**MATEMÁTICAS 1º BACH. CC. N. Y S.** 20 de octubre de 2008
**Trigonometría**

**Atención:** *Los resultados serán válidos sólo cuando los razonamientos empleados se incluyan. Todos los problemas valen 2 puntos.*

1) Sabiendo que $\alpha > 90º$ y que $\operatorname{tg}\alpha = 1/3$, calcular el resto de razones trigonométricas de $\alpha$ sin usar la calculadora. Posteriormente, decir el valor de $\alpha$ en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora.
2) El punto más alto de una elevación se ve, desde un punto del suelo, bajo un ángulo de 60º. Alejándose 20 *m* en línea recta con la base de dicha elevación, se ve bajo un ángulo de 30º. Averiguar la altura de la elevación.
3) Resolver un triángulo, del que conocemos $a = 4$ *m*, $b = 7$ *m* y $A = 30º$.
4) Sin usar la calculadora, decir el valor de: a) tg 1920º; b) sen (–765º).
5) Demostrar la siguiente identidad: $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$

## SOLUCIONES

1) Sabiendo que $\alpha > 90º$ y que $\text{tg } \alpha = 1/3$, calcular el resto de razones trigonométricas de $\alpha$ sin usar la calculadora. Posteriormente, decir el valor de $\alpha$ en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora.

Si $\alpha > 90º$ y $\text{tg } \alpha > 0 \Rightarrow \alpha$ está en el tercer cuadrante. Pues bien:

Como $1+\text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \dfrac{10}{9} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{9}{10}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{9}{10}} = -\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}} = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$, donde el signo – se debe a que estamos en el tercer cuadrante.

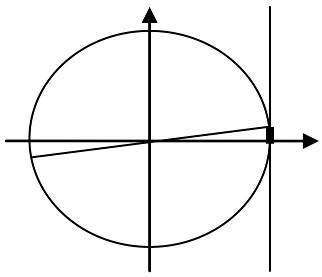
Por otra parte, $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\dfrac{1}{3}\dfrac{3}{\sqrt{10}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}} = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Las otras tres razones son:

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{-\dfrac{1}{\sqrt{10}}} = -\sqrt{10}$$

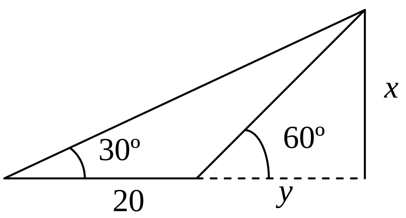
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-\dfrac{3}{\sqrt{10}}} = -\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{1}{\dfrac{1}{3}} = 3$$



Por último, como $\text{tg } \alpha = 1/3$, con la calculadora obtenemos que: $\alpha = 18{,}43º$. Trasladándolo al tercer cuadrante: $\alpha = 180º + 18{,}43º = 198{,}43º = 198º\ 26'\ 5{,}8''$ (Ver figura).

2) El punto más alto de una elevación se ve, desde un punto del suelo, bajo un ángulo de 60º. Alejándose 20 *m* en línea recta con la base de dicha elevación, se ve bajo un ángulo de 30º. Averiguar la altura de la elevación.




En el triángulo rectángulo cuyos catetos son $x$ e $y$, deducimos:

$$\text{tg}\,60º = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y\,\text{tg}\,60º \qquad (1)$$

En el triángulo rectángulo cuyos catetos son $x$ y $20+y$, se tiene:

$$\text{tg}\,30º = \frac{x}{20+y} \Rightarrow x = (20+y)\,\text{tg}\,30º$$

Igualando:

$y\,\text{tg}\,60º = (20+y)\,\text{tg}\,30º = 20\,\text{tg}\,30º + y\,\text{tg}\,30º \Rightarrow y\,\text{tg}\,60º - y\,\text{tg}\,30º = 20\,\text{tg}\,30º \Rightarrow$

$\Rightarrow y(\text{tg}\,60º - \text{tg}\,30º) = 20\,\text{tg}\,30º \Rightarrow y = \dfrac{20\,\text{tg}\,30º}{\text{tg}\,60º - \text{tg}\,30º} = 10$

Sustituyendo en (1): $x = 10\,\text{tg}\,60º = 17{,}32\ m$

3) Resolver un triángulo, del que conocemos $a = 4\ m$, $b = 7\ m$ y $A = 30º$.

