Control Global de la 2ª Evaluación
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.
1º de Bachillerato B (2007/08)

1. (4 puntos). Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ se pide:

a) Su dominio.
b) Los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
c) Los intervalos de signos de la función.
d) Sus asíntotas verticales y horizontales.
e) ¿Presenta alguna simetría?
f) Realizar un dibujo aproximado de ella.

2. (2,25 puntos). Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

siendo $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x < 2 \\ 1 - \dfrac{1}{x} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

3. (1,25 puntos). Calcular el dominio de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x^2 - 3x + 2}}$

4. (1,25 puntos). Dado la parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ calcular "a", "b" y "c" sabiendo que:

- Pasa por el punto (2,6).
- Corta al eje OY en un punto de ordenada 4.
- Al dividir f(x) entre (x+1) el resto es 9.

5. (1,25 puntos). Resolver el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 4x < 0 \\ \dfrac{x+3}{x-2} \geq 0 \end{cases}$

Los alumnos con la primera evaluación suspendida podrán cambiar uno de los dos ejercicios 4 o 5 (a elegir) por el 6.

6. Resolver:

a) $\dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x-1}$ b) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7 \\ x + y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y - 6z = 0 \\ x + y + z = 24 \\ 5x + 8y - 11z = 0 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. (4 puntos). Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ se pide:

a) Su dominio.

El dominio es el conjunto de valores de x para los que puede calcularse la imagen. Para obtenerlo, observamos qué operaciones intervienen en el cálculo de la imagen, y vemos en qué condiciones pueden realizarse. En nuestro caso, potencias y sumas pueden realizarse siempre, con más o menos dificultad. Pero hay una división, y no es posible dividir entre cero, lo que ocurre cuando:

$$x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Por tanto, el dominio de esta función es:

$$\boxed{D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)}$$

Recordemos que $+\infty$ no es lo mismo que ∞ sin signo.

b) Los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

- Eje OX: Si $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{x^2}{x^2-4} \Rightarrow$ Para que un cociente resulte cero, el numerador debe anularse, comprobando que los valores obtenidos no anulen, también, al denominador (no podemos dividir entre 0): $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. $\boxed{\text{Corta en } (0, 0)}$.
- Eje OY: Como cada valor de x, en una función que lo sea, sólo puede tener una imagen, la intersección es el punto anterior: (0, 0).

c) Los intervalos de signos de la función.

Nos piden el signo de $f(x)$ según los valores de x. Dividimos el dominio en intervalos según los puntos de corte de la función con OX y sus discontinuidades, y construimos el siguiente cuadro, porque en cada uno de los intervalos resultantes la función tiene, siempre, el mismo signo; por ello, en cada uno de los mismos, tomamos un valor cualquiera de x, calculamos su imagen y anotamos el signo de la misma: la función toma el mismo signo en todo el intervalo:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f(x)$	+	–	–	+

En el cálculo de estos signos, no hay que llegar al valor exacto de la imagen: el numerador x^2 es siempre positivo o nulo, por lo que el signo del cociente lo va a determinar el denominador.

d) Sus asíntotas verticales y horizontales.

- A.V.: Puede tenerla en los puntos que no están en el dominio. Así que tomamos límite cuando x tiende a cada uno de los dos puntos en los que no hay imagen:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2}{x^2-4} = \left(\frac{4}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{x = -2} \text{ es una \underline{asíntota vertical}}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x^2-4} = \left(\frac{4}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{x = 2} \text{ es una \underline{asíntota vertical}}$$

El resultado de ambos límites es infinito sin signo. Habría que estudiar los límites laterales para cada uno de ellos, para ver con precisión el signo del infinito en cada caso.

