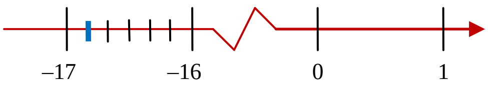
IES Fernando de Herrera **28 de octubre de 2013**

Primer trimestre - Primer examen – 1º Bach CCSS

NOMBRE: ____

1) Nombrar los principales conjuntos numéricos, explicitando cuáles son sus elementos y las relaciones de inclusión entre ellos (es decir, qué conjunto es subconjunto de cuál), y la intersección de Q con I.
2) Hallar las fracciones generatrices de:
   a) 3,2919191... b) 3,296229622296...
3) a) Representar en la recta real: $-\frac{417}{5}$
   b) ¿Qué número es el indicado en el gráfico?



4) Calcular el resultado simplificado de:

$$\frac{5\frac{14}{25}\frac{5}{28}-\frac{64}{384}\frac{70}{35}}{6-\frac{5}{6}}31-29$$

5) a) Calcular: $[-5, 3) \cap (-6, 2]$
   b) Escribir en forma de intervalo: $A = \{x \in \mathrm{R} \;/\; -4 < x \leq 12\}$ y $B = \{x \in \mathrm{R} \;/\; x > 3\}$
6) Escribir en notación científica: a) $43{,}91\cdot 10^{-3}$ b) 0,00004391 c) $4391\cdot 10^{6}$
7) Simplificar: $\frac{-(-7)^{40}42^{22}}{2^{20}}\left(-\frac{3}{2}\right)^{-19}$
8) Simplificar: $\frac{2a\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt{a\sqrt[3]{2a}}}$
9) Simplificar: $\frac{2-3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}$
10) Decir a qué es igual x si se cumple lo siguiente:

$$\log x = 2 + \frac{1}{7}(\log 2 + \log a - 3\log c + 2\log b - 3)$$

SOLUCIONES

1) Nombrar los principales conjuntos numéricos, explicitando cuáles son sus elementos y las relaciones de inclusión entre ellos (es decir, qué conjunto es subconjunto de cuál), y la intersección de Q con I.

Números naturales: N = {0, 1, 2, 3, ..., 10, 11, ...}
Números enteros: Z = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ..., 10, 11, ...}
Números racionales: Q = {*a*/*b*, siendo *a*, *b* ∈ Z} (números que se pueden expresar como fracción)
Números irracionales: I = {números que no se pueden expresar como fracción}
Números reales: R = Q ∪ I
$N \subset Z \subset Q \subset R$; $I \subset R$; además: $Q \cap I = \varnothing$

2) Hallar las fracciones generatrices de:

a) 3,2919191...

$x = 3{,}2919191...$

$$\begin{array}{r} 1000x = 3291{,}919191... \\ 10x = 32{,}919191... \\ \hline 990x = 3259 \end{array}$$

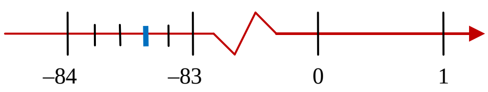
Por tanto: $\boxed{x = \dfrac{3259}{990}}$

b) 3,296229622296...

Este número tiene infinitas cifras decimales no periódicas ⇒ Es irracional ⇒ $\boxed{\text{No se puede expresar como fracción}}$.

3) a) Representar en la recta real: $-\dfrac{417}{5}$

Si dividimos 417 entre 5 nos resulta un dividendo entero igual a 83 con 2 de resto. Esto significa que $-\dfrac{417}{5} = -83 - \dfrac{2}{5}$. Así que avanzamos 83 unidades en sentido negativo sobre la recta real y seguimos 2/5 más, esto es, dividimos el trozo entre –84 y –83 en 5 partes iguales (cuatro marcas intermedias) y tomamos la segunda contando de derecha a izquierda (porque avanzamos en sentido negativo, o sea, decreciendo.



b) ¿Qué número es el indicado en el gráfico?

