IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**

Tercer trimestre - Primer examen – 1º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** Cuando se pida la ecuación de una recta, dar la solución final en **forma *general* o *explícita***.

1) a) Calcular algún vector $\bar{a}$ que sea perpendicular al que une los puntos $P(-6, -2)$ y $Q(2, 4)$. *(0,5 puntos)*
   b) Hallar el producto escalar de los vectores de posición de los puntos P y Q. *(0,5 ptos)*
2) Hallar la paralela a $r: 5x - 3y = -1$ que pasa por $(-7, 1)$ *(0,5 puntos)*
3) Hallar la perpendicular a $\frac{x}{-2} = \frac{y+3}{3}$ que pasa por $(-7, 1)$ *(0,5 puntos)*
4) Estudiar la posición relativa de las rectas siguientes. Si son paralelas, calcular la distancia entre ambas. Si se cortan, hallar el punto de intersección:
   a) $r: \begin{cases} x = t \\ y = -3 - 2t \end{cases}$ $s: \frac{x-4}{-1} = \frac{y+11}{2}$ *(0,6 puntos)*
   b) $r: y = 3x - 4$ $s: 6x - 2y + 1 = 0$ *(0,8 puntos)*
   c) $r: 3x - 4y = 11$ $s: 6x - 2y - 10 = 0$ *(0,6 puntos)*
5) Hallar el ángulo que forman las rectas $r: x - 2y + 1 = 0$ y $s: 4x - 3y + 1 = 0$ *(1 punto)*
6) Dados los puntos $A(-4, 2)$, $B(1, 4)$ y $C(3, -4)$, calcular:
   a) Distancia entre B y C. *(0,3 puntos)*
   b) Distancia de A a la recta que une B con C. *(1 punto)*
   c) Área del triángulo que forman *(0,2 puntos)*
7) Hallar la mediatriz del segmento delimitado por los puntos $(-7, 2)$ y $(-3, -6)$ *(1 pto)*
8) Encontrar el simétrico de $(8, 2)$ respecto de $3x - y - 2 = 0$ *(1,5 puntos)*
9) Hallar el centro y el radio de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) a) Calcular algún vector $\vec{a}$ que sea perpendicular al que une los puntos $P(–6, –2)$ y Q(2, 4). *(0,5 puntos)*

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2, 4) – (–6, –2) = (8, 6).$$

Invirtiendo el orden de las coordenadas y cambiando el signo de una de ellas obtenemos un vector perpendicular a éste: $\boxed{\vec{a} = (–6, 8)}$. Hay infinitos más, pero sólo nos piden alguno de ellos. El resto son proporcionales a éste.

b) Hallar el producto escalar de los vectores de posición de los puntos *P* y *Q*. *(0,5 ptos)*

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (–6, –2) \cdot (2, 4) = – 12 – 8 = \boxed{–20}$$

2) Hallar la paralela a $r : 5x – 3y = –1$ que pasa por (–7, 1) *(0,5 puntos)*

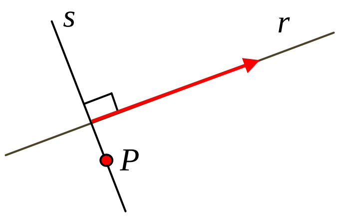
El vector normal a r es: $\vec{n} = (5, –3)$. Una paralela tendrá el mismo vector normal (o uno proporcional). Como debe pasar por (–7, 1), en forma *normal* será:

$$5(x + 7) – 3(y – 1) = 0 \Leftrightarrow 5x – 3y + 35 + 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{5x – 3y + 38 = 0}$$

3) Hallar la perpendicular a $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+3}{3}$ que pasa por (–7, 1) *(0,5 puntos)*

El vector de dirección de la recta dada (*r*), que es (–2, 3), será un vector *normal* de su recta perpendicular (*s*). Por tanto, en forma normal:

$$–2(x + 7) + 3(y – 1) = 0 \Leftrightarrow –2x + 3y – 14 – 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{–2x + 3y – 17 = 0} \equiv s$$



4) Estudiar la posición relativa de las rectas siguientes. Si son paralelas, calcular la distancia entre ambas. Si se cortan, hallar el punto de intersección:

a) $r : \begin{cases} x = t \\ y = -3 - 2t \end{cases}$ $\quad s : \dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y+11}{2}$ *(0,6 puntos)*

Tenemos la forma general de un punto de r: $(t, – 3 – 2t)$. Veamos si hay algún valor del parámetro t, que es quien proporciona todos y cada uno de los puntos de r, que haga que dicho punto esté en s. Esto es, que verifique la ecuación de s:

$$\frac{t-4}{-1} = \frac{-3-2t+11}{2} \Leftrightarrow 2t – 8 = 3 + 2t – 11 \Leftrightarrow 2t – 2t = – 8 + 8 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Y esta igualdad es cierta $\forall t$. Lo que significa que *todos los puntos de* r *están, también, en* s. Por tanto, $\boxed{\text{son la misma recta}}$.

b) $r : y = 3x – 4$ $\quad s : 6x – 2y + 1 = 0$ *(0,8 puntos)*

Resolvamos el sistema que forman sus respectivas ecuaciones, buscando algún punto en común a ambas rectas:

$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ 6x - 2y = -1 \end{cases}$ Sustituyendo la primera en la segunda: $6x – 2(3x – 4) = – 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6x – 6x + 8 = – 1 \Leftrightarrow 0 = – 9$$

Y esto no es cierto nunca. Por tanto, el sistema *no tiene solución*, lo que significa que las rectas no tienen intersección. Por ello, $\boxed{\text{son paralelas}}$.

Hemos de calcular, entonces, la distancia entre ambas. Las ponemos, para ello, en forma *general*, con *el mismo vector normal*:

r: $y = 3x - 4 \iff 3x - y - 4 = 0 \iff 6x - 2y - 8 = 0$

s: $6x - 2y + 1 = 0$

$$d(r, s) = \frac{|-8-1|}{\sqrt{6^2+2^2}} = \frac{9}{\sqrt{40}} = \frac{9}{2\sqrt{10}} = \boxed{\frac{9\sqrt{10}}{20}\ u}$$

c) $r:\ 3x - 4y = 11$ s: $6x - 2y - 10 = 0$ *(0,6 puntos)*

Como sus respectivos *vectores normales*: (3, –4) y (6, –2) || (3, –1) no son proporcionales (uno no es múltiplo del otro), las rectas tienen distinta dirección, por lo que $\boxed{\text{se cortan en un punto}}$.