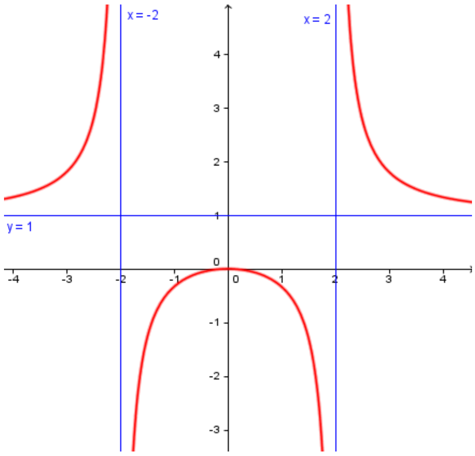
- A.H.: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1 \Rightarrow \boxed{y=1}$ es <u>asíntota horizontal</u>
  En un cociente de polinomios, con x tendiendo a infinito, podemos, en el límite, sustituir cada polinomio por el término de mayor grado.
- A.O.: Si hemos obtenido asíntota horizontal, si calculásemos la asíntota oblicua nos resultaría la misma ecuación de la mencionada asíntota horizontal. Por tanto, omitimos este cálculo.

e) ¿Presenta alguna simetría?
Veamos si la función es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2-4} = \frac{x^2}{x^2-4} = f(x) \Rightarrow \underline{\text{es par}}.$$

Por tanto, la gráfica será simétrica respecto del eje OY.

f) Realizar un dibujo aproximado de ella.
Es suficiente la información para obtener un esbozo de la gráfica. Para ello, trazamos las asíntotas y, teniendo en cuenta los signos de $f(x)$ en cada intervalo y que la función debe aproximarse a cada asíntota cuando se acerca a infinito, considerando, además, la simetría respecto al eje OY, la gráfica debe parecerse a la adjunta.



2. (2,25 puntos). Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

Al sustituir x por 2, obtenemos la indeterminación 0/0. En el caso de un cociente de polinomios, se eliminará factorizándolos.
$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{3} = \frac{3\pm 1}{2} = \langle {=1 \atop =2} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Por tanto: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{4}{1} = \boxed{4}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

Este límite produce la misma indeterminación que el anterior, y el proceso de resolución es similar. Pero al aparecer una raíz dentro de una resta, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de dicha resta:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\,\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2})^2-2^2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} =$$
$$= \frac{1}{2+2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

c) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 2} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x < 2 \\ 1 - \dfrac{1}{x} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

A la izquierda de 2, es decir, cuando $x < 2$, $f(x) = x^2 - 1$. A la derecha, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Por tanto:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 - 1 = 4 - 1 = \boxed{3}$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Al tomar distintos valores los límites laterales, el límite completo cuando x tiende a 2 no existe:

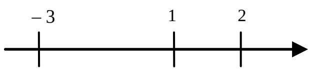
$$\boxed{\nexists \lim_{x\to 2} f(x)}$$

3. (1,25 puntos). Calcular el dominio de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x^2 - 3x + 2}}$

El cálculo del dominio tiene en cuenta las operaciones necesarias para encontrar la imagen de cada x. En este ejercicio, hay que tener en cuenta que una raíz cuadrada requiere que el radicando sea mayor o igual que cero, y que el denominador no puede anularse. Todo ello nos conduce a la resolución de la siguiente inecuación, cuyo resultado será el dominio:

$$\frac{x+3}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$$

Descomponemos en factores numerador y denominador. El numerador ya es irreducible, mientras que el denominador resulta ser $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, como puede comprobarse fácilmente resolviendo la ecuación de segundo grado que resulta de igualarlo a cero, o descomponiéndolo por Ruffini.
Las raíces, de numerador y denominador, son: 1, 2, 3. Descomponemos R en intervalos mediante ellas:



	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$x + 3$	–	0	+	…	+	…	+
$x - 1$	–	...	–	0	+	…	+
$x - 2$	–	...	–	…	–	0	+
$\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}$	–	0	+	$\nexists$	–	$\nexists$	+
¿Sirven? →	No	Si	Si	No	No	No	Si

Por tanto, $\boxed{D(f) = [-3, 1) \cup (2, +\infty)}$

4. (1,25 puntos). Dado la parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ calcular "a", "b" y "c" sabiendo que:

- Pasa por el punto (2,6).
- Corta al eje OY en un punto de ordenada 4.
- Al dividir f(x) entre (x+1) el resto es 9.

Si pasa por $(2, 6)$, se tendrá: $6 = a2^2 + b2 + c \;\Rightarrow\; \boxed{4a + 2b + c = 6}$

Si corta a OY en $y = 4$, es que pasa por $(0, 4)$. Luego: $4 = 0 + 0 + c \;\Rightarrow\; \boxed{c = 4}$.

