PROBABILIDAD
Fórmulas y definiciones básicas

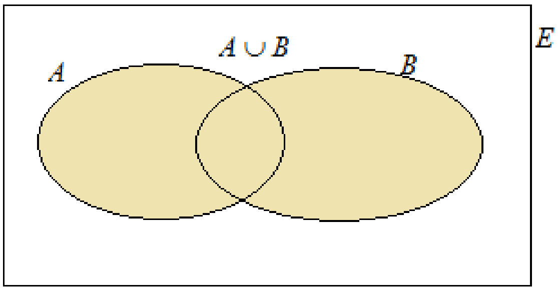
1) Definiciones básicas

- **Experimento aleatorio**: Aquél en el que interviene el azar (no es posible predecir el resultado de cada realización del experimento).
- **Resultado elemental**: Todo resultado directo de efectuar una vez el experimento aleatorio objeto de estudio.
- **Espacio muestral *E***: Conjunto que contiene todos los posibles resultados elementales.
- **Suceso**: Cualquier subconjunto del espacio muestral. El propio *espacio muestral* es un *suceso*. Está formado, por tanto, por resultados elementales.
- **Un suceso se verifica** cuando al realizar el experimento aleatorio se obtiene un resultado (elemental) que es elemento de dicho suceso.
- **Suceso elemental**: Conjunto formado por un único *resultado elemental*.
- **Suceso seguro**: El *espacio muestral*: *E*.
- **Suceso imposible**: Conjunto vacío, que no contiene ningún resultado elemental: $\varnothing$.
- Con lenguaje coloquial suele ser posible describir un suceso de más de una forma. Para determinarlo, hay que escribirlo en forma de conjunto con los resultados elementales de que consta.

2) Operaciones con sucesos

Los gráficos nos sirven para razonar.

Pondremos ejemplos con el experimento de *lanzar un dado de parchís y anotar el resultado*, donde $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y consideraremos $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$. (Observar que 1 es un *resultado elemental*, y que $\{1\}$ es un *suceso elemental*; la diferencia es que los *sucesos* son *conjuntos*).



En el ejemplo: $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

Unión de sucesos: $A \cup B$

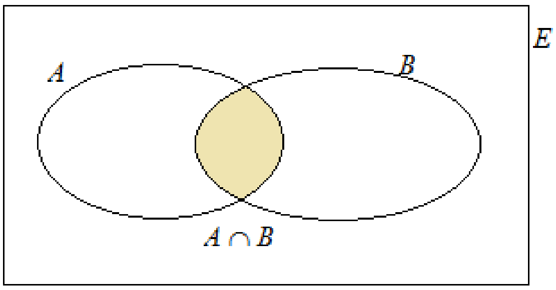
Es el suceso que se verifica si ocurre *A* **ó** *B*. (La disyunción **ó** es clave para identificar esta operación).

Está constituida por todos los resultados elementales que están en *A*, en *B* o en ambos.

También nos referimos a él como "que ocurra al menos uno de los sucesos *A* ó *B*".

Es una operación conmutativa:

$$A \cup B = B \cup A$$



En el ejemplo: $A \cap B = \{2, 4\}$

Intersección de sucesos: $A \cap B$

Es el suceso que se verifica si ocurre *A* **y** *B*. (La conjunción **y** es clave para identificar esta operación).

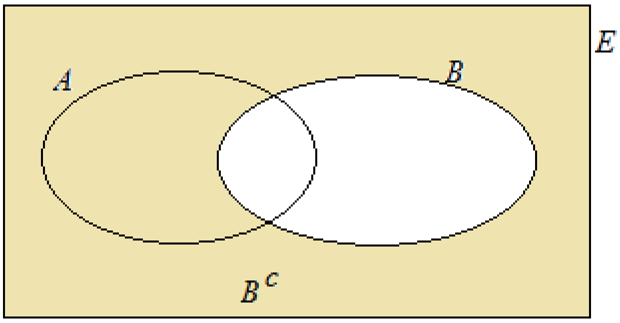
Está constituida por todos los resultados elementales que están en *A* y en *B* a la vez.

También nos referimos a él como "que ocurran *A* y *B* simultáneamente".

Es una operación conmutativa:

$$A \cap B = B \cap A$$

Dos sucesos se dicen **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.