El tramo entre –17 y –16 (que es una unidad) está dividido en 6 partes iguales (mediante 5 marcas intermedias). Nuestro número es la 5ª de estas marcas contando en sentido negativo (decreciente, hacia la izquierda), por lo que se trata de –5/6 más a la izquierda que –16. Luego es:

$$-16 - \frac{5}{6} = \boxed{-\frac{101}{6}}$$

4) Calcular el resultado simplificado de:

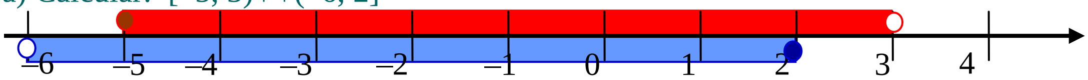
$$\frac{5\dfrac{14}{25}\dfrac{5}{28} - \dfrac{64}{384}\dfrac{70}{35}}{6 - \dfrac{5}{6}} 31 - 29$$

Es muy recomendable simplificar lo antes posible. Y esto consiste en dividir un *factor* (no sumando ni parte de sumando, sino un número que esté multiplicando) del numerador y otro del denominador entre un mismo número, sustituyendo cada uno de ellos por el resultado de dicha división (esto es la *propiedad fundamental de las fracciones*). Recordar que no es posible realizar 31 – 29, puesto que 31 no es un sumando, sino *parte* del primer sumando:

$$\frac{5\frac{14}{25}\frac{5}{28}-\frac{64}{384}\frac{70}{35}}{6-\frac{5}{6}}31-29=\frac{1\frac{1}{5}\frac{5}{2}-\frac{1}{6}\frac{2}{1}}{\frac{36}{6}-\frac{5}{6}}31-29=\frac{\frac{1}{1}\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{1}{1}}{\frac{31}{6}}31-29=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{31}{6}}31-29=$$

$$=\frac{\frac{3-2}{6}}{\frac{31}{6}}31-29=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{31}{6}}31-29=\frac{1\cdot 6}{31\cdot 6}31-29=\frac{1}{31}31-29=1-29=\boxed{-28}$$

5) a) Calcular: [–5, 3) ∩ (–6, 2]



A la vista del gráfico, como la intersección de dos conjuntos (y los intervalos lo son), es un nuevo conjunto que contiene los elementos que están en los conjuntos iniciales a la vez, tenemos que: $\boxed{[-5, 3) \cap (-6, 2] = [-5, 2]}$.

b) Escribir en forma de intervalo: $A = \{x \in R \mid -4 < x \le 12\}$ y $B = \{x \in R \mid x > 3\}$

Según las definiciones de intervalo:

$\boxed{A = \{x \in R \mid -4 < x \le 12\} = (-4, 12]}$ (no entra –4 pero sí 12)

$\boxed{B = \{x \in R \mid x > 3\} = (3, +\infty)}$ (no entra ni 3 ni +∞, que no es un número)

6) Escribir en notación científica: a) $43{,}91\cdot 10^{-3}$ b) 0,00004391 c) $4391\cdot 10^{6}$

Convertimos el número que está en notación habitual a notación científica y multiplicamos, después, las potencias de 10, en sus casos:

$43{,}91\cdot 10^{-3} = 4{,}391\cdot 10\cdot 10^{-3} = \boxed{4{,}391\cdot 10^{-2}}$

$0{,}00004391 = \boxed{4{,}391\cdot 10^{-5}}$

$4391\cdot 10^{6} = 4{,}391\cdot 10^{3}\cdot 10^{6} = \boxed{4{,}391\cdot 10^{9}}$

7) Simplificar: $\frac{-(-7)^{40}42^{22}}{2^{20}}\left(-\frac{3}{2}\right)^{-19}$

Cuando un signo – está elevado a un exponente impar, el resultado final de la operación es negativo. Así, aplicando propiedades de potencias:

$$\frac{-(-7)^{40}42^{22}}{2^{20}}\left(-\frac{3}{2}\right)^{-19}=\frac{-7^{40}(2\cdot 3\cdot 7)^{22}}{2^{20}}\left(-\frac{2}{3}\right)^{19}=-\frac{7^{40}\cdot 2^{22}\cdot 3^{22}\cdot 7^{22}}{2^{20}}\left(-\frac{2^{19}}{3^{19}}\right)=$$

$$=\frac{7^{62}\cdot 2^{2}\cdot 3^{22}}{1}\frac{2^{19}}{3^{19}}=\boxed{7^{62}\cdot 2^{21}\cdot 3^{3}}$$

8) Simplificar: $\frac{2a\sqrt[3]{2a^{2}}}{\sqrt{a\sqrt[3]{2a}}}$

La expresión final debe estar con el denominador racionalizado, los radicales simplificados, los exponentes positivos y, preferiblemente, sin paréntesis ni exponentes fraccionarios. Así:

$$\frac{2a\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt{a\sqrt[3]{2a}}} = \frac{2a\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^3 2a}}} = \frac{2a\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt[6]{2a^4}}\frac{\sqrt[6]{2^5a^2}}{\sqrt[6]{2^5a^2}} = \frac{2a\sqrt[3]{2a^2}\sqrt[6]{2^5a^2}}{\sqrt[6]{2^6a^6}} = \frac{2a\sqrt[6]{2^2a^4}\sqrt[6]{2^5a^2}}{\sqrt[6]{2^6a^6}} =$$

$$= \frac{2a\sqrt[6]{2^7a^6}}{2a} = a\sqrt[6]{2^6 2} = \boxed{2a\sqrt[6]{2}}$$

9) Simplificar: $\dfrac{2-3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}$