Como conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, usamos el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{7 \text{ sen } 30}{4} \quad \Rightarrow$$

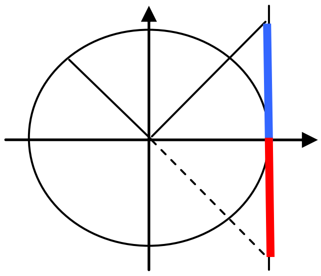
$\Rightarrow$ $B = 61{,}04^{\circ}$ ó $B = 180^{\circ} - 61{,}04^{\circ} = 118{,}96^{\circ}$.

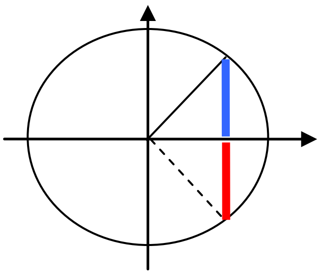
- Si $B = 61{,}04^{\circ}$ $\Rightarrow$ $C = 180^{\circ} - 61{,}04^{\circ} - 30^{\circ} = 88{,}96^{\circ}$. Y además:
  $$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A} = \frac{4 \text{ sen } 88{,}96^{\circ}}{\text{sen } 30^{\circ}} = 8{,}00\ m$$
- Si $B = 118{,}96^{\circ}$ $\Rightarrow$ $C = 180^{\circ} - 118{,}96^{\circ} - 30^{\circ} = 31{,}04^{\circ}$. De modo que:
  $$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A} = \frac{4 \text{ sen } 31{,}04^{\circ}}{\text{sen } 30^{\circ}} = 4{,}13\ m$$

4) Sin usar la calculadora, decir el valor de: a) tg 1920º; b) sen (–765º).

Dividiendo 1920 entre 360 se obtiene 5 de cociente y 120 de resto. Es decir: $1920^{\circ} = 360^{\circ} \cdot 5 + 120^{\circ}$. Luego 1920º coincide, sobre la circunferencia, con 120º, después de dar 5 vueltas. Por tanto, tg 1920º = tg 120º.

Además tg 1920º = tg 120º = tg (180 – 60º) = – tg 60º = $-\sqrt{3}$





De la misma forma, $765 = 360 \cdot 2 + 45^{\circ}$ $\Rightarrow$ –765º coincide con –45º, después de dos vueltas en sentido negativo. Y además, por tratarse de un ángulo del 4º cuadrante: sen(–765º) = sen(–45º) = –sen(45º) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) Demostrar la siguiente identidad: $\frac{\text{cosec } \alpha}{1 + \text{cotg}^2 \alpha} = \text{sen } \alpha$

Usando que $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$ y que $1 + \text{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha}$, tenemos:

$$\frac{\text{cosec } \alpha}{1 + \text{cotg}^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{\text{sen } \alpha}}{\frac{1}{\text{sen}^2 \alpha}} = \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{sen } \alpha} = \text{sen } \alpha$$

**MATEMÁTICAS 1º BACH. CC. N. Y S.** 21 de noviembre de 2008
**Trigonometría**

1) Resolver un triángulo del que se conocen: $a = 4$, $c = 10$ y $A = 20º$. *(2,5 puntos)*

2) Demostrar que $2 \text{ tg } x \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen } x = \text{tg } x$ *(2 puntos)*

3) Resolver la ecuación: $3 \text{ sen}^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$ *(2,5 puntos)*

4) Empleando las fórmulas que relacionan las distintas razones trigonométricas entre si, y sin usar calculadora, hallar las restantes razones de $\alpha$, sabiendo que $\text{tg } \alpha = -5/3$, $90º \le \alpha \le 180º$. Después, decir el valor de $\alpha$ con ayuda de la calculadora. *(2 puntos)*

5) Sin usar la calculadora, decir el valor de: a) tg 1920º; b) sen (–765º). *(1 punto)*

**MATEMÁTICAS 1º BACH. CC. N. Y S.** 21 de noviembre de 2008
**Trigonometría**

## SOLUCIONES

1) Resolver un triángulo del que se conocen: $a = 4$, $c = 10$ y $A = 20º$. *(2,5 puntos)*

Por el T. de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow \operatorname{sen} C = \frac{c \operatorname{sen} A}{a} = \frac{10 \operatorname{sen} 20}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $C = 58{,}76º$ ó $C = 180º - 58{,}76º = 121{,}23º$.