En el ejemplo: $A^c = \{1, 5, 6\}$ $B^c = \{1, 3, 5\}$

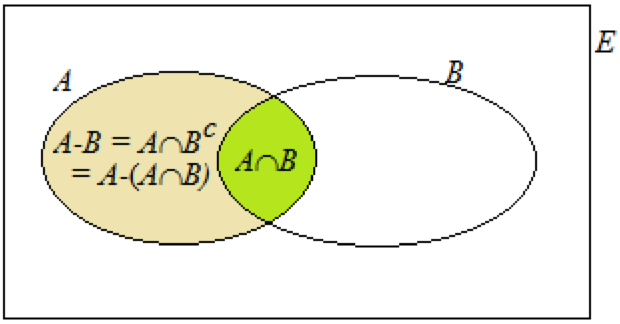
Suceso contrario de *A*: A^c

Es el suceso que se verifica si **no** ocurre *A*.

Está constituida por todos los resultados elementales que *no* están en *A* (en el gráfico está representado B^c).

Otras notaciones son $\overline{A}$ ó A'.

Se verifica que: $(A^c)^c = A$.



En el ejemplo: $A - B = \{3\}$ $B - A = \{6\}$

Diferencia de sucesos: $A - B$

Es el suceso que se verifica si ocurre *A* pero no ocurre *B*.

Está constituida por todos los resultados elementales que están en *A* salvo los que también estén en *B*.

Es una operación que se puede poner en función de las anteriormente mencionadas. Así, es importante saber que:

$$A - B = A \cap B^c = A - (A \cap B)$$

Y que:

$$(A - B) \cup (A \cap B) = A$$
$$(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$$

No es conmutativa: $A - B \neq B - A$.

Si $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A - B = A$ y también $B - A = B$.

Otras propiedades de las operaciones con sucesos

1) **Leyes de Morgan** (*muy importantes*):
   $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2) **Distributivas** (*no tan importantes*):
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3) **De un suceso y su contrario** (*importantes*):
   $A \cup A^c = E$
   $A \cap A^c = \varnothing$

Hay más propiedades, pero éstas son las que nos pueden resultar útiles.

3) Probabilidad de un suceso

La probabilidad es una medida que se asigna a cada suceso para visualizar si se espera que salga más o menos veces. Viene a ser la *proporción* o *tanto por uno* de veces que un suceso se verifica de entre la totalidad de las veces que pudiera realizarse el experimento aleatorio.

La probabilidad de aparición de un suceso A al realizar el experimento aleatorio se designa por $P(A)$. Tiene las siguientes **propiedades**:

1) $\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$. Por tanto, si calculando una probabilidad obtenemos un valor negativo o mayor que 1 hemos cometido algún error.
2) $\mathbf{P(E) = 1}$. $\mathbf{P(\varnothing) = 0}$.
3) $\mathbf{P(A^c) = 1 - P(A)}$.
4) $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

En el caso particular de que los sucesos sean ***incompatibles***, es decir, que $A \cap B = \varnothing$ $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = 0$ (según la propiedad 2). Por tanto, esta fórmula se transforma en:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

5) $\mathbf{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)}$

4) Regla de Laplace

Si los sucesos elementales son *equiprobables*, es decir, tienen las mismas posibilidades de aparecer, la probabilidad de un suceso se calcula dividiendo el número de resultados elementales de que consta dicho suceso (a lo que se llama *casos favorables*) entre el número total de resultados elementales, recogidos en el *espacio muestral E* (a lo que se llama *casos posibles*). A esto se conoce como *Regla de Laplace*:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}}$$

Es una regla versátil y fácil para el cálculo de probabilidades sencillas.

5) Probabilidad Condicionada

La *probabilidad de que se verifique el suceso A sabiendo que se ha verificado el suceso B* ***en la misma realización del experimento aleatorio*** se designa por $P(A/B)$, lo que se lee como *probabilidad de A* ***condicionada*** *a B*. Se calcula mediante la siguiente fórmula (que es un axioma):

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \qquad (1)$$

Esta fórmula también se emplea así:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B/A)} \qquad (2)$$

Nota: Lo contrario de A/B es A^c/B, puesto que, dando por sabido que, en determinada realización, se ha verificado B, lo contrario de que suceda A es que suceda A^c. Por tanto:

$$\boxed{P(A^c/B) = 1 - P(A/B)} \qquad (3)$$

Sucesos independientes

Dos sucesos A y B se dicen **independientes** si el hecho de que suceda uno no cambia la probabilidad de que suceda el otro. Es decir:

$P(A/B) = P(A)$ o de forma equivalente: $P(B/A) = P(B)$

La fórmula (2) se escribe entonces así:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