Nos piden calcularlo, esto es, resolver el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ 6x - 2y = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ 3x - \quad y = 5 \end{cases} \quad \text{Restando: } 3y = -6 \Rightarrow y = -2$$

Sustituyendo en la primera: $3x + 8 = 11 \iff 3x = 3 \iff x = 1$.

De modo que $\boxed{\text{se cortan en } (1, -2)}$.

5) Hallar el ángulo que forman las rectas r: $x - 2y + 1 = 0$ y s: $4x - 3y + 1 = 0$ *(1 punto)*

Dicho ángulo es el que forman sus respectivos vectores normales (1, –2) y (4, –3). Despejando en la fórmula del producto escalar de dos vectores, será:

$$\cos\alpha = \frac{|(1,-2)(4,-3)|}{|(1,-2)|\cdot|(4,-3)|} = \frac{|4+6|}{\sqrt{1+4}\sqrt{16+9}} = \frac{10}{\sqrt{5}\sqrt{25}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 26{,}57^\circ = 26^\circ\ 33'\ 54{,}18''}$$

Tomamos valor absoluto del producto escalar del numerador para que nos resulte el menor de los dos ángulos que forman las rectas al cortarse.

6) Dados los puntos $A(-4, 2)$, $B(1, 4)$ y $C(3, -4)$, calcular:

a) Distancia entre B y C. *(0,3 puntos)*

Se trata del valor de la base del triángulo:

$$b = d(B, C) = \sqrt{(3-1)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = \sqrt{17\cdot 4} = 2\sqrt{17}\ u$$

b) Distancia de A a la recta que une B con C. *(1 punto)*

Esta distancia será la altura del triángulo. La ecuación de la recta que une B con C es, en forma continua:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-4}{-4-4} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-8} \Rightarrow -8\frac{x-1}{2} = y-4 \Rightarrow -4(x-1) = y-4$$

$$\Rightarrow -4x + 4 - y + 4 = 0 \Rightarrow -4x - y + 8 = 0 \equiv r$$

Por tanto: $h = d(A, r) = \dfrac{|-4\cdot(-4) - 2 + 8|}{\sqrt{(-4)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{22}{\sqrt{17}}\ u$

c) Área del triángulo que forman *(0,2 puntos)*

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{2\sqrt{17}\,\dfrac{22}{\sqrt{17}}}{2} = \boxed{22\ u^2}$$

7) Hallar la mediatriz del segmento delimitado por los puntos (–7, 2) y (–3, –6) *(1 pto)*

La mediatriz es la recta perpendicular al segmento en su punto medio. Dicho punto medio es $\left(\frac{-7-3}{2},\frac{2-6}{2}\right)$ = (–5, –2).

El vector que va de un punto a otro es normal a la mediatriz, ya que ésta es perpendicular al segmento. Dicho vector es: (–3–(–7), –6–2) = (4, –8) que es paralelo a (1, –2).

Por tanto, usando la ecuación en forma normal, la mediatriz es:

$$1(x-(-5))-2(y-(-2))=0 \;\Rightarrow\; x+5-2y-4=0 \;\Rightarrow\; \boxed{x-2y+1=0}$$

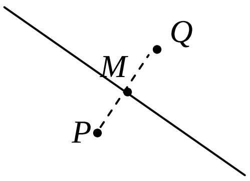
Otra solución sería utilizando que la mediatriz es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidistan de los extremos del segmento. Por tanto:

$$d(P, A) = d(P, B) \;\Rightarrow\; \sqrt{(x+7)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y+6)^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^2+14x+49+y^2-4y+4=x^2+6x+9+y^2+12y+36 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 14x-4y+53=6x+12y+45 \;\Rightarrow\; 8x-16y+8=0 \;\Rightarrow\; \boxed{x-2y+1=0}$$

8) Encontrar el simétrico de (8, 2) respecto de $3x - y - 2 = 0$ *(1,5 puntos)*



Llamemos P al punto (8, 2) y Q a su simétrico. Calcularemos la perpendicular a la recta que contiene a P (línea discontinua en el gráfico). La intersección de la recta y de su perpendicular es M, punto medio del segmento que va de P a su simétrico Q. Conocidos P y M obtendremos Q.

El vector normal de la recta dada, (3, –1), es de dirección de la perpendicular. Dicha perpendicular contiene al punto $P(8, 2)$. Luego su ecuación, en forma continua, es:

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y-2}{-1} \;\Rightarrow\; -x+8=3y-6 \;\Rightarrow\; x+3y-6-8=0 \;\Rightarrow\; \boxed{x+3y-14=0}$$

La intersección de ambas rectas es el punto medio M:

$$\left.\begin{array}{r}3x-y-2=0\\ x+3y-14=0\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; (1^a)\cdot 3:\; \left.\begin{array}{r}9x-3y-6=0\\ x+3y-14=0\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \text{Sumando: } 10x-20=0$$

$$\Rightarrow\; x = 2.$$

Sustituyendo en la 1ª: $y = 6 - 2 = 4$. Luego: $\boxed{M(2, 4)}$.

Como M es el punto medio entre $P(8, 2)$ y su simétrico $Q(x, y)$:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{8+x}{2}=2\\ \frac{2+y}{2}=4\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r}8+x=4\\ 2+y=8\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; x=-4,\; y=6 \;\Rightarrow\; \boxed{Q(-4, 6)}.$$

9) Hallar el centro y el radio de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ *(1 punto)*

Completando binomios al cuadrado:

$$x^2+y^2-6x+2y+1=0 \;\Rightarrow\; x^2-6x+y^2+2y+1=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^2-2\cdot 3x+3^2-3^2+y^2+2\cdot 1y+1^2-1^2+1=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (x-3)^2+(y+1)^2-9-1+1=0 \;\Rightarrow\; (x-3)^2+(y+1)^2=9$$

Por lo que $\boxed{\text{el radio de la circunferencia que nos dan es 3, y el centro (3, –1)}}$.

IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**

Tercer trimestre - Examen Global – 1º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN APROBADA

1) Estudiar la continuidad de $f(x)$, dando el valor de a para que sea continua en $x = 1$ y clasificando las discontinuidades: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x}{x+2}, & \text{si } x<1\\ x^2+a, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ *(1,5 puntos)*

2) Dar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 - x$ en $x = 2$ *(0,5 puntos)*

3) Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+2}{2x+1}\right)^{\frac{x-4}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2x}-2}$ *(1 punto)*

4) Derivar: $y=\ln\dfrac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}$; $y=e^{2x}(3x^4+1)$ *(1 punto)*

5) Estudiar y dibujar la gráfica de $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y'=\dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$; $y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$

Derivadas:	*1 punto*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*1 punto*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*1 punto*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1,5 puntos*

ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN SUSPENDIDA

1) Resolver la ecuación: $\log x^2 - 1 = \log\dfrac{10x+11}{10}$ *(1 punto)*

2) (Sólo se obtendrán puntos por la resolución si se llega a la solución final correcta completa). Aplicando el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método ni forma), clasificar y resolver el sistema adjunto. *(1 punto)*

$$\left.\begin{aligned}4x+3y+2z&=4\\ -3x+5y+5z&=2\\ 7x-2y-3z&=2\end{aligned}\right\}$$

3) Sabiendo que $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, siendo $x \in (0, \pi)$, hallar, *sin calculadora*: a) $\cos 2x$; b) $\operatorname{sen} 2x$; c) $\operatorname{tg}(x + \pi/3)$. *(1 punto)*

4) Resolver la ecuación: $z^3 = 15 - 15\sqrt{3}\,i$ *(1 punto)*

5) Derivar: $y=\ln\dfrac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}$; $y=e^{2x}(3x^4+1)$ *(1 punto)*

6) Estudiar y dibujar la gráfica de $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y'=\dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$; $y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$

Derivadas:	*1 punto*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*0,5 puntos*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*1 punto*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1 punto*

SOLUCIONES

ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN APROBADA

1) Estudiar la continuidad de $f(x)$, dando el valor de a para que sea continua en $x = 1$ y clasificando las discontinuidades: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{x+2}, & \text{si } x < 1 \\ x^2 + a, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ *(1,5 puntos)*

Nos piden el estudio completo de la continuidad. Así pues:

- $(-\infty, 1)$: f está definida mediante la función $y = \dfrac{x^2+2x}{x+2}$ que, al ser elemental, es continua en su dominio. Es decir, su única discontinuidad está en $x = -2$, punto que pertenece al intervalo que estudiamos, por lo que es discontinuidad de f. Veamos de qué tipo es:

$$1)\ \nexists f(-2);\quad 2)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{x+2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} x = -2$$

Como existe el límite, la discontinuidad en $x = -2$ es evitable.

- $(1, +\infty)$: f es continua, pues tiene expresión polinómica.
- $x = 1$: 1) $\exists\, f(1) = 1 + a$; 2) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+2x}{x+2} = \dfrac{3}{3} = 1$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2+a) = 1 + a$.

La función será continua en $x = 1$ cuando coincidan los tres resultados anteriores, es decir:

$$1 + a = 1 \Rightarrow a = 0.$$

En resumen, f será continua en $x = 1$ si, y sólo si $a = 0$, y tendrá siempre una discontinuidad *evitable* en $x = -2$. En el resto de R, es continua.

2) Dar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 - x$ en $x = 2$ *(0,5 puntos)*

- Punto de tangencia: si $x = 2 \Rightarrow f(2) = 4 - 2 = 2$: es $\boxed{(2, 2)}$.
- Pendiente de la tangente: Como $f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow m = f'(2) = 4 - 1 = \boxed{3}$.
- Recta tangente: $y - 2 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 6 + 2 \Rightarrow \boxed{y = 3x - 4}$.

3) Calcular $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+2}{2x+1}\right)^{\frac{x-4}{x-1}}$; $\lim_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2x}-2}$ *(1 punto)*

- $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2}{2x+1}\right)^{\frac{x-4}{x-1}} = (1^\infty) = e^{\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}\left(\frac{x^2+2}{2x+1}-1\right)} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}\cdot\frac{x^2+2-(2x+1)}{2x+1}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}\cdot\frac{x^2+2-2x-1}{2x+1}} =$$
$$= e^{\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{2x+1}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x-1}\cdot\frac{(x-1)^2}{2x+1}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{(x-4)(x-1)}{2x+1}} = e^{\frac{-3\cdot 0}{3}} = e^0 = \boxed{1}$$

- $$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{\sqrt{2x}-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{\sqrt{2x}-2}\,\frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2} = \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{2x})^2-2^2} =$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{2x})^2-2^2} = \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(\sqrt{2x}+2)}{2x-4} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)(\sqrt{2x}+2)}{2(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{-(-2+x)(2+x)(\sqrt{2x}+2)}{2(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-(2+x)(\sqrt{2x}+2)}{2} = \frac{-4(2+2)}{2} = \boxed{-8}$$

4) Derivar: $y = \ln\dfrac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}$; $y = e^{2x}(3x^4+1)$ *(1 punto)*

- $y = \ln\dfrac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}$ $\Rightarrow$ La simplificamos antes de proceder a derivar:

  $y = \ln (x-2)^3 - \ln \sqrt{2x-1} = 3 \ln (x-2) - \dfrac{1}{2}\ln(2x-1)$. De donde:

  $$y' = 3\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}\frac{2}{2x-1} = \boxed{\frac{3}{x-2} - \frac{1}{2x-1}} = \frac{3(2x-1)-(x-2)}{(x-2)(2x-1)} = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)} =$$

  $$= \boxed{\frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}} = \frac{5x-1}{2x^2-x-4x+2} = \boxed{\frac{5x-1}{2x^2-5x+2}}$$

  Cualquiera de las tres expresiones recuadradas valdría como final.

