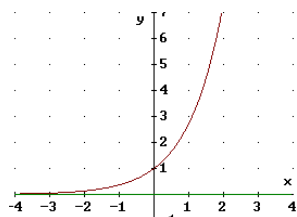
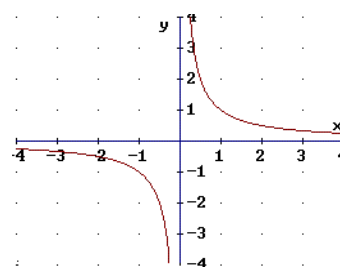


ASÍNTOTAS

1. Asíntotas

Definición: Una asíntota de una función f es una recta a la que se va aproximando la gráfica de una función a medida que ésta se aproxima al infinito, es decir, se aleja del origen de coordenadas.

Por ejemplo, los ejes de coordenadas son, cada uno de ellos, asíntotas de la función $y = \frac{1}{x}$ (Gráfico de la derecha).

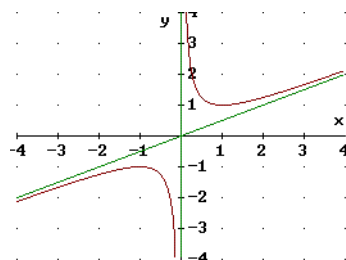


La función exponencial $y = e^x$ tiene una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$, pero no tiene asíntota cuando $x \rightarrow +\infty$. Cuando no tiene asíntota, como en este caso, se dice que tiene una rama parabólica (Gráfico de la izquierda).

La parábola $y = x^2$ no tiene asíntotas. Es decir, tiene dos ramas parabólicas (en $-\infty$ y en $+\infty$). Su gráfica es bien conocida.

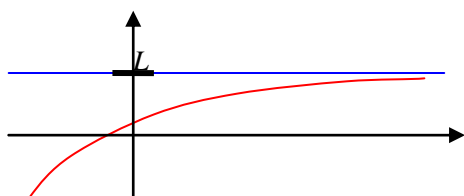
La función $y = \frac{x^2 + 1}{2x}$ tiene dos asíntotas, que son, el eje

OY (cuya ecuación es $x = 0$) y la recta $y = \frac{x}{2}$, que está trazada en verde en el gráfico de la derecha.



Para calcular las asíntotas de una función dada, diferenciamos entre asíntotas horizontales, verticales y oblicuas (inclinadas).

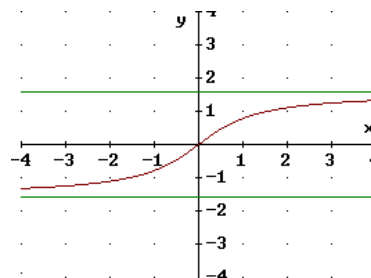
2. Cálculo de asíntotas horizontales



Cuando $x \rightarrow \infty$, las imágenes de la función tienden a aproximarse, cada vez más, a L .

Es decir, si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Rightarrow$ la recta $y = L$ es una asíntota horizontal.

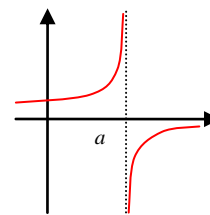
La asíntota horizontal, generalmente, lo es tanto por $+\infty$ como por $-\infty$, pero no siempre es así. Por ejemplo, vimos antes la función exponencial, que tiene una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$, pero no cuando $x \rightarrow +\infty$. Otro ejemplo lo tenemos en la función $y = \text{arctg } x$, que tiene a la recta $y = \pi/2$ como asíntota si $x \rightarrow +\infty$, y a la recta $y = -\pi/2$ cuando $x \rightarrow -\infty$ (Gráfico de la derecha). Una función definida a trozos también puede tener dos asíntotas horizontales diferentes, una en $x \rightarrow +\infty$, y otra cuando $x \rightarrow -\infty$.



Así, una función puede tener hasta dos asíntotas horizontales.

Cálculo de asíntotas verticales

Para cierto a , cuando $x \rightarrow a$, las imágenes de la función tienden a infinito. Es decir, si existe un valor a tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ \Rightarrow la recta vertical $x = a$ es una asíntota vertical. Por tanto, a debe ser un punto de discontinuidad.



Consiguientemente, calculamos los límites cuando x tiende a cada uno de los puntos de discontinuidad. Si el resultado del límite es infinito, hemos encontrado una asíntota vertical.