Usando las propiedades de potencias y radicales, así como igualdades notables, tenemos:

$$\frac{2-3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}} = \frac{2-3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}\,\frac{2-3\sqrt{3}}{2-3\sqrt{3}} = \frac{\left(2-3\sqrt{3}\right)^2}{2^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2^2-2\cdot2\cdot3\sqrt{3}+\left(3\sqrt{3}\right)^2}{4-3^2\left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{4-12\sqrt{3}+9\cdot3}{4-9\cdot3} = \frac{4-12\sqrt{3}+27}{4-27} = \frac{31-12\sqrt{3}}{-23} = \boxed{-\frac{31-12\sqrt{3}}{23}}$$

10) Decir a qué es igual x si se cumple lo siguiente:

$$\log x = 2 + \frac{1}{7}(\log 2 + \log a - 3\log c + 2\log b - 3)$$

Aplicamos propiedades de logaritmos. En primer lugar, ordenamos los sumandos positivos antes de los negativos:

$$\log x = 2 + \frac{1}{7}(\log 2 + \log a - 3\log c + 2\log b - 3) =$$

$$= \log 100 + \frac{1}{7}(\log 2 + \log a + \log b^2 - \log 1000 - \log c^3) =$$

$$= \log 100 + \frac{1}{7}[\log 2ab^2 - (\log 1000 + \log c^3)] =$$

$$= \log 100 + \frac{1}{7}(\log 2ab^2 - \log 1000c^3) =$$

$$= \log 100 + \frac{1}{7}\log\frac{2ab^2}{1000c^3} = \log 100 + \log\sqrt[7]{\frac{2ab^2}{1000c^3}} = \log 100\sqrt[7]{\frac{2ab^2}{1000c^3}}$$

Es decir:

$$\log x = \log 100\sqrt[7]{\frac{2ab^2}{1000c^3}}$$

Como $\log_a x = \log_a y \iff x = y$ (siendo $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$), se tiene que:

$$\boxed{x = 100\sqrt[7]{\frac{2ab^2}{1000c^3}}}$$

NOMBRE: ____

1) Simplificar aplicando propiedades de radicales y potencias, dejando el resultado sin exponentes negativos ni fraccionarios y con el denominador racionalizado:*(1,5 puntos)*

   a) $\dfrac{(-6)^{43}3^{-51}}{8^{19}(-3)^{60}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-24}$

   b) $\dfrac{\sqrt{a^3\sqrt{a}}\sqrt[4]{32a^3}}{\sqrt[6]{64a^5b^3}}$

   c) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

2) Hallar m para que el resto de la división de $P(x) = mx^5 - 2x^4 + 3x^3 - 1$ entre $x + 2$ sea -3. *(1,5 puntos)*

3) Clasificar y resolver el siguiente sistema por el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método ni forma). Además, si la solución no fuese única, decir dos soluciones concretas: *(2 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} 3x-y-z=0 \\ 2x-2y+z=\ \ 18 \\ 5x+y-5z=-36 \end{array}\right\}$$

4) Resolver la ecuación: $2^{2x+1} = 17\cdot 2^x - 8$ *(1,5 puntos)*

5) Resolver la ecuación: $\log(2x^2 - 1) - \log(3x + 2) = 1 - \log 50$ *(1,5 puntos)*

6) a) Simplificar: $\dfrac{3x^4-9x^3-3x+9}{2x^3+8x^2+2x-12}$ *(1,5 puntos)*

   b) Resolver la ecuación: $\dfrac{3x^4-9x^3-3x+9}{2x^3+8x^2+2x-12}=0$ *(0,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Simplificar aplicando propiedades de radicales y potencias, dejando el resultado sin exponentes negativos ni fraccionarios y con el denominador racionalizado: *(1,5 puntos)*

a) $\dfrac{(-6)^{43}3^{-51}}{8^{19}(-3)^{60}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-24}$