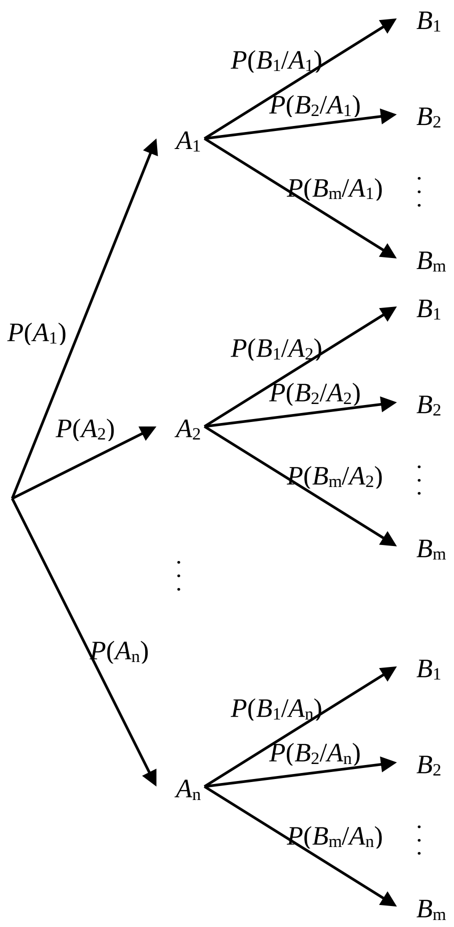
Esto último es **condición necesaria y suficiente** para que dos sucesos sean independientes. Es decir, **esto es cierto si, y sólo si, *A* y *B* son independientes**.

En general, no tiene nada que ver que dos sucesos sean *independientes* con que sean *incompatibles*.

6) Diagramas de árbol

Un diagrama de árbol es muy útil para resolver problemas de *probabilidad condicionada*. Representamos mediante un diagrama de árbol dos experimentos aleatorios relacionados (dependientes el uno del otro): de uno de ellos, conocemos las probabilidades de cada suceso elemental; y del otro, las probabilidades de cada suceso elemental condicionadas a cada uno de los sucesos elementales del primer experimento aleatorio.

Partiendo de un origen común, escribimos segmentos que terminan en cada uno de los posibles resultados elementales (mutuamente excluyentes) del primer experimento aleatorio: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Sobre cada uno de dichos segmentos o *ramas* anotamos la probabilidad de que se verifique el suceso correspondiente. Así, como están todas las posibilidades del experimento aleatorio, la suma de las mismas debe ser 1 (en el diagrama adjunto: $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$).
Para *cada resultado* del primer experimento, escribimos, con origen en él, segmentos o *ramas* que terminen en cada uno de los posibles resultados elementales (mutuamente excluyentes) del 2º: $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Sobre cada rama, anotamos la probabilidad de que se verifique el correspondiente suceso del 2º experimento *condicionada* a que se sabe que se ha verificado el suceso del 1er experimento del que parte dicha rama. Como están todas las posibilidades del 2º, todas esas probabilidades que parten de un resultado del 1º deben sumar 1. Y esto se repite, como se ha dicho, para cada resultado del 1er experimento (en el diagrama adjunto, $P(B_1/A_1) + P(B_2/A_1) + \ldots + P(B_m/A_1) = 1$, y lo mismo para $A_2, \ldots, A_n$).

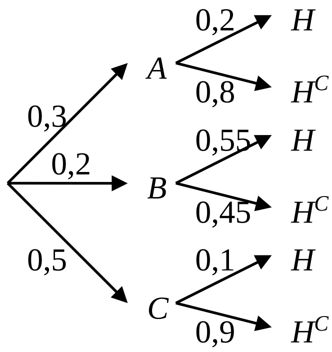


Es decir, tenemos en cuenta que:

- Sobre cada rama escribimos la probabilidad de que se verifique el suceso terminal de la misma *condicionado* al suceso inicial.
- Al principio del árbol no se coloca ningún suceso, con lo que las ramas iniciales contienen las probabilidades de los sucesos en los que terminan, sin condicionar a nada.
- Todas las probabilidades de las ramas que tienen un origen común deben sumar 1, porque los sucesos terminales de las mismas deben cubrir todas las posibilidades de resultados y ser incompatibles entre sí.