Si el resto de la división de $f(x)$, que tiene forma polinómica, entre $x + 1$ vale 9, por el Teorema del Resto se tendrá que $f(-1) = 9 \;\Rightarrow\; \boxed{a - b + c = 9}$

Nos queda, entonces, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 4a + 2b + 4 = 6 \\ a - b + 4 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4a + 2b = 2 \\ a - b = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 2a + b = 1 \\ a - b = 5 \end{array}\right\} \\ \hline \end{array}$$
$$Sumando: \quad 3a \quad = 6 \;\Rightarrow a = 2$$

Sustituyendo en la segunda: $2 - b = 5 \;\Rightarrow\; 2 - 5 = b \;\Rightarrow\; -3 = b$.

Luego: $\boxed{f(x) = 2x^2 - 3x + 4}$.

5. (1,25 puntos). Resolver el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 4x < 0 \\ \dfrac{x+3}{x-2} \geq 0 \end{cases}$

Ambas inecuaciones deben verificarse simultáneamente. Las resolvemos por separado. En cuanto a la primera:

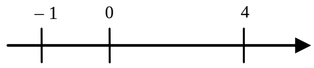
$x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = x(x + 1)(x - 4)$

Ya que: $x^2 - 3x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = -1 \\ = 4 \end{array} \right.$

La inecuación es: $x(x + 1)(x - 4) < 0$

Las tres raíces encontradas son $-1, 0, 4$.

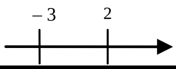
Dividimos el dominio en intervalos:



	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 4)$	4	$(4, +\infty)$
x	–	...	–	0	+	...	+
$x + 1$	–	0	+	...	+	...	+
$x - 4$	–	...	–	...	–	0	+
$x(x + 1)(x - 4)$	–	0	+	0	–	0	+
¿Sirven? →	Si	No	No	No	Si	No	No

La solución de esta inecuación es: $(-\infty, -1) \cup (0, 4)$

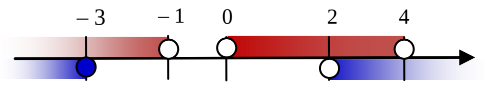
Para la segunda, las raíces son -3 y 2:



	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$x + 3$	–	0	+	...	+
$x - 2$	–	...	–	0	+
$\dfrac{x+3}{x-2}$	+	0	–	$\nexists$	+
¿Sirven? →	Si	Si	No	No	Si

Lo que nos lleva a que la solución de la segunda inecuación es $(-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$.

Llevamos los resultados a un gráfico para decidir dónde se verifican ambas inecuaciones a la vez. En rojo, las soluciones de la primera, y en azul, las de la segunda:



La solución es, entonces: $\boxed{(-\infty, -3] \cup (2, 4)}$.

Los alumnos con la primera evaluación suspendida podrán cambiar uno de los dos ejercicios 4 o 5 (a elegir) por el 6.

6. Resolver:

a) $\dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x^3-1}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}$

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^3-1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{x^2}{x+1} - \frac{x^3-1}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{x-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^3-1}{(x-1)(x+1)} + \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2(x-1) - x^3 + 1 + x + 1}{(x+1)(x-1)} = 0$$

Para que el cociente se anule, debe ser 0 el numerador pero no nulo el denominador. Resolvemos la ecuación que resulta de igualar el numerador a cero y, para las soluciones obtenidas, comprobamos que el denominador es distinto de cero (si lo anulase, desecharíamos tal solución):

$$x^3 - x^2 - x^3 + x + 2 = 0 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} = -1 \\ = 2 \end{matrix} \right.$$

La primera de las soluciones obtenidas anula el denominador, por lo que la descartamos. Así que tenemos <u>solución única</u>: $\boxed{x = 2}$.

b) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7 \\ x + y = 8 \end{cases}$

Los sistemas no lineales suelen resolverse por sustitución. Despejando en la segunda ecuación: $\boxed{y = 8 - x}$. Y sustituyendo en la primera:

$$x^2 - 2(8 - x)^2 = 7 \Rightarrow x^2 - 2(64 - 16x + x^2) - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 128 + 32x - 2x^2 - 7 = 0 \Rightarrow -x^2 + 32x - 135 = 0 \Rightarrow x^2 - 32x + 135 = 0:$$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 540}}{2} = \frac{32 \pm 22}{2} = \left\langle \begin{matrix} = 5 \\ = 27 \end{matrix} \right.$$