$$\frac{(-6)^{43}3^{-51}}{8^{19}(-3)^{60}}\left(\frac{3}{2}\right)^{-24} = \frac{-6^{43}3^{-51}}{8^{19}3^{60}}\left(\frac{2}{3}\right)^{24} = -\frac{(2{\cdot}3)^{43}3^{-51}}{(2^3)^{19}3^{60}}\frac{2^{24}}{3^{24}} = -\frac{2^{43}{\cdot}3^{43}3^{-51}2^{24}}{2^{57}3^{60}3^{24}} =$$

$$= -\frac{2^{43+24-57}{\cdot}3^{43-51}}{3^{60+24}} = -\frac{2^{10}{\cdot}3^{-8}}{3^{84}} = -\frac{2^{10}}{3^{84+8}} = \boxed{-\frac{2^{10}}{3^{92}}}$$

b) $\dfrac{\sqrt{a^3\sqrt{a}}\sqrt[4]{32a^3}}{\sqrt[6]{64a^5b^3}}$

$$\frac{\sqrt{a^3\sqrt{a}}\sqrt[4]{32a^3}}{\sqrt[6]{64a^5b^3}} = \frac{\sqrt{\sqrt{a^6a}}\sqrt[4]{2^5a^3}}{\sqrt[6]{2^6a^5b^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^7}\sqrt[4]{2^5a^3}}{\sqrt[6]{2^6a^5b^3}}\frac{\sqrt[6]{ab^3}}{\sqrt[6]{ab^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^7 2^5a^3}\sqrt[6]{ab^3}}{\sqrt[6]{2^6a^6b^6}} =$$

$$= \frac{2\sqrt[4]{2a^{10}}\sqrt[6]{ab^3}}{2ab} = \frac{2a^2\sqrt[4]{2a^2}\sqrt[6]{ab^3}}{2ab} = \frac{a\sqrt[12]{2^3a^6}\sqrt[12]{a^2b^6}}{b} = \frac{a\sqrt[12]{2^3a^6a^2b^6}}{b} =$$

$$= \boxed{\frac{a\sqrt[12]{2^3a^8b^6}}{b}}$$

c) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}\,\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{3^2(\sqrt{2})^2-2{\cdot}3\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{9.2-3} = \frac{18-6\sqrt{6}+3}{18-3} = \frac{21-6\sqrt{6}}{15} = \frac{3(7-2\sqrt{6})}{15} =$$

$$= \boxed{\frac{7-2\sqrt{6}}{5}}$$

2) Hallar m para que el resto de la división de $P(x) = mx^5 - 2x^4 + 3x^3 - 1$ entre $x + 2$ sea -3. *(1,5 puntos)*

Según el Teorema del Resto, el resto de la división de $P(x)$ entre $x + 2$ es $P(-2)$. Por tanto:

$$-3 = P(-2) = m(-2)^5 - 2(-2)^4 + 3(-2)^3 - 1 = -32m - 32 - 24 - 1 = -32m - 57 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32m = 3 - 57 \Rightarrow 32m = -54 \Rightarrow m = -54/32 \Rightarrow \boxed{m = -27/16}$$

3) Clasificar y resolver el siguiente sistema por el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método ni forma). Además, si la solución no fuese única, decir dos soluciones concretas: *(2 puntos)*

$$\left.\begin{aligned} 3x - y - z &= 0 \\ 2x - 2y + z &= 18 \\ 5x + y - 5z &= -36 \end{aligned}\right\}$$

Triangularizamos, por Gauss, la *matriz ampliada*:

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 18 \\ 5 & 1 & -5 & -36 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 18 \\ 8 & 0 & -6 & -36 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+2F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz está triangularizada (en la columna 2 hay ceros en todas las posiciones menos la de la primera fila; desechando dicha fila, en la columna 1 hay 0 en todas las posiciones menos en la segunda fila). Ninguna fila es toda de ceros menos la posición correspondiente a los términos independientes (última columna), por lo que no es incompatible. Y la tercera fila es toda de ceros, con lo que debe ser combinación lineal del resto y hay que desecharla. Por tanto, $r(A) = r(A') = 2 <$ nº de incógnitas, con lo que estamos ante un $\boxed{\text{sistema compatible indeterminado}}$, con infinitas soluciones.