- Si $C = 58{,}76º \Rightarrow B = 180º - A - C = 101{,}23º$. Y además:
  $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B} = \sqrt{16 + 100 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \cos 101{,}23º} = 11{,}47$
- Si $C = 121{,}23º \Rightarrow B = 180º - A - C = 38{,}76º$. De modo que:
  $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B} = \sqrt{16 + 100 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \cos 38{,}76º} = 7{,}32$

Demostrar que $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$ *(2 puntos)*

$$2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{tg} x \frac{1+\cos x}{2} - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x\,(1 + \cos x) - \operatorname{sen} x =$$

$$= \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cos x - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cos x - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$$

2) Resolver la ecuación: $3 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$ *(2,5 puntos)*

$3(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow 3 - 3\cos^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow$
$-2\cos^2 x + \cos x + 3 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$ que es una ecuación de segundo grado cuya incógnita es $\cos x$:

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} = \dfrac{1-5}{4} = -1 \Rightarrow x = 180º + 360º k,\ \forall k \in Z \\ = \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5 \text{ que no es posible} \end{cases}$$

3) Empleando las fórmulas que relacionan las distintas razones trigonométricas entre si, y sin usar calculadora, hallar las restantes razones de α, sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = -5/3$, $90º \le \alpha \le 180º$. Después, decir el valor de α con ayuda de la calculadora. *(2 puntos)*

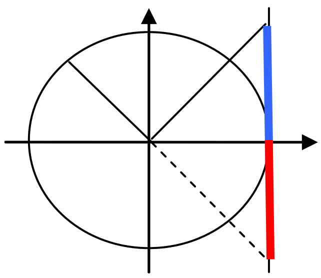
α es del segundo cuadrante. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \dfrac{25}{9} = \dfrac{34}{9} \Rightarrow$ $\boxed{\cos \alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{34}}}$. Por otra parte: $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{sen} \alpha}$ $= \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = -\dfrac{5}{3}\dfrac{-3}{\sqrt{34}} = \boxed{\dfrac{5}{\sqrt{34}}}$.

Por tanto: $\boxed{\operatorname{cotg} \alpha = -\dfrac{3}{5},\ \sec \alpha = -\dfrac{\sqrt{34}}{3},\ \operatorname{cosec} \alpha = \dfrac{\sqrt{34}}{5}}$.

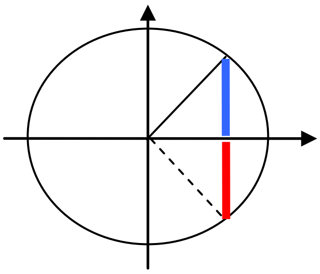
Con la calculadora, usando que $\operatorname{tg} \alpha = -5/3$, obtenemos que $\alpha = -59{,}03º$. Pero tratándose de un ángulo del segundo cuadrante, el verdadero valor es $180º - 59{,}03º$: $\boxed{\alpha = 120{,}97º}$.

4) Sin usar la calculadora, decir el valor de: a) tg 1920º; b) sen (–765º). *(1 punto)*

Dividiendo 1920 entre 360 se obtiene 5 de cociente y 120 de resto. Es decir: $1920º = 360º \cdot 5 + 120º$. Luego 1920º coincide, sobre la circunferencia, con 120º, después de dar 5 vueltas. Por tanto, $\operatorname{tg} 1920º = \operatorname{tg} 120º$.



Además $\operatorname{tg} 1920º = \operatorname{tg} 120º = \operatorname{tg}(180 - 60º) = -\operatorname{tg} 60º = -\sqrt{3}$



De la misma forma, 765 = 360 · 2 + 45º $\Rightarrow$ –765º coincide con –45º, después de dos vueltas en sentido negativo. Y además, por tratarse de un ángulo del 4º cuadrante: sen(–765º) = sen(–45º) = –sen(45º) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S.** 12 de diciembre de 2008