Sustituyendo donde despejamos:

- $x = 5 \Rightarrow y = 8 - 5 = 3$
- $x = 27 \Rightarrow y = 8 - 27 = -19$

Tenemos <u>dos soluciones</u>: $\boxed{(x = 5, y = 3) \quad (x = 27, y = -19)}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y - 6z = 0 \\ x + y + z = 24 \\ 5x + 8y - 11z = 0 \end{cases}$

Lo resolvemos por Gauss. Trabajamos con la matriz ampliada. El proceso más corto para triangularizar consiste en elegir una fila y, a partir de ella y mediante combinaciones lineales de filas, conseguir que todas las posiciones de una columna sean 0 salvo la de esa fila (en el primer paso, elegiremos la fila 1 y columna 2). En el paso siguiente, ignorando la fila del paso anterior, elegimos otra fila y otra columna y repetimos el proceso. Habrá que dar tantos pasos como filas haya menos una: en nuestro caso, 3 – 1 = 2, con lo que estará garantizada la triangularización:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & 8 & -11 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1-2F_2 \\ \to \\ F_3-5F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -8 & -48 \\ 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 3 & -16 & -120 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to \\ F_3-F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -8 & -48 \\ 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & -8 & -72 \end{pmatrix}$$

El sistema, tras estar triangularizado, tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (ninguna de las filas ha debido ser anulada por estar constituida sólo por 0 o por coincidir con otra), por lo que no es *indeterminado*, y ninguna fila tiene 0 en todas las columnas correspondientes a incógnitas mientras que es no nulo el término independiente, por lo que no es *incompatible*. Por tanto, es un <u>sistema compatible determinado</u>. De la tercera ecuación, tenemos:

$8z = 72 \Rightarrow z = 9$

Sustituyendo en la primera: $3y - 72 = -48 \Rightarrow 3y = 24 \Rightarrow y = 8$.

Sustituyendo en la segunda: $x + 8 + 9 = 24 \Rightarrow x = 24 - 17 = 7$

La solución única es: $\boxed{(7, 8, 9)}$.

Primer trimestre – 1º Bach CCSS **Curso 2008/09 (modificado)**
Ecuaciones, inecuaciones, Estudio de Funciones

1. (2,5 puntos). Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} & si \quad x<2\\ 3 & si\ x=2\\ \dfrac{5}{x} & si \quad x>2\end{cases}$ se pide:

a) Estudiar la continuidad y clasificar las discontinuidades de f.
b) Calcular sus asíntotas horizontales.

2. (1,5 puntos). Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

3. (1,25 puntos). Calcular el dominio de la función: $f(x)=\sqrt{x^3-3x^2-x+3}$

4. (1 punto). Calcular la ecuación de la tangente a la curva $y=f(x)=\ln(x+1)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

5. (1,25 puntos). Calcular las asíntotas de la función $y=f(x)=\dfrac{3x^2}{x+2}$.

6. (1,25 puntos). Calcular los valores de "a" y "b" para que la función siguiente sea continua en todo R.

$$f(x)=\begin{cases}\log_3(x+2) & si \quad x\in(-2,1]\\ 2a+3bx & si\ x\in(1,2)\\ ax^2+bx+1 & si \quad x\geq 2\end{cases}$$

7. (1,25 puntos). Derivar:

a) $y=f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-x-6}$ b) $y=f(x)=\sqrt{x^2+1}-e^{x^2+2x}+3^x$

☼☺**Comodín: (Este ejercicio puede cambiarse por cualquiera de los anteriores)**.

Calcular los máximos, mínimos e intervalos de monotonía de la función:

$$y=f(x)=x^3-2x^2+x$$

1. (2,5 puntos). Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} & si \quad x<2 \\ 3 & si\ x=2 \\ \dfrac{5}{x} & si \quad x>2 \end{cases}$ se pide:

a) Estudiar la continuidad y clasificar las discontinuidades de f.