Llamamos $z = t$ (le damos un valor arbitrario y fijo a una de las incógnitas, que no sea y, porque en ella hay uno de los 0 de la triangularización y nos resultaría algo más largo resolver la ecuación, aunque también lo conseguiríamos). Pasándola al segundo miembro, el sistema será:

$$\left.\begin{array}{rl} 3x - y = & t \\ -4x \quad = & 18-3t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2^{\text{a}}\, ec: \quad x = \dfrac{3t-18}{4} \\ 1^{\text{a}}\, ec: \quad y = 3\dfrac{3t-18}{4} - t = \dfrac{9t-54-4t}{4} = \dfrac{5t-54}{4} \end{array}$$

La forma de las infinitas soluciones es: $\boxed{\left(\dfrac{3t-18}{4}, \dfrac{5t-54}{4}, t\right)}$

Por último, nos piden dos soluciones concretas:

- $t = 2$: $\boxed{(-3, -11, 2)}$
- $t = -2$: $\boxed{(-6, -16, -2)}$

4) Resolver la ecuación: $2^{2x+1} = 17\cdot 2^x - 8$ *(1,5 puntos)*

En este tipo de ecuaciones hemos de buscar que la incógnita aparezca de una única forma. Parece que podremos ponerla siempre en la forma 2^x. Lo intentamos:

$$2^{2x+1} = 17\cdot 2^x - 8 \Rightarrow 2\cdot 2^{2x} - 17\cdot 2^x + 8 = \Rightarrow 2\cdot(2^x)^2 - 17\cdot 2^x + 8 = 0$$

Realizamos el *cambio de incógnita*: $\boxed{t = 2^x}$:

$$2t^2 - 17t + 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{17 \pm \sqrt{289-64}}{4} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{17 \pm 15}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ 8 \end{array}\right.$$

Y deshacemos el cambio:

- $t = 1/2 \Rightarrow$ Como $2^x = t$: $2^x = 1/2 \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Rightarrow \boxed{x = -1}$ ó:
- $t = 8 \Rightarrow$ Como $2^x = t$: $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

5) Resolver la ecuación: $\log(2x^2 - 1) - \log(3x + 2) = 1 - \log 50$ *(1,5 puntos)*

Como no se puede simplificar log de una suma, no nos queda más remedio que eliminar los logaritmos. Ello puede hacerse en base a la propiedad:

$$\log\ a = \log b \iff a = b,\ \text{siempre que}\ a, b > 0$$

Aplicando propiedades de log:

$$\log(2x^2 - 1) - \log(3x + 2) = 1 - \log 50 \iff \log\frac{2x^2-1}{3x+2} = \log 10 - \log 50 \iff$$

$$\iff \log\frac{2x^2-1}{3x+2} = \log\frac{10}{50} \iff \frac{2x^2-1}{3x+2} = \frac{1}{5}$$, siempre que estos valores se mantengan estrictamente positivos. La ecuación resultante equivale a:

$$10x^2 - 5 = 3x + 2 \iff 10x^2 - 3x - 7 = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9+280}}{20} = \frac{3\pm 17}{20} = \begin{cases} -\frac{7}{10} \\ 1 \end{cases}$$

Pero $x = -7/10$ no es válida, ya que anula los argumentos de los dos log del primer miembro de la ecuación original. Así que hay una única solución:

$$\boxed{x = 1}.$$

6) a) Simplificar: $\dfrac{3x^4 - 9x^3 - 3x + 9}{2x^3 + 8x^2 + 2x - 12}$ *(1,5 puntos)*

Factorizamos por separado numerador y denominador. Lo hacemos por Ruffini:

	3	– 9	0	– 3	9
1		3	– 6	– 6	– 9
	3	– 6	– 6	– 9	0
3		9	9	9	
	3	3	3	0	

Llegados a este punto, no encontramos cómo seguir. Así que intentamos factorizar el polinomio igualándolo a cero y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante:

$3x^2 + 3x + 3 = 0 \Rightarrow$ (Multiplicando ambos miembros por 1/3): $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

que no tiene solución, puesto que no existe la raíz de un número negativo. Por tanto:

$$3x^4 - 9x^3 - 3x + 9 = (x - 1)(x - 3)(3x^2 + 3x + 3)$$

	2	8	2	– 12
1		2	10	12
	2	10	12	0
– 2		– 4	– 12	
	2	6	0	
– 3		– 6		
	2	0		

De donde: $2x^3 + 8x^2 + 2x - 12 = 2(x - 1)(x + 2)(x + 3)$

Por tanto:

$$\frac{3x^4 - 9x^3 - 3x + 9}{2x^3 + 8x^2 + 2x - 12} = \frac{(x-1)(x-3)(3x^2+3x+3)}{2(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{(x-3)(3x^2+3x+3)}{2(x+2)(x+3)} =$$

$$= \boxed{\frac{3x^3 - 6x^2 + 6x - 9}{2x^2 + 10x + 12}},\ \text{si}\ x \neq 1, x \neq -2, x \neq -3$$

pues hay que excluir los valores que anulan el denominador.