**Trigonometría y Complejos**

1) Conociendo que cos $\alpha = 1/3$ y que $\alpha$ está en el cuarto cuadrante, hallar, sin usar calculadora, el resto de las razones trigonométricas de dicho ángulo. Posteriormente, con ayuda de la calculadora, decir cuánto vale el ángulo. *(2 puntos)*
2) Resolver un triángulo sabiendo que A=96º, $a$=12 m y $b$=9 m *(2 puntos)*
3) Demostrar que $\operatorname{tg}(45º+x) - \operatorname{tg}(45º-x) = 2\operatorname{tg} 2x$ *(2 puntos)*
4) Resolver la ecuación $\cos 2x + 5\cos^2 x = 6$ *(2 puntos)*
5) a) Hallar $(-1+i\sqrt{3})^{15}$ *(1 punto)*

   b) Hallar los cinco resultados de $\sqrt[5]{-243}$ *(1 punto)*

## SOLUCIONES

1) Conociendo que cos α = 1/3 y que α está en el cuarto cuadrante, hallar, sin usar calculadora, el resto de las razones trigonométricas de dicho ángulo. Posteriormente, con ayuda de la calculadora, decir cuánto vale el ángulo. *(2 puntos)*

Como $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\,\alpha} = -\sqrt{\frac{8}{9}} =$

$= -\frac{\sqrt{8}}{3} = \boxed{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$, donde el signo negativo es por ser del cuarto cuadrante.

Por tanto, $\boxed{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \boxed{-2\sqrt{2}}$.

Con lo que: $\boxed{\text{cotg}\,\alpha} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}}$; $\boxed{\sec\alpha} = \frac{1}{1/3} = \boxed{3}$;

$$\boxed{\text{cosec}\,\alpha} = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{3\sqrt{2}}{4}}$$

Como cos α = 1/3 ⇒ α = 70,53º. Pero considerando que es del 4º cuadrante, el resultado real es: $\boxed{\alpha}$ = 360º – 70,53º = $\boxed{289{,}47^\circ = 289^\circ\ 28'\ 16''}$.

2) Resolver un triángulo sabiendo que A=96º, *a*=12 m y *b*=9 m *(2 puntos)*

Por el T. de los senos:

$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} \Rightarrow \text{sen}\,B = \frac{b\,\text{sen}\,A}{a} = \frac{9\,\text{sen}\,96^\circ}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 48{,}24^\circ} \text{ ó } B = 180^\circ - 48{,}24^\circ = 131{,}76^\circ.$$

Pero esta segunda solución no es válida, porque *A* + *B* > 180º, con lo que no puede completarse el triángulo.

Entonces: $\boxed{C} = 180^\circ - A - B = \boxed{35{,}76^\circ}$. Y además:

$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{c}{\text{sen}\,C} \Rightarrow \boxed{c} = \frac{a\,\text{sen}\,C}{\text{sen}\,A} = \frac{12\,\text{sen}\,35{,}76^\circ}{\text{sen}\,96^\circ} = \boxed{7{,}05\text{ m}}$$

3) Demostrar que $\text{tg}(45^\circ+x) - \text{tg}(45^\circ-x) = 2\,\text{tg}\,2x$ *(2 puntos)*

$$\boxed{\text{tg}(45^\circ+x) - \text{tg}(45^\circ-x)} = \frac{\text{tg}\,45^\circ + \text{tg}\,x}{1-\text{tg}\,45^\circ\,\text{tg}\,x} - \frac{\text{tg}\,45^\circ - \text{tg}\,x}{1+\text{tg}\,45^\circ\,\text{tg}\,x} = \frac{1+\text{tg}\,x}{1-\text{tg}\,x} - \frac{1-\text{tg}\,x}{1+\text{tg}\,x} =$$

$$= \frac{(1+\text{tg}\,x)^2 - (1-\text{tg}\,x)^2}{(1-\text{tg}\,x)(1+\text{tg}\,x)} = \frac{1+2\text{tg}\,x+\text{tg}^2\,x - (1-2\text{tg}\,x+\text{tg}^2\,x)}{1^2-\text{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{1+2\text{tg}\,x+\text{tg}^2\,x - 1 + 2\text{tg}\,x - \text{tg}^2\,x}{1-\text{tg}^2 x} = \frac{4\text{tg}\,x}{1-\text{tg}^2 x} = 2\cdot\frac{2\text{tg}\,x}{1-\text{tg}^2 x} = \boxed{2\text{ tg }2x}$$

4) Resolver la ecuación $\cos 2x + 5\cos^2 x = 6$ *(2 puntos)*

$\cos 2x + 5\cos^2 x = 6 \Rightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2\,x + 5\cos^2 x = 6 \Rightarrow 6\cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 6$

$\Rightarrow\ 7\cos^2 x - 1 = 6 \ \Rightarrow\ 7\cos^2 x = 7 \ \Rightarrow\ \cos^2 x = 1 \ \Rightarrow\ \cos x = \pm 1.$

En consecuencia:

- Si $\cos x = -1 \ \Rightarrow\ \boxed{x = 180^\circ + 360^\circ k,\ \ \forall k \in Z}$
- Si $\cos x = 1 \ \Rightarrow\ \boxed{x = 0^\circ + 360^\circ k,\ \ \forall k \in Z}$

5) a) Hallar $(-1+i\sqrt{3})^{15}$ *(1 punto)*

Lo primero es pasar la base de la potencia a forma polar, para poder operar fácilmente.