Si el dominio no empieza en $-\infty$ o no termina en $+\infty$, deben investigarse también los puntos de comienzo y final del dominio. Por ejemplo, $y = \ln x$ tiene como dominio $(0, +\infty)$ y presenta una asíntota vertical en $x = 0$.

Por lo dicho, una función puede tener cualquier número de asíntotas verticales.

3. Cálculo de asíntotas oblicuas

La recta de ecuación $y = mx + n$ es una asíntota oblicua si los dos límites siguientes existen (son finitos):

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

Observar que el segundo de los límites sólo puede abordarse si el primero ha dado como resultado un valor finito, puesto que dicho resultado interviene en su cálculo.

Si existe una asíntota horizontal, por ese lado ($+\infty$ ó $-\infty$) no habrá asíntota oblicua: si intentamos calcularla, obtendremos la horizontal que ya teníamos.

La función puede tener una asíntota oblicua en $x \rightarrow +\infty$, y otra cuando $x \rightarrow -\infty$ (así podría suceder en una función definida a trozos). Por tanto, una función puede tener un máximo de dos asíntotas oblicuas.

4. Ejemplos

1) Calcular las asíntotas de $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

a) Horizontales. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$, no tiene asíntotas horizontales. Notar que en el primer paso, como cuando $x \rightarrow \infty$ el comportamiento del polinomio lo decide el término de mayor grado, hemos sustituido cada uno de los dos polinomios, el del numerador y el del denominador, por el sumando de mayor grado.

b) Verticales. Los únicos puntos de discontinuidad son los que anulan el denominador, esto es, -1 y $+1$. Calculemos el límite cuando x tiende a cada uno de ellos.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \left(\frac{-1}{0} \right) = \infty \Rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \left(\frac{1}{0} \right) = \infty \Rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

c) Oblicuas. Entramos a calcularlas porque no hay asíntotas horizontales.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0$$

Por lo que la recta $y = 1 \cdot x + 0$, o sea, $y = x$, es asíntota oblicua.

2) Calcular las asíntotas de $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

a) Horizontales. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, la recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

b) Verticales. Tiene discontinuidades en -1 y 1 . Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \left(\frac{2}{0} \right) = \infty \Rightarrow \underline{x = -1 \text{ es asíntota vertical.}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \left(\frac{2}{0} \right) = \infty \Rightarrow \underline{x = 1 \text{ es asíntota vertical.}}$$

c) Oblicuas. Ya que la función tiene asíntota horizontal, tanto por $-\infty$ como por $+\infty$, no nos planteamos su cálculo, pues obtendríamos nuevamente la asíntota horizontal que ya tenemos.

3) Hallar las asíntotas de $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

• A.Horizontales. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \underline{y = 1 \text{ es una asíntota horizontal.}}$

• A.Verticales. No están en el dominio los valores de x que anulen el denominador:
 $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = -2 \text{ ó } x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \left(\frac{20}{0} \right) = \infty \Rightarrow \underline{\text{La recta } x = -2 \text{ es a. vertical.}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \left(\frac{0}{0} \right) \text{ que es una indeterminación, de la que hay que desprenderse.}$$

Para ello, descomponemos factorialmente numerador y denominador empleando Ruffini, como se hace a continuación. Recordar que Ruffini es una regla para dividir un polinomio cualquiera entre otro de la forma $x - a$. El a se escribe en la columna de la izquierda, separado. En la primera fila, se escriben los coeficientes del polinomio dividendo. En la fila inferior quedan los coeficientes del polinomio cociente y el resto. El polinomio cociente es de un grado menos que el polinomio dividendo. En nuestro caso, a es siempre el valor al que tiende x en el límite:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

Dividendo: $D = x^2 - 5x + 6$

Divisor: $d = x - 2$

Cociente: $C = x - 3$

Resto: $R = 0$

$D = d \cdot C + R \Rightarrow$

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) + 0$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -4 \\ 2 & & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Dividendo: $D = x^2 - 4$

Divisor: $d = x - 2$

Cociente: $C = x + 2$

Resto: $R = 0$

$D = d \cdot C + R \Rightarrow$

$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) + 0$

Sustituyendo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x + 2} = \frac{2 - 3}{2 + 2} = -\frac{1}{4}$$

Como no hemos obtenido infinito como resultado del límite, en $x = 2$ NO hay asíntota vertical.

- A. Oblicua. No hay, puesto que tenemos una asíntota horizontal (si intentamos calcularla, nos saldrá otra vez la asíntota horizontal que ya tenemos).