

NOMBRE: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz, y el bolígrafo debe ser de tinta indeleble. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) Desatender las instrucciones puede penalizarse con la anulación del ejercicio o, incluso, de la prueba completa.

En el ejercicio 1 hay que obtener una puntuación mínima de 1.2 puntos. De lo contrario, la calificación máxima de la prueba es 4.4.

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: (2 puntos)

a)  $y = 2^x \cos(5x^3 - 2)$     b)  $y = \ln \sqrt[5]{\frac{6x^3}{(5-2x)^4}}$     c)  $y = \arctg e^{3x}$     d)  $y = \log(2x^4 + 1)$

2) Estudiar la continuidad de la siguiente función, clasificando sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{(4-x)^2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{3x}{8-x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (2 \text{ puntos})$$

3) Hallar las tangentes a  $y = x^3 - 2x + 1$  paralelas a  $x - y - 3 = 0$ . (2 puntos)

4) Realizar un estudio completo y representar gráficamente la función  $f(x) = \frac{-4x}{(x+1)^2}$ ,

comprobando previamente que sus derivadas son

$$f'(x) = \frac{4x-4}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{-8x+16}{(x+1)^4}$$

Derivadas:	0,4 puntos
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	0,3 puntos
Asíntotas:	0,5 puntos
Monotonía/Extr. relativos:	0,9 puntos
Curvatura/P.Inflexión:	0,9 puntos
Gráfica (tras estudio anterior):	1 punto

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: (2 puntos)

a)  $y = 2^x \cos(5x^3 - 2)$

$$y' = 2^x \cos(5x^3 - 2) \ln 2 - 2^x \sin(5x^3 - 2) 15x^2 =$$

$$= 2^x [\cos(5x^3 - 2) \ln 2 - 15x^2 \sin(5x^3 - 2)]$$

b)  $y = \ln \sqrt[5]{\frac{6x^3}{(5-2x)^4}}$

$$y = \ln \sqrt[5]{\frac{6x^3}{(5-2x)^4}} = \frac{1}{5} \ln \frac{6x^3}{(5-2x)^4} = \frac{1}{5} [\ln 6x^3 - \ln(5-2x)^4] =$$

$$= \frac{1}{5} [\ln 6 + \ln x^3 - 4 \ln(5-2x)] = \frac{1}{5} [\ln 6 + 3 \ln x - 4 \ln(5-2x)] \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{5} \left[ 0 + \frac{3}{x} - 4 \frac{-2}{5-2x} \right] = \frac{1}{5} \left[ \frac{3}{x} + \frac{8}{5-2x} \right]$$

c)  $y = \operatorname{arctg} e^{3x}$

$$y' = \frac{3e^{3x}}{1+(e^{3x})^2} = \frac{3e^{3x}}{1+e^{6x}}$$

d)  $y = \log(2x^4 + 1)$

$$y' = \frac{8x^3}{2x^4 + 1} \frac{1}{\ln 10}$$

2) Estudiar la continuidad de la siguiente función, clasificando sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{(4-x)^2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{3x}{8-x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (2 \text{ puntos})$$

- $(-\infty, 1)$ :  $f$  coincide con la función  $y = \frac{2x}{(4-x)^2}$  que, al ser elemental, es continua en su dominio. Como el denominador sólo se anula en  $x = 4$ , dicho valor es su única discontinuidad. Pero  $4 \notin (-\infty, 1)$ , por lo que es discontinuidad de esta última función, pero no de  $f$ .  $\Rightarrow$   $f$  es continua en este intervalo.

- $(1, +\infty)$ :  $f$  coincide con  $y = \frac{3x}{8-x}$ , que es continua salvo en 8, punto que está en este intervalo. Veamos de qué tipo es la discontinuidad:

$$1) \nexists f(8); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{3x}{8-x} = \left( \frac{24}{0} \right) = \infty. \quad \text{Como } \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{3x}{8-x} = \left( \frac{+}{+} \right) = +\infty \text{ y}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{3x}{8-x} = \left( \frac{+}{-} \right) = -\infty, \text{ se trata de una } \underline{\text{discontinuidad asintótica de salto infinito.}}$$

- $x = 1$ : 1)  $\exists f(1) = \frac{2 \cdot 1}{(4-1)^2} = \frac{2}{9}$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{(4-x)^2} = \frac{2}{9}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x}{8-x} = \frac{3}{7}$ . Como los límites laterales no coinciden, es una discontinuidad de salto finito.