- <u>Zona $(-\infty, 2)$</u>: f coincide aquí con $g(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$. Las funciones elementales son continuas en su dominio, por lo que g es continua en todo R salvo los puntos que anulan el denominador, que son:

$$x^2-x-2=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\left\langle \begin{matrix} =-1 \\ =2 \end{matrix} \right.$$

La discontinuidad de g en $x = 2$ no nos incumbe, puesto que $2 \notin (-\infty, 2)$, que es la zona donde coincide con la función en estudio, que es f. Pero la otra, $x = -1$, hay que estudiarla, y eso hacemos:

1) $\nexists f(-1)$.

2) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \left(\dfrac{-6}{0}\right) = \infty$. Calculamos los límites laterales para delimitar el signo del ∞. Ambos límites dan ∞, porque el límite completo da dicho resultado. Pero en los laterales se puede calcular el signo de dicho infinito. Una forma muy cómoda de hacerlo es tomar un valor de x muy próximo a -1, a izquierda o a derecha, según el límite lateral calculado, y obtener el signo del resultado. Así:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = +\infty$$

Por ello, en $x = -1$ f presenta una discontinuidad <u>asintótica de salto infinito</u>.

- <u>Zona $(2, +\infty)$</u>: f coincide con $h(x) = 5/x$, que, al ser elemental, es continua en su dominio, que es $R - \{0\}$. Pero como $0 \notin (2, +\infty)$, es discontinuidad de h pero no de f. Luego <u>f es continua en $(2, +\infty)$</u>.

- <u>$x = 2$</u>: 1) $\exists f(2) = 3$. 2) Para calcular el límite de f cuando x tiende a 2, hay que, forzosamente, estudiar los límites laterales, puesto que la fórmula de f es diferente a izquierda y a derecha de 2. Así

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{5}{x} = \frac{5}{2}$$

Como los dos límites laterales existen pero no coinciden, se trata de una discontinuidad <u>asintótica de salto finito</u>.

$\boxed{\text{En definitiva, } f \text{ es continua en } R - \{-1, 2\}\text{, con discontinuidades asintótica de salto infinito en } -1 \text{ y de salto finito en } 2.}$

b) Calcular sus asíntotas.

- <u>Asíntotas horizontales</u>: Puede haber una distinta por cada lado, puesto que la definición de f es diferente al tender a $-\infty$ y a $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1 \Rightarrow$ La recta horizontal de ecuación $\boxed{y = 1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x\to-\infty}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x} = \left(\dfrac{5}{\infty}\right) = 0 \Rightarrow$ La recta $\boxed{y = 0 \text{ es asíntota horizontal}}$ cuando $x\to+\infty$.

- Asíntotas verticales: Lo tenemos casi hecho, por el estudio anterior de la continuidad de la función. Puede tener asíntotas verticales en $x = -1$ y en $x = 2$, porque son los puntos de discontinuidad. Como sabemos que:

  $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \infty \Rightarrow$ La recta $\boxed{x = -1 \text{ es asíntota vertical}}$.

  $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = +\infty \Rightarrow$ La recta $\boxed{x = 2 \text{ es asíntota vertical}}$ a la izquierda de 2 solamente.

- Asíntotas oblicuas: Como tiene asíntotas horizontales por ambos infinitos, al intentar calcular asíntotas oblicuas se repetirá el resultado conocido ya de las asíntotas horizontales.

2. (1,5 puntos). Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Ante un cociente de polinomios con indeterminación 0/0 los descomponemos por Ruffini, empleando el número a quien tiende x. Numerador y denominador son, respectivamente:

	2	–14	12	0
1		2	–12	0
	2	–12	0	0

	1	–10	27	–18
1		1	–9	18
	1	–9	18	0

Por tanto:

$$\lim_{x\to1} \frac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(2x^2-12x)}{(x-1)(x^2-9x+18)} = \lim_{x\to1} \frac{2x^2-12x}{x^2-9x+18} = \frac{-10}{10} = \boxed{-1}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

Un límite con indeterminación $\infty - \infty$ donde tenemos raíces dentro de una resta, requiere multiplicar y dividir por el conjugado de dicha resta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)-(x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{+\infty+\infty}\right) = \boxed{0}$$

A tener en cuenta que éste límite, cuando x tiende a $-\infty$, no existiría, porque cuando x fuese tomando valores negativos ninguna de las dos raíces cuadradas existiría.