b) Resolver la ecuación: $\dfrac{3x^4-9x^3-3x+9}{2x^3+8x^2+2x-12}=0$ *(0,5 puntos)*

Sabemos que la ecuación equivale a:

$$\frac{(x-3)(3x^2+3x+3)}{2(x+2)(x+3)}=0, \text{ con } x\neq 1,\ x\neq -2,\ x\neq -3$$

Y una fracción se anula cuando y solamente cuando lo hace el numerador pero no el denominador. Así:

$$(x-3)(3x^2+3x+3)=0 \iff \begin{cases} x-3=0 \iff x=3 \\ 3x^2+3x+3=0, \text{sin solución} \end{cases}$$

Luego la única solución es $\boxed{x=3}$.

IES Fernando de Herrera **13 de enero de 2014**
Primer trimestre - Recuperación – 1º Bach CCSS

NOMBRE: ____

1) Simplificar aplicando propiedades de radicales y potencias, de manera que el resultado quede sin exponentes negativos ni fraccionarios y con el denominador racionalizado: *(1,5 puntos)*

   a) $\dfrac{(-6)^{51}(-8)^{-13}}{(-4)^{22}}$

   b) $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt{2a}}}{\sqrt[5]{2a^3}}$

   c) $\dfrac{2-2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}$

2) Resolver y discutir (clasificar) el siguiente sistema por el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método). Si tuviera más de una solución, además de dar la forma general de todas las soluciones, decir dos soluciones concretas: *(2 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} -2x+3y+2z=10 \\ 3x+4y+3z=5 \\ -9x+5y+3z=25 \end{array}\right\}$$

3) a) Factorizar los siguientes polinomios: *(1 punto)*

$$P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2x - 4; \quad Q(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

   b) Resolver la ecuación: $\dfrac{2x^4+4x^3-2x-4}{2x^2-5x+3}=0$ *(1 punto)*

4) Hallar el valor de a para que la división del polinomio $P(x) = ax^4 - 2x^3 - 3x + 2$ entre $x + 2$ tenga como resto –8. *(1,5 puntos)*

5) Resolver la ecuación: $3^x - 2\cdot 9^x + 15 = 0$ *(1,5 puntos)*

6) Resolver: $3 \log 2x - 2 \log x = \log (4x + 1)$ *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Simplificar aplicando propiedades de radicales y potencias, de manera que el resultado quede sin exponentes negativos ni fraccionarios y con el denominador racionalizado: *(1,5 puntos)*

a) $\dfrac{(-6)^{51}(-8)^{-13}}{(-4)^{22}}$

Si el exponente es impar, positivo o negativo, el resultado de una potencia de base negativa es, también, negativo. Pero si el exponente es par, el resultado de la potencia será positivo. Por otra parte, un *exponente negativo* se convierte en positivo cambiando la potencia completa de un lado a otro de la fracción siempre que dicha potencia sea factor (esté multiplicando). Así:

$$\frac{(-6)^{51}(-8)^{-13}}{(-4)^{22}} = \frac{-6^{51}}{4^{22}(-8)^{13}} = \frac{-6^{51}}{4^{22}(-8^{13})} = \frac{-6^{51}}{-4^{22}8^{13}} = \frac{6^{51}}{4^{22}8^{13}} =$$

Para poder unificar las potencias, intentamos hacer coincidir las bases:

$$= \frac{6^{51}}{4^{22}8^{13}} = \frac{(2\cdot3)^{51}}{(2^2)^{22}(2^3)^{13}} = \frac{2^{51}3^{51}}{2^{44}2^{39}} = \frac{3^{51}}{2^{44+39-51}} = \boxed{\frac{3^{51}}{2^{32}}}$$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt{2a}}}{\sqrt[5]{2a^3}}$

Para introducir un factor en un radical, se multiplica el exponente del factor por el índice del radical. Y la raíz de una raíz (sin nada entre ellas) es otra raíz con el índice resultante de multiplicar los índices originales. Y para racionalizar el denominador, multiplicamos por una raíz del mismo índice con los mismos factores elevados a exponentes tales que, al sumarlos con los de partida, resulten potencias con exponentes múltiplos del índice:

$$\frac{\sqrt[3]{a\sqrt{2a}}}{\sqrt[5]{2a^3}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a^2 2a}}}{\sqrt[5]{2a^3}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2a^3}}}{\sqrt[5]{2a^3}} = \frac{\sqrt[6]{2a^3}}{\sqrt[5]{2a^3}} = \frac{\sqrt[6]{2a^3}}{\sqrt[5]{2a^3}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2^4a^2}}{\sqrt[5]{2^4a^2}} = \frac{\sqrt[6]{2a^3}\sqrt[5]{2^4a^2}}{\sqrt[5]{2^5a^5}} =$$

para multiplicar dos radicales, necesitamos que tengan el mismo índice. Para ello, multiplicamos índice y exponentes por un mismo número:

$$= \frac{\sqrt[30]{2^5a^{15}}\sqrt[30]{2^{24}a^{12}}}{2a} = \frac{\sqrt[30]{2^5a^{15}2^{24}a^{12}}}{2a} = \boxed{\frac{\sqrt[30]{2^{29}a^{27}}}{2a}}$$

c) $\dfrac{2-2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}$

Para racionalizar un denominador que contenga raíces cuadradas en una suma o resta, multiplicamos y dividimos por el *conjugado* del denominador:

$$\frac{2-2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}} = \frac{2-2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}\cdot\frac{2-2\sqrt{3}}{2-2\sqrt{3}} = \frac{(2-2\sqrt{3})^2}{2^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{2^2-2\cdot2\cdot2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2}{4-2^2(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{4-8\sqrt{3}+4\cdot3}{4-4\cdot3} = \frac{4-8\sqrt{3}+12}{4-12} = \frac{16-8\sqrt{3}}{-8} = -\frac{16-8\sqrt{3}}{8} = \frac{-(16-8\sqrt{3})}{8} =$$

$$= \frac{8\sqrt{3}-16}{8} = \frac{8(\sqrt{3}-2)}{8} = \boxed{\sqrt{3}-2}$$

2) Resolver y discutir (clasificar) el siguiente sistema por el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método). Si tuviera más de una solución, además de dar la forma general de todas las soluciones, decir dos soluciones concretas: *(2 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} -2x+3y+2z=10 \\ 3x+4y+3z=\ \ 5 \\ -9x+5y+3z=25 \end{array}\right\}$$

Triangularizamos la *matriz ampliada*:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 10 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ -9 & 5 & 3 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3-3F_1]{2F_2-3F_1} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 10 \\ 12 & -1 & 0 & -20 \\ -12 & 1 & 0 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 10 \\ 12 & -1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya está triangularizada. Al ser la última fila completa de 0, la eliminamos. Quedan, entonces, 2 ecuaciones con 3 incógnitas, por lo que estamos ante un **sistema compatible indeterminado**. Reconstruimos el sistema y lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} -2x+3y+2z=10 \\ 12x-y\qquad =-20 \end{array}\right\}$$

Llamamos $x = t$ (le damos un valor arbitrario y fijo a una de las incógnitas, que no sea z, porque en ella hay uno de los 0 de la triangularización y nos resultaría algo más largo resolver la ecuación, aunque también lo conseguiríamos). Pasándola al segundo miembro, el sistema será:

$$\left.\begin{array}{l} 3y+2z=10+2t \\ -y\qquad =-20-12t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} 2^{a}ec: & y=20+12t \\ 1^{a}ec: & 2z=10+2t-3(20+12t)=10+2t-60-36t= \\ & =-50-34t \Rightarrow z=-25-17t \end{array}$$

La forma de las infinitas soluciones es, entonces: $\boxed{(t,\ 20+12t,\ -25-17t)}$

Nos piden dos soluciones concretas:

- $t = 0 \Rightarrow (0, 20, -25)$
- $t = 1 \Rightarrow (1, 32, -42)$

3) a) Factorizar los siguientes polinomios: *(1 punto)*

$$P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2x - 4; \qquad Q(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

- Factorizamos $P(x)$ por Ruffini:

	2	4	0	–2	–4
1		2	6	6	4
	2	6	6	4	0
–2		–4	–4	–4	
	2	2	2	0	

Llegados a este punto, no encontramos cómo seguir. Así que intentamos factorizar el polinomio igualándolo a cero y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante:

$2x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow$ (Multiplicando ambos miembros por 1/2): $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$

que no tiene solución, puesto que no existe la raíz de un número negativo. Por tanto, como no conocemos las 4 raíces posibles del polinomio de grado 4, no es aplicable el *Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios*, por lo que la factorización es la que hemos obtenido por *Ruffini*:

$$P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2x - 4 = \boxed{(x-1)(x+2)(2x^2 + 2x + 2)}$$

- Factorizamos $Q(x)$. Como es de grado 2, en lugar de probar por Ruffini, lo igualamos a cero y averiguamos sus raíces:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{4}{4} = 1 \\ = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Como conocemos las 2 raíces del polinomio, que es de grado 2, aplicamos el *Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios*:

$$Q(x) = 2x^2 - 5x + 3 = \boxed{2(x-1)(x-3/2)}$$

b) Resolver la ecuación: $\dfrac{2x^4 + 4x^3 - 2x - 4}{2x^2 - 5x + 3} = 0$ *(1 punto)*

Los dos polinomios los tenemos descompuestos, por lo que podemos simplificar la ecuación:

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 2x - 4}{2x^2 - 5x + 3} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x-1)(x+2)(2x^2 + 2x + 2)}{2(x-1)(x-3/2)} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{2(x+2)(x^2 + x + 1)}{2(x-1)(x-3/2)} = 0, \text{ si } x \neq 1,\ x \neq 3/2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{(x+2)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x-3/2)} = 0, \text{ si } x \neq 1,\ x \neq 3/2$$

Como el denominador no se puede anular nunca, no habría que especificar que tiene que ser $x \neq 3/2$, porque ya se ve que hace 0 el denominador; pero hemos de señalar que tiene que ser $x \neq 1$, porque se ha perdido en la simplificación.

Una fracción se hace 0 si y solamente si lo hace el numerador, pero no el denominador. De modo que la solución de esta ecuación son los valores que anulen el numerador, pero, de ellos, hay que descartar los que también anulen el denominador. En este caso, al haber hecho la simplificación, ya han sido descartados los que anulan también el denominador, pero recordamos la teoría general. Así, la solución la obtendremos de:

$$(x+2)(x^2 + x + 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \\ x^2 + x + 1 = 0, \text{ no tiene solución} \end{cases}$$

Lo que se ha resuelto teniendo en cuenta que un producto vale 0 si, y sólo si, alguno de los factores se anula.

Por tanto, la solución final es $\boxed{x = -2}$.

4) Hallar el valor de a para que la división del polinomio $P(x) = ax^4 - 2x^3 - 3x + 2$ entre $x + 2$ tenga como resto –8. *(1,5 puntos)*

Por el *Teorema del Resto*, el resto de dividir $P(x)$ entre $x-(-2)$ es igual a $P(-2)$. Por tanto, debe ocurrir:

$$P(-2) = -8 \;\Leftrightarrow\; a(-2)^4 - 2(-2)^3 - 3(-2) + 2 = -8 \;\Leftrightarrow\; 16a - 2(-8) + 6 + 2 = -8 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 16a + 16 + 8 = -8 \ \Leftrightarrow\ 16a + 24 = -8 \ \Leftrightarrow\ 16a = -8 - 24 \ \Leftrightarrow\ \boxed{a = -2}$$

5) Resolver la ecuación: $3^x - 2\cdot 9^x + 15 = 0$ *(1,5 puntos)*

No podemos conseguir que x aparezca en un solo lugar, por lo que vamos a probar un cambio de incógnita:

$$3^x - 2\cdot 9^x + 15 = 0 \ \Leftrightarrow\ 3^x - 2\cdot(3^2)^x + 15 = 0 \ \Leftrightarrow\ 3^x - 2\cdot 3^{2x} + 15 = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 3^x - 2\cdot(3^x)^2 + 15 = 0$$

Y llamando $\boxed{t = 3^x}$, queda:

$$-2t^2 + t + 15 = 0 \ \Leftrightarrow\ 2t^2 - t - 15 = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ t = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{1 \pm 11}{4} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-10}{4} = -\dfrac{5}{2} \\ = \dfrac{12}{4} = 3 \end{array} \right.$$

Deshacemos el cambio:

- $t = -5/2 \ \Leftrightarrow\ 3^x = -5/2$, lo que no es posible ($3^x > 0,\ \forall x$)
- $t = 3 \ \Leftrightarrow\ 3^x = 3 \ \Leftrightarrow\ \boxed{x = 1}$

6) Resolver: $3 \log 2x - 2 \log x = \log (4x + 1)$ *(1,5 puntos)*

Ya que no es posible desarrollar $\log(4x + 1)$, intentamos eliminar logaritmos:

$$3 \log 2x - 2 \log x = \log (4x + 1) \ \Leftrightarrow\ \log (2x)^3 - \log x^2 = \log (4x + 1) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \log \frac{2^3 x^3}{x^2} = \log(4x+1) \ \Leftrightarrow\ \log 8x = \log(4x+1) \ \Rightarrow\ 8x = 4x + 1 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 4x = 1 \ \Leftrightarrow\ \boxed{x = 1/4}$$

que es una solución válida porque no anula ningún argumento de los logaritmos de la ecuación original.