En resumen,  $f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{1, 8\}$ , con discontinuidad de salto finito en  $x = 1$  y asíntota de salto infinito en  $x = 8$ .

3) Hallar las tangentes a  $y = x^3 - 2x + 1$  paralelas a  $x - y - 3 = 0$ . (2 puntos)

Dos rectas son paralelas si, y sólo si tienen la misma pendiente. La recta que nos dan es  $y = x - 3$ , por lo que su pendiente es 1. Buscamos, pues, tangentes a la función dada que tengan pendiente 1. La pendiente de la recta en un punto de abscisa  $x$  vale  $f'(x) = 3x^2 - 2$ . Luego los  $x$  buscados son:

$$3x^2 - 2 = 1 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1$$

Por lo que hay dos puntos en los que ocurre la condición pedida.

- $x = -1$ :
  - Punto de tangencia:  $f(-1) = (-1)^3 - 2(-1) + 1 = 2 \Rightarrow$  es  $(-1, 2)$ .
  - Pendiente de la tangente:  $m = f'(-1) = 1$ .
  - Ecuación de la tangente:  $y - 2 = 1(x + 1) \Leftrightarrow \boxed{y = x + 3}$ .
- $x = 1$ :
  - Punto de tangencia:  $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow$  es  $(1, 0)$ .
  - Pendiente de la tangente:  $m = f'(1) = 1$ .
  - Ecuación de la tangente:  $y - 0 = 1(x - 1) \Leftrightarrow \boxed{y = x - 1}$ .

4) Realizar un estudio completo y representar gráficamente la función  $f(x) = \frac{-4x}{(x+1)^2}$ ,

comprobando previamente que sus derivadas son

$$f'(x) = \frac{4x-4}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{-8x+16}{(x+1)^4}$$

<i>Derivadas:</i>	0,4 puntos
<i>Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:</i>	0,3 puntos
<i>Asíntotas:</i>	0,5 puntos
<i>Monotonía/Extr. relativos:</i>	0,9 puntos
<i>Curvatura/P. Inflexión:</i>	0,9 puntos
<i>Gráfica (tras estudio anterior):</i>	1 punto

Comencemos derivando:

$$\boxed{f'(x)} = \frac{-4(x+1)^2 + 4x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)[-4(x+1) + 8x]}{(x+1)^4} = \frac{-4x - 4 + 8x}{(x+1)^3} = \boxed{\frac{4x-4}{(x+1)^3}}$$

$$\boxed{f''(x)} = \frac{4(x+1)^3 - (4x-4)3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{(x+1)^2[4(x+1) - 3(4x-4)]}{(x+1)^6} =$$

$$= \frac{4x+4-12x+12}{(x+1)^4} = \boxed{\frac{-8x+16}{(x+1)^4}}$$

1. Dominio:  $\boxed{\mathbb{R} - \{-1\}}$ , pues 1 anula el denominador. Aquí es continua, al ser elemental.
2. Par / Impar:  $f(-x) = \frac{-4(-x)}{(-x+1)^2} = \frac{4x}{(x-1)^2} \neq f(x), -f(x) \Rightarrow \boxed{\text{Ni par, ni impar}}$ .
3. Intersecciones con los ejes: Si  $x = 0 \Rightarrow y = 0$ :  $\boxed{(0, 0)}$ . Y si  $y = 0 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$ , válida, pues no anula el denominador. Da el mismo punto que antes.

4. Asíntotas:

- Verticales: El único punto de discontinuidad es  $x = -1$ . Y como  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4x}{(x+1)^2} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty \Rightarrow$  La recta de ec.  $x = -1$  es asíntota vertical.
- Horizontales:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{(x+1)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{x} = \left(\frac{-4}{\infty}\right) = 0 \Rightarrow$  La recta de ec.  $y = 0$  es asíntota horizontal.
- Oblicuas: Saldría la misma que la horizontal ya calculada.

5. Monotonía. Extremos relativos:

- Discontinuidades de  $f$ :  $x = -1$ .
- Discontinuidades de  $f'$ :  $x = -1$ .
- $f'(x) = 0$ :  $4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ .

Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos:

	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$f'$	$+$	$\exists$	$-$	$0$	$+$
$f$	$\nearrow$ (crec)	$\exists$	$\searrow$ (decrec)	mín	$\nearrow$ (crec)

Como  $f(1) = -1 \Rightarrow$  Tiene un mínimo relativo en  $(1, -1)$ .

6. Curvatura. Puntos de inflexión:

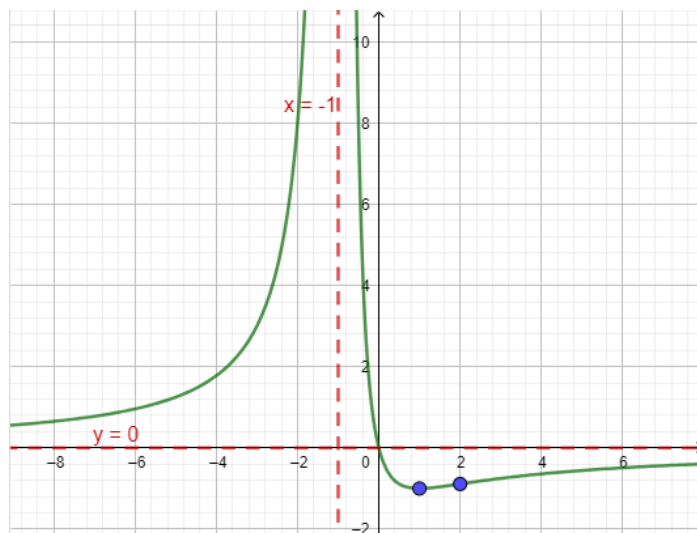
- Discontinuidades de  $f, f'$ :  $x = -1$ .
- Discontinuidades de  $f''$ :  $x = -1$ .
- $f''(x) = 0$ :  $-8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 2$ .

Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos:

	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 2)$	$2$	$(2, +\infty)$
$f'$	$+$	$\exists$	$+$	$0$	$-$
$f$	$\cup$ (convexa)	$\exists$	$\cup$ (convexa)	P.I.	$\cap$ (cóncava)

Como  $f(2) = -8/9 \Rightarrow$  Tiene un punto de inflexión en  $(2, -8/9)$ .

7. Gráfica



NOMBRE: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz, y el bolígrafo debe ser de tinta indeleble. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) Desatender las instrucciones puede penalizarse con la anulación del ejercicio o, incluso, de la prueba completa.

En el ejercicio 1 hay que obtener una puntuación mínima de 1.2 puntos. De lo contrario, la calificación máxima de la prueba es 4.4.

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: (2 puntos)

a)  $y = 2\sqrt[4]{4x^3}$     b)  $y = \operatorname{tg}(5x^3 + 1)$     c)  $y = e^x(4x^3 + 2)^3$     d)  $y = \ln \sqrt[5]{\frac{2x^3}{(5-2x)^3}}$

2) (Selectividad 2013) Sea  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de  $f$  tiene abscisa  $x = 1$  y que  $f$  tiene un mínimo relativo en  $x = 2$  de valor  $-9$ . Calcular  $a$ ,  $b$  y  $c$ . (1,5 puntos)

3) (Selectividad 2011) Dada la función  $f(x) = 4 - x^2$ , hallar la ecuación de la recta normal a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 2$ . (1 punto)

4) (Selectividad CCSS 2011) Estudiar la continuidad de la siguiente función según los valores de  $a$ , clasificando sus discontinuidades: (1,5 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ 4 - \frac{a}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

5) Realizar el estudio completo y la representación gráfica de  $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$  tras

comprobar que sus derivadas son  $f'(x) = \frac{-4x}{(x-2)^3}$  y

$$f''(x) = \frac{8x+8}{(x-2)^4}.$$

Derivadas:	0,4 puntos
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	0,3 puntos
Asíntotas:	0,5 puntos
Monotonía/Extr. relativos:	0,9 puntos
Curvatura/P.Inflexión:	0,9 puntos
Gráfica (tras estudio anterior):	1 punto

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones:

(2 puntos)

a)  $y = 2\sqrt[4]{4x^3}$

$$y' = 2 \frac{12x^2}{4\sqrt[4]{(4x^3)^3}} = \frac{6x^2}{\sqrt[4]{4^3 x^9}} = \frac{6x^2}{\sqrt[4]{(2^2)^3 x^8 x}} = \frac{6x^2}{x^2 \sqrt[4]{2^6 x}} = \frac{6}{2\sqrt[4]{2^2 x}} = \frac{3}{\sqrt[4]{4x}}$$

b)  $y = \operatorname{tg}(5x^3 + 1) \Rightarrow y' = \frac{15x^2}{\cos^2(5x^3 + 1)}$

c)  $y = e^x(4x^3 + 2)^3$

$$y' = e^x(4x^3 + 2)^3 + e^x 3(4x^3 + 2)^2 12x^2 = e^x (4x^3 + 2)^2 [(4x^3 + 2) + 36x^2] = \frac{e^x (4x^3 + 2)^2 (4x^3 + 36x^2 + 2)}$$

d)  $y = \ln \sqrt[5]{\frac{2x^3}{(5-2x)^3}} = \frac{1}{5} \ln \frac{2x^3}{(5-2x)^3} = \frac{1}{5} [\ln 2x^3 - \ln(5-2x)^3] =$

$$= \frac{1}{5} [\ln 2 + \ln x^3 - 3\ln(5-2x)] = \frac{1}{5} [\ln 2 + 3\ln x - 3\ln(5-2x)] \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{5} \left( 0 + \frac{3}{x} - 3 \frac{-2}{5-2x} \right) = \frac{1}{5} \left( \frac{3}{x} + \frac{6}{5-2x} \right)$$

2) (*Selectividad 2013*) Sea  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de  $f$  tiene abscisa  $x = 1$  y que  $f$  tiene un mínimo relativo en  $x = 2$  de valor  $-9$ . Calcular  $a$ ,  $b$  y  $c$ . (1,5 puntos)

Tenemos que:  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ ;  $f''(x) = 6x + 2a$ ;  $f'''(x) = 6$ .

- Punto de inflexión en  $x = 1$ : Para que lo tenga, es suficiente exigir dos cosas:

- 1)  $f''(1) = 0 \Leftrightarrow 6 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -3$ .

- 2)  $f'''(1) \neq 0 \Leftrightarrow 6 \neq 0$ , que se cumple.

- Mínimo relativo en  $x = 2$ : Para que así sea, es suficiente exigir dos cosas:

- 1)  $f'(2) = 0 \Leftrightarrow 12 + 4a + b = 0 \Leftrightarrow$  (como  $a = -3$ ):  $12 - 12 + b = 0 \Leftrightarrow b = 0$ .

- 2)  $f''(2) > 0 \Leftrightarrow 12 + 2a > 0 \Leftrightarrow$  (como  $a = -3$ ):  $12 - 6 > 0$ , que se cumple.

- El mínimo en  $x = 2$  tiene valor  $-9$ :  $f(2) = -9 \Leftrightarrow 8 + 4a + 2b + c = -9 \Leftrightarrow$  (como  $a = -3$  y  $b = 0$ ):  $8 - 12 + c = -9 \Leftrightarrow c = -5$ .

Luego  $a = -3, b = 0, c = -5$ , siendo  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$ .

3) (*Selectividad 2011*) Dada la función  $f(x) = 4 - x^2$ , hallar la ecuación de la recta normal a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 2$ . (1 punto)

- Punto de tangencia:  $f(2) = 4 - 4 = 0$ . Es  $(2, 0)$ .

- Pendiente de la tangente:  $f'(x) = -2x \Rightarrow m = f'(2) = -4$

- Pendiente de la normal:  $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$

- Ecuación de la normal:  $y - 0 = \frac{1}{4}(x - 2) \Rightarrow 4y = x - 2 \Rightarrow x - 4y - 2 = 0$ .