- $y = e^{2x}(3x^4+1) \Rightarrow y' = 2e^{2x}(3x^4+1)+e^{2x}12x^3 = e^{2x}[2(3x^4+1)+12x^3] =$

  $$= e^{2x}(6x^4+2+12x^3) = \boxed{e^{2x}(6x^4+12x^3+2)}$$

5) Estudiar y dibujar la gráfica de $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y' = \dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$; $y'' = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$

Derivadas:	*1 punto*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*1 punto*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*1 punto*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1,5 puntos*

1) Dominio: R – {1} ($x = 1$ anula el denominador, y no se puede dividir entre 0).

2) Par / Impar: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = \dfrac{-x^3}{[-(x+1)]^2} = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, que no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$. Luego no es par ni impar.

3) Cortes con los ejes: Si $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ Corta en (0, 0).
   Si $y = 0 \Rightarrow 0 = x^3 \Rightarrow x = 0$, que no anula el denominador $\Rightarrow$ (0, 0).

4) Asíntotas:

   a) AV: Probamos en el punto de discontinuidad: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \left(\dfrac{1}{0}\right) = \infty \Rightarrow$

   La recta $\boxed{x = 1}$ es AV.

   b) AH: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2-2x+1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty \Rightarrow$ No tiene.

c) AO: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2-2x+1)} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3-2x^2+x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1.$

$N = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2-2x+1} =$

$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$

Luego $y = 1\cdot x + 2$, es decir, $\boxed{y = x + 2}$ es A.O.

5) Monotonía:

Comenzamos calculando la derivada: $f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 2(x-1)\cdot 1}{[(x-1)^2]^2} =$

$= \frac{(x-1)[3x^2(x-1) - 2x^3]}{(x-1)^4} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \boxed{\frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}}$

Separamos R en intervalos mediante los puntos siguientes:

a) Discontinuidades de f: $x = 1$.

b) Discontinuidades de f': $x = 1$.

c) Puntos que anulan f': $x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$

Los puntos obtenidos son 0, 1 y 3. Mediante ellos, dividimos R en intervalos para estudiar el signo de f ' y, de ahí, deducir la monotonía de f:

	$(-\infty, 0)$	0	(0, 1)	1	(1, 3)	3	$(3, +\infty)$
f'	+	0	+	∄	–	0	+
f	↗(crec)	tg hor	↗(crec)	∄	↘(decrec)	mín	↗(crec)

En $x = 0$ la función tiene tangente horizontal. Y las coordenadas del mínimo obtenido son:

- Si $x = 3 \Rightarrow f(3) = \frac{3^3}{(3-1)^2} = \frac{27}{4} = 6{,}75 \Rightarrow$ mín en (3, 6.75)

6) Curvatura:

Comenzamos calculando la derivada segunda:

$f''(x) = \frac{(3x^2-6x)(x-1)^3 - (x^3-3x^2)3(x-1)^2\cdot 1}{[(x-1)^3]^2} =$

$= \frac{(x-1)^2[(3x^2-6x)(x-1) - 3(x^3-3x^2)]}{(x-1)^6} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 6x - 3x^3 + 9x^2}{(x-1)^4} =$

$$= \boxed{\frac{6x}{(x-1)^4}}$$

Separamos R en intervalos mediante los puntos siguientes:

a) Discontinuidades de f y f': 1.

b) Discontinuidades de f'': 1.

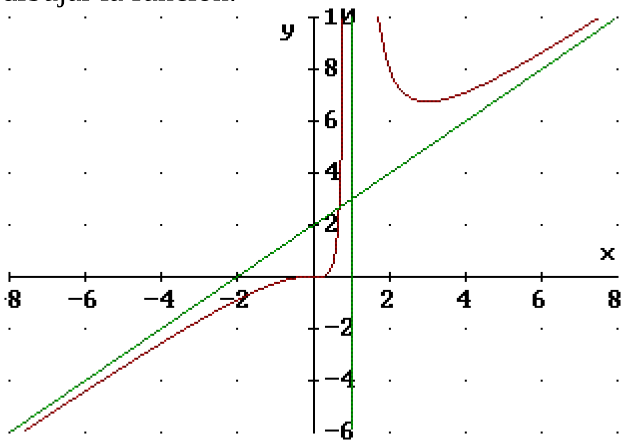
c) Puntos que anulan f'': $6x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Dividimos R en intervalos mediante los puntos obtenidos: 0 y 1. Creamos el cuadro correspondiente, para estudiar el signo de f'', el cual es el mismo dentro de cada uno de los intervalos resultantes.El signo de f'' nos dice la curvatura de f:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f''	–	0	+	$\nexists$	+
f	$\cap$ (cóncava)	P.I.	$\cup$ (convexa)	$\nexists$	$\cup$ (convexa)

El punto de inflexión es (0, 0), puesto que $f(0) = 0$.

7) Gráfica: Utilizando todos los resultados anteriores, y completando, si es necesario, con una pequeña tabla de valores, obtenemos la gráfica de la función, que es la siguiente. En el dibujo se han incluido las asíntotas, en color verde, que sirven de ayuda para dibujar la función.



ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN SUSPENDIDA

1) Resolver la ecuación: $\log x^2 - 1 = \log \frac{10x+11}{10}$ *(1 punto)*

Como no podemos ponerlo todo en función de $\log x$, vamos a intentar eliminar los logaritmos:

$$\log x^2 - 1 = \log \frac{10x+11}{10} \Rightarrow \log x^2 - \log 10 = \log \frac{10x+11}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \frac{x^2}{10} = \log \frac{10x+11}{10} \Rightarrow \frac{x^2}{10} = \frac{10x+11}{10} \Rightarrow x^2 - 10x - 11 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100+44}}{2} = \frac{10 \pm 12}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{-2}{2} = -1 \\ = \frac{22}{2} = 11 \end{array} \right.$$

Ninguna de las dos hace 0 ni negativo ningún argumento de logaritmos en la ecuación original, por lo que son válidas: $\boxed{x = -1 \text{ ó } x = 11}$.

2) (Sólo se obtendrán puntos por la resolución si se llega a la solución final correcta completa). Aplicando el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método ni forma), clasificar y resolver el sistema siguiente. *(1 punto)*

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y+2z&=4\\ -3x+5y+5z&=2\\ 7x-2y-3z&=2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4\\ -3 & 5 & 5 & 2\\ 7 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[4F_3-7F_1]{4F_2+3F_1} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4\\ 0 & 29 & 26 & 20\\ 0 & -29 & -26 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4\\ 0 & 29 & 26 & 20\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es un $\boxed{\text{sistema compatible indeterminado}}$, en el que puede eliminarse la fila 3. Reconstruimos el sistema y resolvemos. Para ello, llamamos $z = t$ (podríamos también haber elegido $y = t$, pero nos conviene dejar las soluciones en función de z porque nos piden una con un valor determinado de z):

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y&=4-2t\\ 29y&=20-26t \end{aligned}\right\}$$

2ª ec: $y = \dfrac{20-26t}{29}$

1ª ec: $4x + 3\dfrac{20-26t}{29} = 4 - 2t \Rightarrow 4x = 4-2t-\dfrac{60-78t}{29} =$

$= \dfrac{116-58t-60+78t}{29} = \dfrac{56+20t}{29} \Rightarrow x = \dfrac{14+5t}{29}$

Solución general: $\boxed{\left(\dfrac{14+5t}{29}, \dfrac{20-26t}{29}, t\right)}$

3) Sabiendo que $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, siendo $x \in (0, \pi)$, hallar, *sin calculadora*: a) $\cos 2x$; b) $\operatorname{sen} 2x$; c) $\operatorname{tg}(x + \pi/3)$. *(1 punto)*

En primer lugar, como el coseno es negativo y el ángulo se encuentra en el primer o segundo cuadrante, no queda más posibilidad que estemos en el *segundo cuadrante*. Calculamos, primeramente, el seno, considerando que debe ser positivo en el cuadrante en el que se halla:

$$\operatorname{sen} x = +\sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

a) $\boxed{\cos 2x =} \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3} = \boxed{-\dfrac{1}{3}}$

b) $\boxed{\text{sen } 2x =}$ $2 \text{ sen } x \cos x = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

c) Se tiene que: $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{2}$

Por tanto: $\boxed{\text{tg}(x + \pi/3) =}$ $\frac{\text{tg } x + \text{tg}\frac{\pi}{3}}{1 - \text{tg } x \, \text{tg}\frac{\pi}{3}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{6}}}$

4) Resolver la ecuación: $z^3 = 15 - 15\sqrt{3}\, i$ *(1 punto)*

Despejando: $z = \sqrt[3]{15-15\sqrt{3}i}$. Para calcular una raíz de un número complejo, tenemos que tenerlo en forma polar. Convirtámoslo:

$$r = \sqrt{15^2 + \left(15\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{225+225\cdot 3} = \sqrt{4\cdot 225} = 2\cdot 15 = 30$$

$\text{tg } \varphi = \frac{15\sqrt{3}}{15} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$. Como la parte real es positiva: 15 y la imaginaria, negativa: $-15\sqrt{3}$, estamos en el 4º cuadrante $\Rightarrow \alpha = 300^\circ$.

Por tanto, $z = \sqrt[3]{30_{300^\circ}}$.

El módulo de las tres soluciones será $\sqrt[3]{30}$. Los argumentos:

$$\alpha_1 = \frac{300}{3} + \frac{360}{3}0 = 100^\circ$$

$$\alpha_2 = \frac{300}{3} + \frac{360}{3}1 = 220^\circ$$

$$\alpha_3 = \frac{300}{3} + \frac{360}{3}2 = 340^\circ$$

Las tres soluciones son, entonces: $\boxed{\left(\sqrt[3]{30}\right)_{100^\circ};\ \left(\sqrt[3]{30}\right)_{220^\circ};\ \left(\sqrt[3]{30}\right)_{340^\circ}}$

5) Derivar: $y = \ln\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}$; $y = e^{2x}(3x^4+1)$ *(1 punto)*

Está resuelto en la parte correspondiente a alumnos con la 2ª evaluación aprobada.

6) Estudiar y dibujar la gráfica de $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y' = \frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$; $y'' = \frac{6x}{(x-1)^4}$

Derivadas:	*1 punto*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*0,5 puntos*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*1 punto*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1 punto*

Está resuelto en la parte correspondiente a los alumnos con la 2ª evaluación aprobada.

IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**
Tercer trimestre – Recuperación por trimestres – 1º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras, **ni las de un trimestre con las de otro**. **5)** Los alumnos que se examinan de 2 ó más evaluaciones, pueden eliminar, si quieren, un problema de entre el 4, 5 y 6 (a elegir) y el problema 10 y se les calificará proporcionalmente.

TRIMESTRES DE LOS QUE SE EXAMINA: ☐PRIMERO ☐SEGUNDO ☐TERCERO

---

1) Clasificar y resolver el siguiente sistema, aplicando el método de Gauss en su forma matricial. Si tuviese más de una solución, escribir dos soluciones concretas: *(3,5 ptos)*

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y+2z&=4\\ -3x+2y+5z&=8\\ -5x+9y+17z&=28 \end{aligned}\right\}$$

2) Resolver la ecuación: $\log(2x^2 - 1) - \log(3x + 2) = 1 - \log 50$ *(3 puntos)*

3) Resolver el sistema: $\left.\begin{aligned} -2x^2+8&>0\\ 3x-2&\le\frac{x}{3}-1 \end{aligned}\right\}$ *(3,5 puntos)*

---

4) Resolver un triángulo conociendo que $a = 12$, $b = 5$ y $A = 120º$. *(2,5 puntos)*

5) Demostrar que es cierta la siguiente identidad para todos los ángulos para los que tenga sentido: $(\text{sen}\ \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\ \text{tg}\ \alpha \cos^2\alpha$ *(2,5 puntos)*

6) Sin usar calculadora (es decir, apoyándose en fórmulas de trigonometría y/o en las razones trigonométricas de ángulos conocidos, como 30º, 45º, etc.), hallar tg 15º, sen 75º, tg 300º. *(2,5 puntos)*

7) Sin usar calculadora, a) Realizar los cálculos en polares para hallar el resultado de: $\frac{-2+2i}{-1-\sqrt{3}i}$; b) Pasar a binómica $2_{120º}$ *(1,5+1 puntos)*

---

8) Hallar el simétrico de $A(-1, -3)$ respecto de la recta $2x + 5y - 12 = 0$ *(2 puntos)*

9) Derivar y simplificar: $y=\cos^3 2x$; $y=x\ln\sqrt{x-1}$; $y=\text{arcsen}\,(x-1)$; $y=e^{3\sqrt{x}}$ *(2 ptos)*

10) Hallar la(s) rectas tangente(s) a la función $f(x) = 3x^2 - 2x$ que sea(n) paralela(s) a la recta $4x - y + 3 = 0$. *(2 puntos)*

11) Para la función $f(x) = \frac{x^2+x}{x-1}$, se pide:

a) Dominio, intersecciones con los ejes y asíntotas. *(1 punto)*

b) Comprobar que $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ y estudiar su monotonía y extremos relativos. *(1 punto)*

c) Comprobar que $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$ y estudiar su curvatura y puntos de inflexión. *(1 punto)*

d) Gráfica, basada en el estudio anterior. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Clasificar y resolver el siguiente sistema, aplicando el método de Gauss en su forma matricial. Si tuviese más de una solución, escribir dos soluciones concretas: *(3,5 ptos)*

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y+\ \ 2z&=\ 4\\ -3x+2y+\ \ 5z&=\ 8\\ -5x+9y+17z&=28\end{aligned}\right\}$$

Escribimos la matriz ampliada y la triangularizamos. Recordemos: 1) En un sólo paso, se debe convertir toda una columna en 0, salvo una posición, y dicha columna no puede ser la última: C_4. 2) En cada paso, se utiliza siempre una única fila para hacer 0 las demás (por ej., en el primer paso es F_1. 3) El coeficiente de la fila sustituida es positivo (por ej., 3 y 1 en las operaciones del primer paso). 4) La fila usada para hacer 0 las demás posiciones de una misma columna, no se usa en ningún paso posterior (por ej. F_1 en el primer paso). Así:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4\\ -3 & 2 & 5 & 8\\ -5 & 9 & 17 & 28\end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{3F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4\\ -17 & 0 & 11 & 16\\ -17 & 0 & 11 & 16\end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4\\ -17 & 0 & 11 & 16\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Como tenemos *triangularizada* la matriz y podemos eliminar la F_3 por ser toda de 0, nos quedan menos ecuaciones (2) que incógnitas (3), por lo que estamos ante un **sistema compatible indeterminado**. Lo reconstruimos:

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y+2z&=4\\ -17x\qquad +11z&=16\end{aligned}\right\}$$

Llamamos $z = t$, siendo t un número arbitrario (ya no es incógnita), y lo pasamos al segundo miembro (también podríamos haber llamado $x = t$, pero no deberíamos hacerlo con y, porque perderíamos la triangularización):

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y&=4-2t\\ -17x\quad &=16-11t\end{aligned}\right\} \Rightarrow (2^{a}\text{ ec.}):\ x=\frac{16-11t}{-17}=\frac{-16+11t}{17}$$

Nunca debe dejarse, en una expresión final, un denominador negativo, por lo que hemos multiplicado numerador y denominador por –1 para evitarlo (al hacerlo, la expresión que tenemos tiene el mismo valor, pues –1/(–1) =1). Sustituimos en la 1ª ec:

$$4\frac{-16+11t}{17}+3y=4-2t \Rightarrow 4(-16+11t)+51y=68-34t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -64+44t+51y=68-34t \Rightarrow 51t=68+64-34t-44t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{132-78t}{51}=\frac{44-26t}{17}$$

Así, la estructura general de las soluciones es: $\boxed{\left(\frac{-16+11t}{17},\frac{44-26t}{17},t\right)}$.

Obtendremos dos soluciones concretas dando valores arbitrarios a t. Por ejemplo:

- $t = 3$: (1, –2, 3)
- $t = 0$: (–16/17, 44/17, 0)

2) Resolver la ecuación: $\log(2x^2 - 1) - \log(3x + 2) = 1 - \log 50$ *(3 puntos)*

Como no se puede simplificar el logaritmo de una suma (o resta), no podemos pretender aislar, y calcular, $\log x$. De modo que intentaremos quitar logaritmos:

$$\log(2x^2-1)-\log(3x+2)=1-\log 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(2x^2-1)-\log(3x+2)=\log 10-\log 50 \Rightarrow \log\frac{2x^2-1}{3x+2}=\log\frac{10}{50}$$

Usamos la propiedad de los logaritmos que dice que, si $x, y > 0$, entonces $\log x = \log y \Leftrightarrow x = y$:

$$\frac{2x^2-1}{3x+2}=\frac{1}{5} \Rightarrow 10x^2-5=3x+2 \Rightarrow 10x^2-3x-7=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+280}}{20}=\frac{3\pm 17}{20}=\left\langle \begin{array}{l} =-\dfrac{7}{10} \\ =1 \end{array}\right.$$

Comprobamos la validez sustituyendo en la ecuación original y comprobando que ni se anulan ni se hacen negativos los argumentos de los logaritmos que aparecen.

- $2\left(-\dfrac{7}{10}\right)^2-1=-0.02<0 \Rightarrow -\dfrac{7}{10}$ no es válida.
- $2\cdot 1^2-1>0$ y $3\cdot 1+2>0 \Rightarrow x=1$ es válida.

$\boxed{\text{La ecuación tiene una única solución: } x = 1}$.

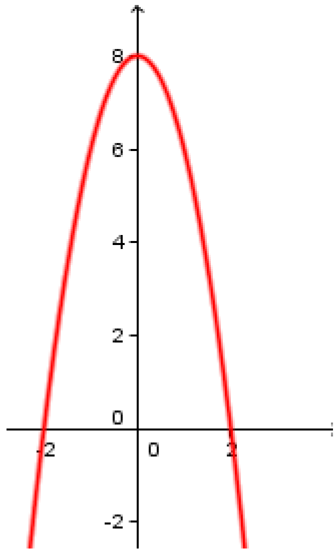
3) Resolver el sistema: $\left.\begin{array}{r} -2x^2+8>0 \\ 3x-2\le\dfrac{x}{3}-1 \end{array}\right\}$ *(3,5 puntos)*

Resolvemos cada inecuación por separado.

- $-2x^2+8>0$. Podríamos factorizar y crear un cuadro de signos. Pero una inecuación polinómica de segundo grado también se resuelve llamando $y=-2x^2+8$ y buscando los valores de x que hacen estrictamente positivo y. La ecuación anterior tiene, como gráfica, una parábola cóncava (pues el coeficiente de x^2 es negativo), y que corta al eje OX en:

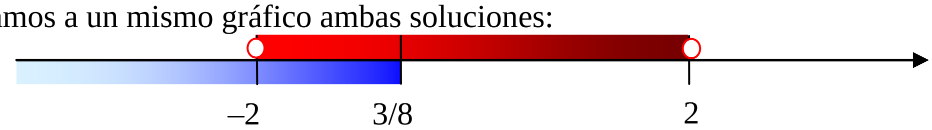
  $-2x^2+8=0 \Rightarrow 2x^2=8 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$: los cortes son $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

  Por consiguiente, un esbozo de su gráfica lo tenemos en el gráfico adjunto. De ahí deducimos que los valores de x que cumplen lo que antes dijimos y que, en consecuencia, resuelven la inecuación son los del conjunto $(-2, 2)$.



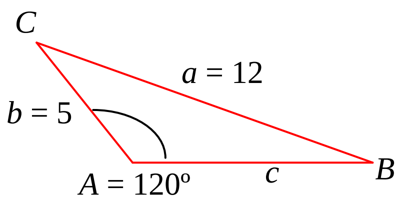
- $3x-2\le\dfrac{x}{3}-1 \Rightarrow 9x-6\le x-3 \Rightarrow 8x\le 3 \Rightarrow x\le 3/8$.

Llevamos a un mismo gráfico ambas soluciones:



Las dos condiciones deben cumplirse simultáneamente. Por tanto, la solución del sistema es la parte común a ambas, es decir: $\boxed{(-2, 3/8]}$.

4) Resolver un triángulo conociendo que $a = 12$, $b = 5$ y $A = 120º$. *(2,5 puntos)*



Por el Teorema de los Senos:

$$\frac{12}{\text{sen}\,120º} = \frac{5}{\text{sen}\,B} \Rightarrow \text{sen}\ B = \frac{5\sqrt{3}/2}{12} \Rightarrow$$

$B = 21.15º = 21º\ 9'\ 7.32''$ ó $B = 180º - 21.15º = 158.85º$. Pero ésta última no es válida, puesto que $158.85º + 120º > 180º$, y los tres ángulos de un triángulo suman 180º. Por tanto:

$$\boxed{B = 21.15º = 21º\ 9'\ 7.32''}$$

De aquí: $\boxed{C =}\ 180º - (A + B) = 180º - (120º + 21.15º) = 38.85º = \boxed{38º\ 50'\ 52.68''}$

Por último, por el Teorema del Coseno:

$$\boxed{c =}\ \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} = \sqrt{144 + 25 - 2{\cdot}12{\cdot}5{\cdot}\cos 38.85º} = \boxed{8.69}$$

5) Demostrar que es cierta la siguiente identidad para todos los ángulos para los que tenga sentido: $(\text{sen}\ \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\ \text{tg}\ \alpha \cos^2\alpha$ *(2,5 puntos)*

Recordemos que: $\text{sen}^2\ \alpha = (\text{sen}\ \alpha)^2$, y lo mismo ocurre con cualquier función con *nombre* y *argumento* elevada a una potencia. Desarrollamos ambos miembros por separado hasta llegar a la misma expresión:

$$(\text{sen}\ \alpha + \cos \alpha)^2 = \text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha + 2\ \text{sen}\ \alpha \cos \alpha = 1 + 2\ \text{sen}\ \alpha \cos \alpha$$

$$1 + 2\ \text{tg}\ \alpha \cos^2\alpha = 1 + 2\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\cos^2\alpha = 1 + 2\ \text{sen}\ \alpha \cos \alpha$$

Por tanto, la igualdad es siempre cierta, cuando tenga sentido.

6) Sin usar calculadora (es decir, apoyándose en fórmulas de trigonometría y/o en las razones trigonométricas de ángulos conocidos, como 30º, 45º, etc.), hallar tg 15º, sen 75º, tg 300º. *(2,5 puntos)*

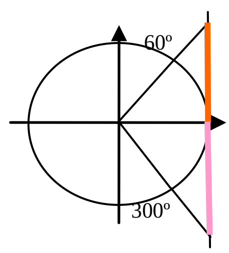
- $\boxed{\text{tg}\ 15º =}\ \text{tg}\ (45º - 30º) = \dfrac{\text{tg}\,45º - \text{tg}\,30º}{1 + \text{tg}\,45º\,\text{tg}\,30º} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1{\cdot}\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}\dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} =$

$$= \frac{1 + \frac{3}{9} - 2\frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{3}{9}} = \frac{\frac{9 + 3 - 6\sqrt{3}}{9}}{\frac{9-3}{9}} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = \boxed{2 - \sqrt{3}}$$

- $\boxed{\text{sen}\ 75º =}\ \text{sen}\ (45º + 30º) = \text{sen}\ 45º \cos 30º + \cos 45º\ \text{sen}\ 30º =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

- $\boxed{\text{tg}\ 300º =}\ -\text{tg}\ 60º = \boxed{-\sqrt{3}}$ (ver gráfico adjunto)



7) Sin usar calculadora, a) Realizar los cálculos en polares para hallar el resultado de: $\dfrac{-2 + 2i}{-1 - \sqrt{3}i}$; b) Pasar a binómica $2_{120º}$ *(1,5+1 puntos)*

a) Si $z = -2 + 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ$ ó $\alpha = 315^\circ$. Como la parte real es negativa y la imaginaria, positiva, el complejo está en el II cuadrante, por lo que $\alpha = 135^\circ$. En definitiva, $\boxed{z = -2 + 2i = (2\sqrt{2})_{135^\circ}}$.

Por otra parte, si $z' = -1 - \sqrt{3}\,i \Rightarrow |z'| = \sqrt{1+3} = 2$.

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ ó $\alpha = 240^\circ$. Como tanto parte real como imaginaria son negativas, $\alpha = 240^\circ$. Por tanto: $\boxed{z' = -1 - \sqrt{3}\,i = 2_{240^\circ}}$.