- El módulo será $\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$.
- Como arctg $\frac{\sqrt{3}}{-1} = -60^\circ$, y el complejo está en el segundo cuadrante (pues su parte real es negativa, y la parte imaginaria positiva) $\Rightarrow\ \alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Por tanto, $\boxed{(-1+i\sqrt{3})^{15}} = (2_{120^\circ})^{15} = (2^{15})_{15\cdot 120^\circ} = 32.768_{1.800^\circ} = 32.768_{0^\circ} = \boxed{32.768}$

Ya que $1.800^\circ = 5\cdot 360^\circ + 0^\circ$.

b) Hallar los cinco resultados de $\sqrt[5]{-243}$ *(1 punto)*

Para empezar, es imprescindible poner el radicando en polares. Lo que es fácil: $-243 = 243_{180^\circ}$ pues el número está en la parte negativa del eje real.

Entonces, las cinco raíces tendrán como modulo $\sqrt[5]{243} = 3$. Sus argumentos serán:

por lo que los resultados finales son:

$\alpha_1 = \frac{180}{5} = 36^\circ \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_1 = 3_{36^\circ}}$

$\alpha_2 = \frac{180}{5} + \frac{360^\circ}{5}\cdot 1 = 36^\circ + 72^\circ = 108^\circ \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_2 = 3_{108^\circ}}$

$\alpha_3 = \frac{180}{5} + \frac{360^\circ}{5}\cdot 2 = 36^\circ + 72^\circ\cdot 2 = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_3 = 3_{180^\circ} = -3}$

$\alpha_4 = \frac{180}{5} + \frac{360^\circ}{5}\cdot 3 = 36^\circ + 72^\circ\cdot 3 = 252^\circ \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_4 = 3_{252^\circ}}$

$\alpha_5 = \frac{180}{5} + \frac{360^\circ}{5}\cdot 4 = 36^\circ + 72^\circ\cdot 4 = 324^\circ \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_5 = 3_{324^\circ}}$

**MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S.** 12 de enero de 2009

**Trigonometría y Complejos (recuperación)**

1) Demostrar que $2 \text{ tg } a \text{ sen}^2 \frac{a}{2} + \text{sen } a = \text{tg } a$ *(2 puntos)*
2) Resolver la ecuación $\text{sen } 2x = \cos x$ *(2 puntos)*
3) Resolver un triángulo sabiendo que $a = 5$ cm, $b = 4$ cm y $C = 47º$ (ángulo comprendido) *(2 puntos)*
4) a) Calcular *cos* 105º sin utilizar la calculadora, expresando 105º en función de otros ángulos cuyas razones trigonométricas sean conocidas. *(1 punto)*
   b) Sin usar la calculadora, hallar cos 2370º. *(1 punto)*
5) a) Dado $z = -2 - 2\sqrt{3}\, i$, calcular $z^{14}$ *(1 punto)*
   b) Calcular las raíces cúbicas de –1 en el conjunto de los complejos *(1 punto)*

**SOLUCIONES**

1) Demostrar que $2 \text{ tg } a \text{ sen}^2 \dfrac{a}{2} + \text{sen } a = \text{tg } a$ *(2 puntos)*

$$2 \text{ tg } a \text{ sen}^2 \frac{a}{2} + \text{sen } a = 2 \text{ tg } a \left(\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}\right)^2 + \text{sen } a = 2 \text{ tg } a \frac{1-\cos a}{2} + \text{sen } a =$$

$$= \text{tg } a\,(1-\cos a) + \text{sen } a = \text{tg } a - \text{tg } a \cos a + \text{sen } a = \text{tg } a - \frac{\text{sen } a}{\cos a} \cos a + \text{sen } a =$$

$$= \text{tg } a - \text{sen } a + \text{sen } a = \text{tg } a$$

2) Resolver la ecuación sen $2x = \cos x$ *(2 puntos)*

$$\text{sen } 2x = \cos x \Rightarrow 2 \text{ sen } x \cos x = \cos x \Rightarrow 2 \text{ sen } x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow (\cos x)(2\text{sen } x - 1) = 0 \Rightarrow$$