4) (*Selectividad CCSS 2011*) Estudiar la continuidad de la siguiente función según los valores de  $a$ , clasificando sus discontinuidades: (1,5 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ 4 - \frac{a}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- $(-\infty, 2)$ : Es continua en todo el intervalo, por tener expresión polinómica.
- $(2, +\infty)$ : Al coincidir con una función elemental, es continua en el dominio de ésta, que es  $\mathbb{R} - \{0\}$ , porque 0 anula el denominador. Pero 0 no está en este intervalo. Luego es continua en él.
- $x = 2$ : 1)  $\exists f(2) = 4 - 6 + 4 = 2$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x + 4) = 2$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(4 - \frac{a}{x}\right) = 4 - \frac{a}{2} = \frac{8-a}{2}$ . Será continua en  $x = 2$  cuando estos tres resultados coincidan, es decir:  $2 = \frac{8-a}{2} \Leftrightarrow 4 = 8 - a \Leftrightarrow a = 4$ . Y si esto no sucede, los límites laterales serán finitos pero distintos, por lo que tendrá una discontinuidad de salto finito.

En resumen, si  $a = 4$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ , y si  $a \neq 4$  tiene una discontinuidad de salto finito en  $x = 2$ .

5) Realizar el estudio completo y la representación gráfica de  $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$  tras

comprobar que sus derivadas son  $f'(x) = \frac{-4x}{(x-2)^3}$  y

$$f''(x) = \frac{8x+8}{(x-2)^4}$$

Derivadas:	0,4 puntos
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	0,3 puntos
Asíntotas:	0,5 puntos
Monotonía/Extr.relativos:	0,9 puntos
Curvatura/P.Inflexión:	0,9 puntos
Gráfica (tras estudio anterior):	1 punto

Derivadas

$$f'(x) = \frac{2x(x-2)^2 - x^2 \cdot 2(x-2) \cdot 1}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)[2x(x-2) - 2x^2]}{(x-2)^4} = \frac{2x^2 - 4x - 2x^2}{(x-2)^3} = \frac{-4x}{(x-2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-4(x-2)^3 + 4x \cdot 3(x-2)^2 \cdot 1}{[(x-2)^3]^2} = \frac{(x-2)^2[-4(x-2) + 12x]}{(x-2)^6} = \frac{-4x + 8 + 12x}{(x-2)^4} = \frac{8x+8}{(x-2)^4}$$

1. Dominio:  $\mathbb{R} - \{2\}$ , pues 2 anula el denominador. Aquí es continua.
2. Par / Impar:  $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x-2)^2} = \frac{(-x)(-x)}{[(-1)(x+2)]^2} = \frac{x^2}{(-1)^2(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+2)^2}$ , que no coincide ni con  $f(x)$  ni con  $-f(x)$ , por lo que no es par, ni impar.
3. Intersecciones con los ejes.
  - $x = 0 \Rightarrow y = 0$ :  $(0, 0)$ .
  - $y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ , válida porque no anula el denominador. Nos da el mismo punto que antes.

4. Asíntotas

- Verticales: Como 2 es la única discontinuidad,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \left(\frac{4}{0}\right) = \infty \Rightarrow$  la recta de ecuación  $x = 2$  es asíntota vertical.
- Horizontales:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + \dots} = 1 \Rightarrow$  la recta de ecuación  $y = 1$  es asíntota horizontal.
- Oblicuas: Saldría la horizontal ya calculada.

5. Monotonía. Extremos relativos.

- Discontinuidades de  $f$ :  $x = 2$ .
- Discontinuidades de  $f'$ :  $x = 2$ .
- $f'(x) = 0$ :  $\frac{-4x}{(x-2)^3} = 0 \Rightarrow x = 0$ , válida porque no anula el denominador.

Dividimos el dominio en intervalos por los puntos obtenidos, y vemos el signo de  $f'$  en cada uno de ellos, tomando para ello un valor cualquiera del intervalo:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'$	-	0	+	$\nexists$	-
$f$	$\searrow$ (decrec)	mín	$\nearrow$ (crec)	$\nexists$	$\searrow$ (decrec)

Como  $f(0) = 0$ , tiene un mínimo relativo en  $(0, 0)$ .

6. Curvatura. Puntos de inflexión.

- Discontinuidades de  $f, f', f''$ :  $x = 2$ .
- $f''(x) = 0$ :  $\frac{8x+8}{(x-2)^4} = 0 \Rightarrow x = -1$ , válida porque no anula el denominador.

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'$	-	0	+	$\nexists$	+
$f$	$\cap$ (cóncava)	P.I.	$\cup$ (convexa)	$\nexists$	$\cup$ (convexa)

Como  $f(-1) = 1/9$ , tiene un punto de inflexión en  $(-1, 1/9)$ .

7. Gráfica.

