 2a}{(1-\text{ sen } a)(1+\text{ sen } a)}=\frac{2}{\cos^2 a}$$

4) Hallar las raíces quintas de $z = 2\sqrt{3}-2i$ *(1,5 puntos)*

5) Hallar el simétrico del punto $P(-2, -4)$ respecto de la recta r que tiene como vector de dirección $\vec{d} = (1, -2)$ y pasa por $A(1, -5)$. *(1,5 puntos)*

6) Dados los puntos $A(1, 5)$, $B(-3, 4)$ y $C(-2, 3)$, se pide: *(2 puntos)*

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

b) Longitud del segmento BC.

c) Distancia de A a la recta que pasa por B y C.

d) Área del triángulo que forman.

SOLUCIONES

1) Clasificar según el número de soluciones y resolver el sistema: *(1,5 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} 4x-3y+2z=21 \\ 3x+2y+3z=9 \\ 5x+9y+7z=6 \end{array}\right\}$$

Realizamos transformaciones elementales de filas en la matriz ampliada, con objeto de triangularizarla (una columna, que no sea la de términos independientes, completa de ceros salvo una posición; otra igual salvo otra posición y la no nula de la columna previa, etc.):

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 21 \\ 3 & 2 & 3 & 9 \\ 5 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[4F_3-5F_1]{4F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 21 \\ 0 & 17 & 6 & -27 \\ 0 & 51 & 18 & -81 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_2} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 21 \\ 0 & 17 & 6 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la última fila es nula, la eliminamos. No sale ninguna fila toda nula salvo la columna de términos independientes, luego es compatible. Al quedar menos filas que incógnitas es un $\boxed{\textit{sistema compatible indeterminado}}$.

Llamamos $y = t$ (tiene los coeficientes más complicados) y reconstruimos las ecuaciones:

- 2ª ecuación: $6z = -27 - 17t \Rightarrow z = \dfrac{-27-17t}{6}$
- 1ª ecuación: $4x - 3t + 2\dfrac{-27-17t}{6} = 21 \Rightarrow 4x - 3t + \dfrac{-27-17t}{3} = 21 \Rightarrow$
  $12x - 9t - 27 - 17t = 63 \Rightarrow 12x - 26t = 63 + 27 \Rightarrow 12x = 90 + 26t \Rightarrow$
  $6x = 45 + 13t \Rightarrow x = \dfrac{45+13t}{6}$

Luego las soluciones tienen la estructura: $\boxed{(x, y, z) = \left(\dfrac{45+13t}{6},\ t,\ \dfrac{-27-17t}{6}\right)}$.

2) Resolver la ecuación: $\dfrac{5x-10}{5(3x^2-x-2)} - \dfrac{x+10}{5(3x+2)} = \dfrac{-1}{5(x-1)}$ *(1,5 puntos)*

Descomponemos factorialmente los denominadores:

- $3x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{6} = \dfrac{1\pm 5}{6} = \left\langle\begin{array}{l} =-\dfrac{2}{3} \\ =1 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ De donde deducimos que: $3x^2 - x - 2 = 3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)(x-1)$.
- $3x + 2 = 3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$, sacando factor común.

Por tanto, la expresión equivale a:

$$\frac{5x-10}{15\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)} - \frac{x+10}{15\left(x+\frac{2}{3}\right)} = \frac{-1}{5(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5x-10}{15\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)} - \frac{(x+10)(x-1)}{15\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)} = \frac{-3\left(x+\frac{2}{3}\right)}{15\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)} \Rightarrow$$

Los numeradores deben ser iguales, pero los denominadores no se pueden anular, por lo que las soluciones no pueden ser ni $-2/3$ ni 1:

$5x - 10 - (x^2 - x + 10x - 10) = -3x - 2 \Rightarrow 5x - 10 - x^2 + x - 10x + 10 = -3x - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2 - 4x + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} =-2 \\ =1 \end{array} \right.$

Pero $x = 1$ no es válida (anula el denominador) $\Rightarrow$ la única solución es $\boxed{x = -2}$.

3) Demostrar que es cierta la siguiente identidad cuando tiene sentido: *(2 puntos)*

$$2 + \frac{\text{tg } a \text{ sen } 2a}{(1-\text{ sen } a)(1+\text{ sen } a)} = \frac{2}{\cos^2 a}$$

Realizamos cambios en el primer miembro y usamos fórmulas trigonométricas:

$$2 + \frac{\text{tg } a \text{ sen } 2a}{(1-\text{ sen } a)(1+\text{ sen } a)} = 2 + \frac{\frac{\text{sen } a}{\cos a} 2\text{sen } a \cos a}{1-\text{ sen}^2 a} = 2 + \frac{2\text{sen}^2 a}{\cos^2 a} =$$

$$= 2 + 2\text{ tg}^2 a = 2(1 + \text{tg}^2 a) = 2\frac{1}{\cos^2 a} = \frac{2}{\cos^2 a} \qquad \blacksquare$$

4) Hallar las raíces quintas de $z = 2\sqrt{3} - 2i$ *(1,5 puntos)*

Pasamos z a forma polar:

- Módulo: $\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = 4$
- Argumento: $\alpha = \text{arctg } \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = 30^\circ$. Pero al ser la parte real positiva y la imaginaria negativa, estamos en el 4º cuadrante $\Rightarrow \alpha = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$

Por lo que hemos de hallar las raíces quintas de $z = 4_{330^\circ}$.

Módulo de las soluciones: $\sqrt[5]{4}$

Argumentos de las soluciones:

- $\alpha_1 = \dfrac{330^\circ}{5} + \dfrac{360^\circ}{5} \cdot 0 = 66^\circ \Rightarrow$ Solución 1: $\boxed{(\sqrt[5]{4})_{66^\circ}}$
- $\alpha_2 = \dfrac{330^\circ}{5} + \dfrac{360^\circ}{5} \cdot 1 = 138^\circ \Rightarrow$ Solución 2: $\boxed{(\sqrt[5]{4})_{138^\circ}}$
- $\alpha_3 = \dfrac{330^\circ}{5} + \dfrac{360^\circ}{5} \cdot 2 = 210^\circ \Rightarrow$ Solución 3: $\boxed{(\sqrt[5]{4})_{210^\circ}}$
- $\alpha_4 = \dfrac{330^\circ}{5} + \dfrac{360^\circ}{5} \cdot 3 = 282^\circ \Rightarrow$ Solución 4: $\boxed{(\sqrt[5]{4})_{282^\circ}}$
- $\alpha_5 = \dfrac{330^\circ}{5} + \dfrac{360^\circ}{5} \cdot 4 = 354^\circ \Rightarrow$ Solución 5: $\boxed{(\sqrt[5]{4})_{354^\circ}}$

5) Hallar el simétrico del punto $P(-2, -4)$ respecto de la recta r que tiene como vector de dirección $\vec{d} = (1, -2)$ y pasa por $A(1, -5)$. *(1,5 puntos)*

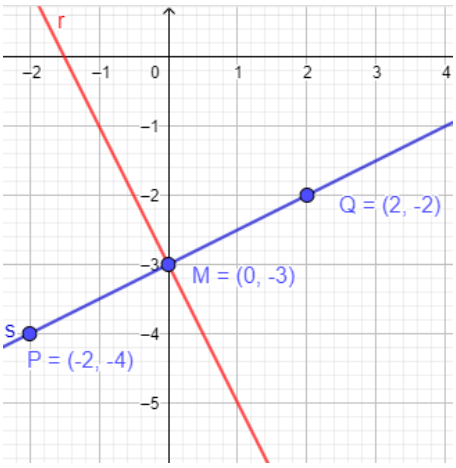
Hallemos la ecuación de la recta:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{-2} \Rightarrow -2x+2=y+5 \Rightarrow \boxed{y=-2x-3 \;\equiv r}$$

Paso 1: Perpendicular a r que pasa por $P(-2, -4)$. La pendiente de la perpendicular vale $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$. Así que, en forma punto-pendiente:

$$y+4=\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x-3 \;\equiv s}$$

Paso 2: Intersección de r y s:



Igualamos: $-2x-3=\frac{1}{2}x-3 \Rightarrow -4x=x \Rightarrow 0=5x$

$\Rightarrow x=\frac{0}{5}=0$

Sustituyendo en r: $y=-3$. Luego se cortan en $\boxed{M(0,-3)}$.

Paso 3: $M(0, -3)$ es el punto medio entre $P(-2, -4)$ y su simétrico $Q(x, y)$. Luego:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x-2}{2}=0 \Rightarrow x=2 \\ \frac{y-4}{2}=-3 \Rightarrow y-4=-6 \Rightarrow y=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{Q(2,-2)}$$

6) Dados los puntos $A(1, 5)$, $B(-3, 4)$ y $C(-2, 3)$, se pide: *(2 puntos)*

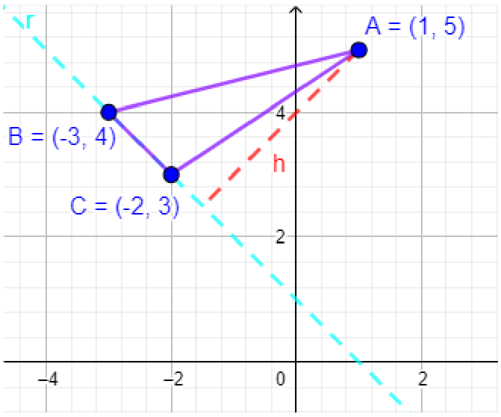
a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(1,5)-(-3,4)=(4,1)$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-2,3)-(-3,4)=(1,-1)$$
$$\boxed{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=}(4,1)+(1,-1)=\boxed{(5,0)}$$

b) Longitud del segmento BC.

$$\boxed{|\overrightarrow{BC}|=}\sqrt{1^2+1^2}=\boxed{\sqrt{2}\;\;u}$$

c) Distancia de A a la recta que pasa por B y C.



La recta es: $\frac{x+3}{-2+3}=\frac{y-4}{3-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x+3=-y+4 \Rightarrow \boxed{x+y-1=0 \;\equiv r}$

$$\boxed{d(A,r)=}\frac{|1+5-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\boxed{\frac{5}{\sqrt{2}}\;u}$$

d) Área del triángulo que forman.

La base es la longitud del segmento BC, antes calculada. Y la altura es la distancia de A a la recta que pasa por B y C, también calculada. Por consiguiente:

$$\boxed{A=}\frac{b\cdot h}{2}=\frac{\sqrt{2}\,\frac{5}{\sqrt{2}}}{2}=\boxed{\frac{5}{2}\;u^2}$$