3. (1,25 puntos). Calcular el dominio de la función: $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 - x + 3}$

Siendo el dominio el conjunto de valores de x para los que existe imagen, lo constituirán las soluciones de la inecuación:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 \geq 0$$

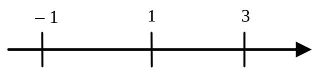
Para resolverla, descomponemos en factores el polinomio, a la vez que calculamos sus raíces. Por Ruffini:

	1	–3	–1	3
1		1	–2	–3
	1	–2	–3	0
–1		–1	3	
	1	–3	0	
3		3		
	1	0		

Así, las raíces son 1, –1, 3. Y factorizando el polinomio, la inecuación a resolver es:

$$1 \cdot (x-1)(x+1)(x-3) \geq 0 \iff (x-1)(x+1)(x-3) \geq 0$$

Dividimos R en intervalos mediante las tres raíces obtenidas, resultando:



En cada intervalo resultante, el signo del producto se mantiene constante. Así, basta tomar un punto cualquiera para evaluar dichos signos. Y como queremos que el producto total sea positivo o nulo, según nos ha quedado la inecuación, se tiene:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x - 1$	–	...	–	0	+	...	+
$x + 1$	–	0	+	...	+	...	+
$x - 3$	–	...	–	...	–	0	+
$(x-1)(x+1)(x-3)$	–	0	+	0	–	0	+
¿Sirven? →	No	Si	Si	Si	No	Si	Si

Por tanto:

$$\boxed{D(f) = [-1, 1] \cup [3, +\infty)}$$

4. (1 punto). Calcular la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x) = \ln(x+1)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$, tiene como pendiente $m = f'(a)$. Como las coordenadas completas del punto de tangencia son $(a, f(a))$, dicha recta es, en forma punto-pendiente:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

- $a = 0 \Rightarrow$ Como $f(a)=f(0) = \ln(0 + 1) = \ln 1 = 0$, el punto de tangencia es (0, 0).
- $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow m = f'(a) = f'(0) = \dfrac{1}{0+1} = 1$

Por lo que la recta tangente es:

$$y - 0 = 1(x - 0) \iff \boxed{y = x}$$

5. (1,25 puntos). Calcular las asíntotas de la función $y = f(x) = \dfrac{3x^2}{x+2}$.

- AH: Como $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} 3x = \infty \Rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.
- AV: La única discontinuidad la presenta en $x = -2$ (que anula el denominador). Entonces: $\lim_{x\to -2} \frac{3x^2}{x+2} = \left(\frac{12}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ La recta de ecuación $x = -2$ es asíntota vertical.
- AO: Dado que:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2}{x+2} - 3x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 3x(x+2)}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 3x^2 - 6x}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x}{x} = -6$$

Se tiene que $y = 3x - 6$ es asíntota oblicua.

6. (1,25 puntos). Calcular los valores de "a" y "b" para que la función siguiente sea continua en todo R.

$$f(x) = \begin{cases} \log_3(x+2) & si \quad x \in (-2,1] \\ 2a + 3bx & si \ x \in (1,2) \\ ax^2 + bx + 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Lo primero que tenemos que hacer es comprobar que, en efecto, es continua en todo R: podría tener alguna discontinuidad que no dependiera ni de a ni de b. Así que estudiamos la continuidad completamente:

- Zona $(-2, 1)$: (Recordar que los puntos que conectan unas zonas con otras deben estudiarse por separado, por lo que no incluimos aquí el 1). f coincide con la función $g(x) = \log_3(x + 2)$. Por ser elemental, g es continua en su dominio, que es $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Todos los puntos de la zona $(-2, 1)$ verifican esta condición (son mayores estrictamente que -2), por los que son puntos donde g (y, por coincidir con g, también f) es continua. Luego f es continua en $(-2, 1)$.
- Zona $(1, 2)$: f coincide con $h(x) = 2a + 3bx$, cuyo dominio es R. Por ser h elemental, es continua, entonces, en su dominio: R. Luego h no tiene ningún punto de discontinuidad. f, en $(1, 2)$ que es donde coindice con h, tampoco. Luego f es continua en $(1, 2)$.
- Zona $(2, +\infty)$: f coincide con $j(x) = ax^2 + bx + 1$, que es continua en su dominio, por ser función elemental. Su dominio es R. Luego no presenta discontinuidades. f, donde coincide con j, tampoco. Por ello, f es continua en $(2, +\infty)$.
- $x = 1$: Veamos las tres condiciones de continuidad en un punto.
  - 1) $\exists f(1) = \log_3(1 + 2) = \log_3(3) = 1$
  - Para estudiar el límite cuando $x \to 1$, hemos de calcular los dos límites laterales, puesto que la fórmula de $f(x)$ es diferente a izquierda y a derecha de 1:

    $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \log_3(x+2) = \log_3(1 + 2) = \log_3(3) = 1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2a+3bx) = 2a+3b$$

Por ello, para que los dos laterales coincidan, y lo hagan, a su vez, con $f(1)$, que es la condición para que f sea continua en $x = 1$, se precisa que:

$$\boxed{2a+3b=1}$$

- $\underline{x=2}$: 1) $\exists f(2) = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + 1 = 4a+2b+1$

  2) Estudiamos los límites laterales:

  $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(2a+3bx) = 2a+6b$$

  $$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(ax^2+2bx+1) = 4a+2b+1$$

  Para que coincidan y, además, lo hagan con $f(2)$, debe ocurrir:

  $$2a+6b = 4a+2b+1 \Leftrightarrow \boxed{-2a+4b=1}$$

Nos resulta un sistema de ecuaciones, que resolvemos por reducción:

$$\left.\begin{array}{r} 2a+3b=1 \\ \underline{-2a+4b=1} \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad 2a+3\frac{2}{7}=1 \Rightarrow 2a+\frac{6}{7}=1 \Rightarrow 2a=1-\frac{6}{7} \Rightarrow$$

$$7b=2 \quad \Rightarrow b=2/7 \qquad\qquad 2a=\frac{1}{7} \Rightarrow a=\frac{1}{14}$$

Por ello, la solución final es: $\boxed{a=1/14,\ \ b=2/7}$.

7. (1,25 puntos). Derivar:

a) $y=f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-x-6}$ b) $y=f(x)=\sqrt{x^2+1}-e^{x^2+2x}+3^x$

a) $y'=f'(x)=\dfrac{2x(x^2-x-6)-(x^2-1)(2x-1)}{(x^2-x-6)^2}=$

$$=\frac{2x^3-2x^2-12x-(2x^3-x^2-2x+1)}{(x^2-x-6)^2}=\frac{2x^3-2x^2-12x-2x^3+x^2+2x-1}{(x^2-x-6)^2}=$$

$$=\boxed{\frac{-x^2-10x-1}{(x^2-x-6)^2}}$$

b) $y'=f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-(2x+2)e^{x^2+2x}+3^x\ln 3=\boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-(2x+2)e^{x^2+2x}+3^x\ln 3}$

Recordamos que la simplificación, cuando derivamos, debe terminar en una forma que sea, a la vez, fácil para calcular imágenes y para derivar de nuevo. Es algo subjetivo el considerar el final de la simplificación.

☼☺**Comodín: (Este ejercicio puede cambiarse por cualquiera de los anteriores).**

Calcular los máximos, mínimos e intervalos de monotonía de la función:

$$y=f(x)=x^3-2x^2+x$$

Necesitamos el dominio de la función, que es R por tratarse de una función polinómica, y la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

cuyo dominio también es R, por idéntica razón. Por tanto, ninguna de las dos tiene discontinuidades. Así:

- Discontinuidades de f ó f': No tiene.

- $\underline{f'(x) = 0}$: $3x^2 - 4x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \dfrac{4 \pm 2}{6} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{1}{3} \\ = 1 \end{array} \right.$

Dividimos R en intervalos mediante los valores obtenidos por cualquiera de las dos vías anteriores:

Damos a f' cualquier valor dentro de cada intervalo, puesto que todos los números del mismo proporcionarán el mismo signo para f':

	$(-\infty, 1/3)$	1/3	(1/3, 1)	1	$(1, +\infty)$
f'	+	0	–	0	+
f	↗	Máx	↘	Mín	↗

Sustituyendo en f, tenemos que:

- Coordenadas del máximo relativo: (1/3, 4/27)
- Coordenadas del mínimo relativo: (1, 0)

No piden la gráfica de la función, pero es la siguiente: