Derivar una función $y = f(x)$ consiste en encontrar la fórmula de *otra función*, obtenida a partir de la que nos han dado, y que designaremos como $y = f\,'(x)$. Se hace en base a una serie de teoremas que resumimos en la ***tabla de derivadas***. Lo ilustraremos con una serie de problemas resueltos. Es preciso tener delante la *tabla de derivadas*, que se puede obtener en nuestra web.

1) $y = 3$

Ésta es la ecuación de una recta horizontal. Consultada la tabla de derivadas, observamos que:

$$y = k \;\Rightarrow\; y\,' = 0$$

donde k es un número fijo (una constante), y la función derivada $y = f\,'(x)$ la estamos designando, por simplificar, como $y\,'$. Por tanto, la derivada de la función $y = 3$ es:

$$\boxed{y\,' = 0}$$

Repetimos que, en realidad, la función derivada es $y = 0$, que es una recta horizontal. Pero por recalcar que es la función derivada la escribimos como $y\,' = 0$.

2) $y = x$

Buscando en la tabla de derivadas, tenemos que:

$$y = x \;\Rightarrow\; \boxed{y\,' = 1}$$

Por tanto, la derivada es $y\,' = 1$. O sea, la función $y = 1$, que es una recta horizontal. Lo que pasa es que usamos la notación $y\,' = 1$ para que, por comparación con la función dada $y = x$, de un vistazo la relacionemos como su función derivada.

3) $y = 3x$

La tabla de derivadas nos dice que:

$$y = ku \Rightarrow y' = ku', \;\; k \in R$$

donde u está designando una función de x (una fórmula en la que aparece x, que es la variable con respecto a la cual estamos derivando la función) y k es una constante, es decir un número, conocido o no, que no varía con x.

En nuestro caso $k = 3$ y $u = x$. Según lo que dice la tabla de derivadas, la función derivada será k multiplicado por la derivada de u. Como $u = x$, su derivada, según vimos en el problema 2, es $u\,' = 1$. Luego:

$$y\,' = 3\cdot 1 = 3$$

Así, la función derivada es, finalmente, $\boxed{y\,' = 3}$.

4) $y = x^4$

Tabla de derivadas: $y = u^n \;\Rightarrow\; y' = nu^{n-1}u'$

En este caso $u = x$, por lo que $u\,' = 1$. Además, $n = 4$ (n es una constante, un número que no depende de la variable de derivación, que es x). Luego:

$$y\,' = 4\cdot x^{4-1}\cdot 1 = \boxed{4x^3}$$

5) $y = 4x^2$

Tabla de derivadas: $y = ku \Rightarrow y' = ku', \;\; k \in R$

Siendo $k = 4$, $u = x^2$. Derivar esta u es encontrar la derivada de la función $y = x^2$. Y la tabla nos dice que $y = u^n \;\Rightarrow\; y' = nu^{n-1}u'$, llamando ahora $u = x$ y $n = 2$ (usamos nuevamente la letra u para derivar usando esta última fórmula, sin tener en cuenta que u designaba a otra expresión en el paso anterior), la derivada de x^2 será: $2\cdot x^{2-1}\cdot 1 = 2x$.

Volviendo a donde estábamos, es decir, $k = 4$, $u = x^2$, tenemos ya que $u' = 2x$. Por tanto, la derivada final que buscamos ($y' = ku'$) es:

$$y' = 4\cdot 2x = \boxed{8x}$$

6) $y = 3x^2 + 7$

Tabla de derivadas: $y = u \pm v \Rightarrow y' = u' \pm v'$

Como $u = 3x^2$, volvemos a usar la tabla de derivadas para encontrar su derivada. En primer lugar, usamos que $y = ku \Rightarrow y' = ku'$, con lo que la derivada de $3x^2$, siendo $k = 3$ y $u = x^2$ (usamos, como antes, la misma letra u para atender a la derivada de la zona que estamos estudiando y amoldarnos a la tabla de derivadas, sin tener en cuenta que u designaba a otra cosa en el nivel superior, que hemos dejado aparcado de momento) será el producto de 3 por la derivada de x^2. Y siendo $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$ atendiendo a que, según la tabla de derivadas, $y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}u'$ (sería $y' = 2\cdot x^{2-1}\cdot 1 = 2x$).