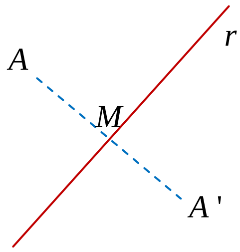
Por tanto: $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{-2+2i}{-1-\sqrt{3}i} = \dfrac{(2\sqrt{2})_{135^\circ}}{2_{240^\circ}} = \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{2}\right)_{135^\circ-240^\circ} = (\sqrt{2})_{-105^\circ} =$

$= (\sqrt{2})_{-105^\circ+360^\circ} = \boxed{(\sqrt{2})_{255^\circ}}$.

b) $2_{120^\circ} = 2(\cos 120^\circ + i \text{ sen } 120^\circ) = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{-1 + i\sqrt{3}}$.

---

8) Hallar el simétrico de $A(-1, -3)$ respecto de la recta $2x + 5y - 12 = 0$ *(2 puntos)*



- Calculamos la recta s perpendicular a r que pasa por A (dibujada en trazo discontinuo azul). Su vector *de dirección* será el *normal* de r, es decir: (2, 5). Y como pasa por $A(-1, -3)$:

  $s \equiv \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+3}{5} \Leftrightarrow 5x + 5 = 2y + 6 \Leftrightarrow \boxed{5x - 2y - 1 = 0}$

- Calculamos el punto M intersección de r y s, resolviendo el sistema formado por ambas rectas:

  $$\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 25y = 60 \\ -10x + 4y = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Sumando: } 29y = 58 \Rightarrow y = 2$$

  Sustituyendo en la primera: $2x + 10 = 12 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$.
  Por tanto, $\boxed{M(1, 2)}$.

- $M(1, 2)$ es el punto medio entre $A(-1, -3)$ y su simétrico $A'(a, b)$. Luego:

  $$\begin{cases} \dfrac{-1+a}{2} = 1 \Rightarrow -1 + a = 2 \Rightarrow a = 3 \\ \dfrac{-3+b}{2} = 2 \Rightarrow -3 + b = 4 \Rightarrow b = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A'(3, 7)}.$$

9) Derivar y simplificar: $y = \cos^3 2x$; $y = x \ln\sqrt{x-1}$; $y = \text{arcsen}\,(x-1)$; $y = e^{3\sqrt{x}}$ *(2 ptos)*

a) $y = \cos^3 2x \Rightarrow y' = 3\cos^2 2x\,(-2\text{sen } 2x) = \boxed{-6 \text{ sen } 2x \cos^2 2x}$

b) $y = x\ln\sqrt{x-1} = \dfrac{1}{2}x\ln(x-1) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2}\ln(x-1) + \dfrac{1}{2}x\dfrac{1}{x-1} =$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(\ln(x-1) + \frac{x}{x-1}\right)}$$

c) $y = \text{arcsen}\,(x-1) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2-2x+1)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2+2x-1}} =$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}}$$

d) $y = e^{3\sqrt{x}} \Rightarrow y' = 3\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{3\sqrt{x}} = \boxed{\frac{3e^{3\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}$

10) Hallar la(s) rectas tangente(s) a la función $f(x) = 3x^2 - 2x$ que sea(n) paralela(s) a la recta $4x - y + 3 = 0$. *(2 puntos)*

La pendiente de la recta $4x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 4x + 3$ vale 4. Para ser paralelas, las tangentes que nos piden deben tener 4 por pendiente. Y la pendiente de la tangente en un punto $(x, f(x))$ vale $m = f'(x)$. Luego hemos de buscar los valores de x tales que $f'(x) = 4$.

Como $f'(x) = 6x - 2$, esto se traduce en $6x - 2 = 4 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$.

- Punto de tangencia: $f(1) = 1 \Rightarrow (1, 1)$.
- Pendiente de la tangente: $m = f'(1) = 4$
- Recta tangente: $y - 1 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x - 4 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 4x - 3}$.

11) Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$, se pide:

a) Dominio, intersecciones con los ejes y asíntotas. *(1 punto)*

- $\boxed{D(f) = R - \{1\}}$, pues 1 anula el denominador.
- Intersecciones con los ejes:
  - $x = 0 \Rightarrow y = 0$: $\boxed{(0, 0)}$.
  - $y = 0 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = -1$, y ambas son válidas porque no anulan el denominador: $\boxed{(-1, 0) \text{ y } (0, 0)}$.
- Asíntotas:
  - AV: La única discontinuidad está en $x = 1$. Como $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x-1} = \left(\dfrac{2}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{La recta } x = 1 \text{ es asíntota vertical}}$.
  - AH: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x-1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{No tiene AH}}$.
  - AO: $m = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2+x}{x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2} = 1$

    $n = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-(x^2-x)}{x-1} =$

    $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x-1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x} = 2$

    Por tanto, $\boxed{y = x + 2 \text{ es A.O.}}$

b) Comprobar que $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ y estudiar su monotonía y extremos relativos. *(1 punto)*

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x+x-1-x^2-x}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

- Discontinuidades de f ó f': $x = 1$.

- Puntos que anulan f': $x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

	$(-\infty, 1-\sqrt{2})$	$1-\sqrt{2}$	$(1-\sqrt{2}, 1)$	1	$(1, 1+\sqrt{2})$	$1+\sqrt{2}$	$(1+\sqrt{2}, +\infty)$
f'	+	0	–	∄	–	0	+
f	↗(crec)	Máx	↘(decrec)	∄	↘(decrec)	mín	↗(crec)

$\boxed{\text{Máximo en (aprox.): (–0.41, 0.17). Mínimo en (aprox.): (2.41, 5.83)}}$.

c) Comprobar que $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$ y estudiar su curvatura y puntos de inflexión.

(1 punto)

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)[(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x-1)]}{(x-1)^4} = \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x+2}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{4}{(x-1)^3}$$

- Discontinuidades de f, f' ó f'': $x = 1$.
- Puntos que anulan f'': No hay

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f''	–	∄	+
f	∩ (cóncava)	∄	∪ (convexa)

$\boxed{\text{No tiene puntos de inflexión}}$.

d) Gráfica, basada en el estudio anterior. *(1 punto)*

En verde hemos dibujado las asíntotas.