Como un producto vale cero si, y sólo si alguno de los factores es cero, se tienen dos posibilidades:

a) $\cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 90^\circ + 360^\circ k \text{ ó } x = 270^\circ + 360^\circ k}$ (que pueden escribirse en una sola fórmula como $\boxed{x = 90^\circ + 180^\circ k}$), $\forall k \in Z$.

b) $2\text{sen } x - 1 = 0 \Rightarrow 2\text{sen } x = 1 \Rightarrow \text{sen } x = ½ \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \text{ ó} \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}}$ $\forall k \in Z$.

3) Resolver un triángulo sabiendo que $a = 5$ cm, $b = 4$ cm y $C = 47^\circ$ (ángulo comprendido) *(2 puntos)*

Por los datos que tenemos, hemos de utilizar el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 25 + 16 - 2\cdot5\cdot4 \cos 47^\circ \Rightarrow \boxed{c = 3{,}70 \text{ m}}$$

Según el T. del seno:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{a \text{ sen } C}{c} = \frac{5 \text{ sen } 47^\circ}{3{,}70} \Rightarrow A = 80{,}83^\circ \text{ ó } A = 180^\circ - 80{,}83^\circ = 99{,}17^\circ.$$

En principio, ambas soluciones serían válidas, porque sumadas con el ángulo $C$ no llegan a 180º, por lo que podría existir $B$ en ambos casos. Sin embargo, cuando un problema de este tipo se puede comenzar con el Teorema del coseno, sólo hay una solución válida. Como no tenemos forma de saber cuál de las dos es la correcta, desechamos el procedimiento y recalculamos $A$ usando el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow 25 = 16 + 3{,}70^2 - 2\cdot4\cdot3{,}70 \cdot \cos A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25 - 16 - 3{,}70^2}{-2\cdot4\cdot3{,}70} = \cos A \Rightarrow \boxed{A = 80{,}83^\circ = 80^\circ\ 50'\ 4.18''}.$$

Por tanto, $\boxed{B = 180^\circ - A - C = 52{,}17^\circ = 52^\circ\ 9'\ 55{,}82''}$.

4) a) Calcular *cos* 105º sin utilizar la calculadora, expresando 105º en función de otros ángulos cuyas razones trigonométricas sean conocidas. *(1 punto)*

$$\boxed{\cos 105^\circ} = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \text{sen } 60^\circ \text{ sen } 45^\circ = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

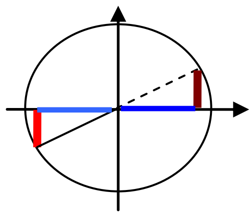
$$\boxed{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}.$$

b) Sin usar la calculadora, hallar $\cos 2370^\circ$. *(1 punto)*

Dividiendo 2370º entre 360º, se tiene que $2370^\circ = 6\cdot 360^\circ + 210^\circ$. Es decir, que tras 6 vueltas completas, 2370º se sitúa en el mismo lugar de la circunferencia que 210º. Razonando sobre la circunferencia trigonométrica, tendremos, por tanto:

$$\cos 2370^\circ = \cos 210^\circ = -\cos(210^\circ - 180^\circ) =$$

$$= -\cos 30^\circ = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



5) a) Dado $z = -2 - 2\sqrt{3}\,i$, calcular $z^{14}$ *(1 punto)*

Pasamos $z$ a polares.

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + (-2)^2(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4\cdot 3} = \sqrt{16} = 4$$

Como $\operatorname{arctg} \dfrac{-2\sqrt{3}}{-2} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 60^\circ$, pero estamos en el tercer cuadrante, al ser negativas la parte real y la imaginaria $\Rightarrow$ $\alpha = 240^\circ$.

Luego:

$$z^{14} = (4_{240^\circ})^{14} = (4^{14})_{240^\circ\cdot 14} = (4^{14})_{3360^\circ} = \boxed{(4^{14})_{120^\circ} = 268.435.456_{120^\circ}}$$

puesto que $3360^\circ = 360^\circ\cdot 9 + 120^\circ$.

b) Calcular las raíces cúbicas de $-1$ en el conjunto de los complejos *(1 punto)*

Comenzamos escribiendo $-1$ en polares. Como su afijo está en la parte negativa del eje real $\Rightarrow$ $-1 = 1_{180^\circ}$. Luego nos piden todas las soluciones de $\sqrt[3]{1_{180^\circ}}$ .

Pues bien, el módulo de las tres soluciones será: $\sqrt[3]{1} = 1$.

Y sus argumentos:

$$\alpha_1 = \frac{180^\circ + 360^\circ\cdot 0}{3} = 60^\circ \qquad \Rightarrow \boxed{z_1 = 1_{60^\circ}}$$

$$\alpha_2 = \frac{180^\circ + 360^\circ\cdot 1}{3} = \frac{180^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3}\cdot 1 = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ \qquad \Rightarrow \boxed{z_2 = 1_{180^\circ} = -1}$$

$$\alpha_3 = \frac{180^\circ + 360^\circ\cdot 2}{3} = \frac{180^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3}\cdot 2 = 60^\circ + 120^\circ\cdot 2 = 300^\circ \qquad \Rightarrow \boxed{z_3 = 1_{300^\circ}}$$

**MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S.** 16 de Marzo de 2009
**Trigonometría y Complejos (Recuperación)**

1) Empleando las fórmulas que relacionan las distintas razones trigonométricas entre si, y sin usar calculadora, hallar las restantes razones de $a$, sabiendo que tg $a$ = –3/4, 270º ≤ $a$ ≤ 360º. Después, decir el valor de $a$ con ayuda de la calculadora. *(2 puntos)*
2) Demostrar que $\frac{\operatorname{tg} x \operatorname{cosec}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{cotg} x$ *(2 puntos)*
3) Resolver un triángulo sabiendo que $a = 10$, $b = 22$ y $c = 17$. *(2 puntos)*
4) Resolver: $4 \cos 2x - 2 \operatorname{sen} x = 1$ *(2 puntos)*
5) a) Dado $z = -2 - 2\sqrt{3}\, i$, calcular $z^{13}$ *(1 punto)*
   b) Calcular las raíces cúbicas de –27 en el conjunto de los complejos *(1 punto)*

## SOLUCIONES

1) Empleando las fórmulas que relacionan las distintas razones trigonométricas entre si, y sin usar calculadora, hallar las restantes razones de $a$, sabiendo que tg $a = -3/4$, $270^o \le a \le 360^o$. Después, decir el valor de $a$ con ayuda de la calculadora. *(2 puntos)*

$\alpha$ es del cuarto cuadrante $\Rightarrow$

$$1 + \text{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{4}{5}}.$$

Por otra parte: $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\,\alpha} = \text{tg}\,\alpha\cos\alpha = -\dfrac{3}{4}\dfrac{4}{5} = \boxed{-\dfrac{3}{5}}$.

Por tanto: $\boxed{\text{cotg}\,\alpha = -\dfrac{4}{3},\ \sec\alpha = \dfrac{5}{4},\ \text{cosec}\,\alpha = -\dfrac{5}{3}}$.

Con la calculadora, usando que tg $\alpha = -3/4$, obtenemos que:

$$\alpha = -36{,}87^o = -36{,}87^o + 360^o = 323{,}13^o = \boxed{323^o\ 7'\ 48{,}4''}.$$

2) Demostrar que $\dfrac{\text{tg}\,x\,\text{cosec}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = \text{cotg}\,x$ *(2 puntos)*

$$\frac{\text{tg}\,x\,\text{cosec}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos\,x}\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\dfrac{1}{\cos\,x\,\text{sen}\,x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{\cos\,x\,\text{sen}\,x} = \frac{\cos\,x}{\text{sen}\,x} = \text{cotg}\,x$$

3) Resolver un triángulo sabiendo que $a = 10$, $b = 22$ y $c = 17$. *(2 puntos)*

Como conocemos los tres lados, empezamos aplicando el Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{22^2+17^2-10^2}{2\cdot 22\cdot 17} \Rightarrow \boxed{A = 25{,}87^o}$$

Con la calculadora, las operaciones son: $\boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\cos^{-1}(}\ \boxed{(}$ 22 $\boxed{x^2}\ \boxed{+}$ 17 $\boxed{x^2}\ \boxed{-}$ 10 $\boxed{x^2}\ \boxed{)}\ \boxed{\div}\ \boxed{(}$ 2 $\boxed{\times}$ 22 $\boxed{\times}$ 17 $\boxed{)}\ \boxed{)}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{STO}}\ \boxed{A}\ \boxed{=}$, donde la última operación es guardar el resultado en la memoria $A$ para su uso posterior.