En definitiva, que si $u = 3x^2 \Rightarrow u' = 3\cdot 2x = 6x$.

Por otra parte $v = 7 \Rightarrow v' = 0$, porque es la derivada de una constante (recordar el problema 1).

Así, $y' = 6x + 0 = \boxed{6x}$.

7) $y = 8x^3 + 6x^2 + 2x + 4$

Tabla de derivadas: $y = u \pm v \Rightarrow y' = u' \pm v'$

En nuestro caso, tenemos una serie de sumandos. Y la tabla nos dice que su función derivada es la suma (o resta) de la derivada de cada sumando por separado (si $u = 8x^3$ y $v = 6x^2 + 2x + 4$, la derivada sería $u' + v'$; pero, ahora, para derivar v, usaríamos la misma entrada de la tabla de derivadas, y sería la derivada de $6x^2$ más la de $2x + 4$; nuevamente, la derivada de $2x+ 4$ sería la de $2x$ más la de 4. En definitiva, la suma o resta de la derivada de cada sumando).

Aplicamos razonamientos similares a los de los problemas anteriores para obtener que:

$$y' = 8\cdot 3x^2 + 6\cdot 2x + 2\cdot 1 + 0 = \boxed{24x^2 + 12x + 2}$$

8) $y = (5x^3 + 3x^2)^2$

Tabla de derivadas: $y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}u'$

Siendo $u = 5x^3 + 3x^2 \Rightarrow u' = 5\cdot 3x^2 + 3\cdot 2x = 15x^2 + 6x$. Luego:

$$y' = 2(5x^3 + 3x^2)^{2-1}(15x^2 + 6x) = 2(5x^3 + 3x^2)(15x^2 + 6x) = (10x^3 + 6x^2)(15x^2 + 6x) =$$
$$= 10x^3\cdot 15x^2 + 10x^3\cdot 6x + 6x^2\cdot 15x^2 + 6x^2\cdot 6x = 150x^5 + 60x^4 + 90x^4 + 36x^3 =$$
$$= \boxed{150x^5 + 150x^4 + 36x^3}$$

Otra forma de hacerlo sería desarrollar la expresión que nos dan antes de derivarla, y, con posterioridad, aplicar la derivada de un polinomio, al estilo del problema anterior. Así:

$$y = (5x^3 + 3x^2)^2 = (5x^3)^2 + 2\cdot 5x^3\cdot 3x^2 + (3x^2)^2 = 5^2(x^3)^2 + 30x^5 + 3^2(x^2)^2 =$$
$$= 25x^6 + 30x^5 + 9x^4$$

Donde hemos empleado fórmulas fundamentales, concretamente una igualdad notable y propiedades de potencias (consultar el documento *Fórmulas fudamentales*). Entonces:

$$y' = 25\cdot 6x^5 + 30\cdot 5x^4 + 9\cdot 4x^3 = \boxed{150x^5 + 150x^4 + 36x^3}$$

Hemos llegado a la misma expresión por dos caminos distintos. El camino no importa, pero el resultado final debe ser, evidentemente, coincidente.

9) $y = 4x^5(x^3 + 3x)^3$

Tabla de derivadas: $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + uv'$

En nuestro problema $u = 4x^5$ y $v = (x^3 + 3x)^3$. Usando procedimientos similares a los previos:

$$y' = 4\cdot 5x^4(x^3 + 3x)^3 + 4x^5\, 3(x^3 + 3x)^2(3x^2 + 3) =$$
$$= 20x^4(x^3 + 3x)^3 + 12x^5(x^3 + 3x)^2(3x^2 + 3) =$$
$$= \boxed{20x^4(x^3 + 3x)^3 + (x^3 + 3x)^2(36x^7 + 36x^5)}$$

Cuando nos piden derivar una función (y en general, en cualquier problema de matemáticas) el resultado hay que proporcionarlo simplificado, pero hasta un punto razonable, equilibrando el esfuerzo y lo que se va a conseguir. Continuar en este punto nos llevaría a desarrollar un binomio al cubo, otro al cuadrado, y efectuar productos de polinomios, para encontrar un polinomio simplificado con múltiples sumandos. El esfuerzo que nos exigiría quizás no esté compensado con lo que vamos a conseguir finalmente, por lo que éste podría ser un punto final aceptable. Con todo, el final es siempre, de alguna manera, subjetivo.

10) $y = \dfrac{6x^2 - 1}{3x + 2}$

Tabla de derivadas: $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Por tanto:

$$y' = \frac{12x(3x+2) - (6x^2 - 1)3}{(3x+2)^2} = \frac{36x^2 + 24x - (18x^2 - 3)}{(3x+2)^2} =$$
$$= \frac{36x^2 + 24x - 18x^2 + 3}{(3x+2)^2} = \boxed{\frac{18x^2 + 24x + 3}{(3x+2)^2}}$$

11) $y = \sqrt{4x^3 + 1}$

Tabla de derivadas: $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Por tanto:

$$y' = \frac{4\cdot 3x^2 + 0}{2\sqrt{4x^3+1}} = \frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3+1}} = \boxed{\frac{6x^2}{\sqrt{4x^3+1}}}$$

12) $y = \sqrt[4]{3x^2 + x}$

Tabla de derivadas: $y = \sqrt[n]{u} \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$. Por tanto:

$$y' = \frac{3\cdot 2x + 1}{4\sqrt[4]{(3x^2 + x)^3}} = \boxed{\frac{6x+1}{4\sqrt[4]{(3x^2+x)^3}}}$$

13) $y = e^{2x^5 + 3x}$

Tabla de derivadas: $y = e^u \Rightarrow y' = u'e^u$. Por tanto:

$$y' = (2\cdot 5x^4 + 3)e^{2x^5+3x} = \boxed{(10x^4 + 3)e^{2x^5+3x}}$$

14) $y = 2x^3e^{4x}$

Tabla de derivadas: $y = u{\cdot}v \Rightarrow y' = u'v + uv'$

Además, para derivar $u = 2x^3$ vamos a utilizar que $y = k{\cdot}u \Rightarrow y' = k{\cdot}u'$. A su vez, para derivar aquí $u = x^3$ utilizaremos que $y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}$. Y para derivar $v = e^{4x}$, usaremos que: $y = e^u \Rightarrow y' = u'e^u$.

Por tanto:

$$y' = 2{\cdot}3x^2e^{4x} + 2x^3e^{4x} = \boxed{e^{4x}(6x^2 + 2x^3)}$$

15) $y = \dfrac{-2x^4 + 3x^2}{5}$

Tabla de derivadas: $y = k{\cdot}u \Rightarrow y' = k{\cdot}u'$

$$y = \frac{-2x^4 + 3x^2}{5} = \frac{1}{5}(-2x^4 + 3x^2) \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{5}(-2{\cdot}4x^3 + 3{\cdot}2x) = \frac{1}{5}(-8x^3 + 6x) = \boxed{\frac{-8x^3 + 6x}{5}}$$

Si hubiéramos derivado como un cociente, hubiéramos llegado al mismo lugar.

16) $y = 3\ln(2x^3 - 5x^2 + 2)$

Usaremos que $y = k{\cdot}u \Rightarrow y' = k{\cdot}u'$, siendo $k = 3$ y $u = \ln(2x^3 - 5x^2 + 2)$. A su vez, para derivar ésta última, emplearemos que $y = \ln u \Rightarrow y' = u'/u$. Entonces:

$$y' = 3\frac{2{\cdot}3x^2 - 5{\cdot}2x + 0}{2x^3 - 5x^2 + 2} = 3\frac{6x^2 - 10x}{2x^3 - 5x^2 + 2} = \boxed{\frac{18x^2 - 30x}{2x^3 - 5x^2 + 2}}$$