Para no tener problemas con los dos resultados que produce el uso del Teorema del Seno, aplicamos directamente el del Coseno para el cálculo de otro de los ángulos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{10^2+22^2-17^2}{2\cdot 10\cdot 22} \Rightarrow \boxed{C = 47{,}89^o}$$

El uso de la calculadora es similar, salvo que guardamos el resultado en la memoria $C$.

Por último,

$$B = 180^o - (A + C) = \boxed{106{,}23^o}$$

Que, con calculadora, es así: 180 $\boxed{-}\ \boxed{(}\ \boxed{\text{MEMVAR A}}\ \boxed{+}\ \boxed{\text{MEMVAR C}}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$.

4) Resolver: $4\cos 2x - 2\,\text{sen}\,x = 1$ *(2 puntos)*

$$4\cos 2x - 2\,\text{sen}\,x = 1 \Rightarrow 4(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) - 2\,\text{sen}\,x - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4\cos^2 x - 4\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x - 1 = 0 \Rightarrow 4\,(1 - \text{sen}^2 x) - 4\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 - 4\,\text{sen}^2 x - 4\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x - 1 = 0 \Rightarrow -8\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x + 3 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8\,\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\,x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{sen } x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 8(3)}}{2 \cdot 8} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-2+\sqrt{100}}{16} = 0{,}5 \Rightarrow \begin{cases} x = 30^o + 360^o k & \text{ó} \\ x = 150^o + 360^o k \end{cases} \\ = \dfrac{-2-\sqrt{100}}{16} = -0{,}75 \Rightarrow \begin{cases} x = 228{,}59^o + 360^o k & \text{ó} \\ x = 311{,}41^o + 360^o k \end{cases} \end{array} \right.$$

5) a) Dado $z = -2 - 2\sqrt{3}\, i$, calcular $z^{13}$ *(1 punto)*

Pasamos $z$ a polares.

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + (-2)^2 (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = \sqrt{16} = 4$$

Como arctg $\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2}$ = arctg $\sqrt{3}$ = 60º, pero estamos en el tercer cuadrante, al ser negativas la parte real y la imaginaria $\Rightarrow$ $\alpha = 240^o$.

Luego:

$$z^{13} = (4_{240^o})^{13} = (4^{13})_{240^o \cdot 13} = (4^{13})_{3120^o} = \boxed{(4^{13})_{240^o} = 67.108.864_{240^o}}$$

puesto que 3360º = 360º·8 + 240º.

b) Calcular las raíces cúbicas de –27 en el conjunto de los complejos *(1 punto)*

Comenzamos escribiendo –27 en polares. Como su afijo está en la parte negativa del eje real $\Rightarrow$ $-27 = 27_{180^o}$. Luego nos piden todas las soluciones de $\sqrt[3]{27_{180^o}}$ .

Pues bien, el módulo de las tres soluciones será: $\sqrt[3]{27} = 3$.

Y sus argumentos:

$$\alpha_1 = \frac{180^o + 360^o \cdot 0}{3} = 60^o \qquad \Rightarrow \boxed{z_1 = 3_{60^o}}$$

$$\alpha_2 = \frac{180^o + 360^o \cdot 1}{3} = \frac{180^o}{3} + \frac{360^o}{3} \cdot 1 = 60^o + 120^o = 180^o \qquad \Rightarrow \boxed{z_2 = 3_{180^o} = -3}$$

$$\alpha_3 = \frac{180^o + 360^o \cdot 2}{3} = \frac{180^o}{3} + \frac{360^o}{3} \cdot 2 = 60^o + 120^o \cdot 2 = 300^o \qquad \Rightarrow \boxed{z_3 = 3_{300^o}}$$

**MATEMÁTICAS 1º BACH. C. N. Y S.** 8 de junio de 2009

**Trigonometría y Complejos (Recuperación)**

1) Demostrar que: $\dfrac{1+\mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}^2 x}=\mathrm{cosec}^2 x$
2) Resolver: $\cos 2x + \cos x = 0$
3) Resolver un triángulo del que conocemos $a = 6$, $b = 8$ y $C = 60º$.
4) Calcular $(-\sqrt{3}+i)^{11}$, dando el resultado final en forma polar, trigonométrica, binómica y cartesiana.
5) Calcular las raíces sextas de $-i$.