Ejemplo: Una determinada enfermedad puede estar provocada por 3 causas, A, B o C, en las proporciones 30%, 20% y 50% respectivamente. En cada enfermo sólo se presenta una de estas 3 causas. El tratamiento de esta enfermedad requiere hospitalización en el 20% de los casos si está provocada por A, en el 55% si la causa es B y en el 10% si la causa es C.
El árbol que representa esta situación está representado en el gráfico. Las proporciones que nos dan son las *probabilidades*, pero en *tantos por ciento*. Las debemos transformar

en *tantos por uno*, que es como se miden las probabilidades (recordar la primera propiedad de la *probabilidad*). La suma de las probabilidades de todas las ramas que tienen origen común es 1, como puede comprobarse. En el segundo paso, las ramas contienen las probabilidades de los sucesos terminales condicionadas a los iniciales: por ejemplo, $P(H/A) = 0.2$, ya que ésta es la probabilidad de que, escogido un enfermo al azar del que sepamos que tiene la enfermedad provocada por la causa A, dicho enfermo requiera hospitalización. O sea, la probabilidad de *requerir hospitalización* condicionada a que *se sabe que la causa es A*. Lo contrario es que *no requiera hospitalización sabiendo que la causa es A*. Por lo tanto, $P(H^c/A) = 1 - P(H/A) = 1 - 0.2 = 0.8$ (recordar la fórmula (3)).



Probabilidad de la intersección

En un árbol, el producto de todas las ramas que se recorren desde el comienzo (a la izquierda del todo) hasta un suceso terminal (a la derecha del todo) es la probabilidad de que se verifiquen todos los sucesos recorridos a la vez, es decir, de la intersección de dichos sucesos.

Esto es así porque si, por ejemplo, nos fijamos en la rama que va desde el origen del árbol hasta el suceso A_1 de la fase 1ª, sobre dicha rama figurará $P(A_1)$. Si consideramos, ahora, la rama que parte de A_1 hasta el suceso B_2 de la fase 2ª, sobre dicha rama figurará $P(B_2/A_1)$. Por tanto, el producto de ambas probabilidades es:

$$P(A_1)\cdot P(B_2/A_1) = P(A_1 \cap B_2)$$

según el Axioma de la Probabilidad Condicionada (fórmula (2)).

Ejemplo: En la situación antes descrita, calcular, de entre todos los enfermos que padecen dicha enfermedad, el porcentaje de ellos que tienen la enfermedad producida por la causa C y que requieren hospitalización.

La probabilidad de que, elegido un enfermo al azar, *la causa de su enfermedad sea C* **y** *requiera hospitalización* es:

$$P(C \cap H) = P(C)\cdot P(H/C) = 0{,}5\cdot 0{,}1 = 0{,}05$$

Como lo que nos piden es dicho valor en tantos por ciento, la respuesta es el 5%.

Teorema de la Probabilidad Total

Este teorema viene a decirnos, traducido al árbol, que la probabilidad de un suceso de la derecha del árbol, sin condicionar a nada, es la suma *de los productos* de las probabilidades que aparecen en todos los caminos posibles desde el inicio del árbol hasta cada uno de los lugares en los que se encuentra, a la derecha, dicho suceso.

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que un enfermo cualquiera de la citada enfermedad necesite hospitalización?

$$\begin{aligned} P(H) &= P(H/A)\cdot P(A) + P(H/B)\cdot P(B) + P(H/C)\cdot P(C) = \\ &= 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}55 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = \\ &= 0{,}22 \end{aligned}$$

Fórmula de Bayes

El árbol nos da directamente la probabilidad de un suceso que está al final de una rama condicionada al suceso inicial de dicha rama. A estas probabilidades se las llama *verosimilitudes*. En el árbol anterior, por ejemplo, $P(H/A) = 0{,}2$.

Es menos trivial calcular las probabilidades condicionadas al revés, a las que se llama *probabilidades a posteriori*. Por ejemplo, la $P(A/H)$. Éstas se calculan mediante el llamado *Teorema de Bayes*, una fórmula algo compleja, pero que en un árbol se resuelve con facilidad aplicando la fórmula (1) o *axioma de la probabilidad condicionada*.

Ejemplo: Si un enfermo está hospitalizado, ¿cuál es la probabilidad de que la causa sea A?

Nos están pidiendo $P(A/H)$, porque sabemos seguro que el enfermo está hospitalizado pero la causa puede ser A u otra, de modo que nos preguntamos por la probabilidad de que la causa sea A condicionada a que sabemos que está hospitalizado H. Según la fórmula (1) y lo dicho antes para calcular la probabilidad de la intersección en un árbol, la respuesta es (el denominador se calculó antes, y siempre se hace por el *Teorema de la Probabilidad Total*):

$$P(A/H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{P(A) \cdot P(H/A)}{P(H)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}2}{0{,}22} = 0{,}27$$

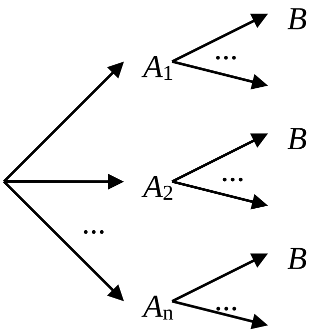
Nota: En un examen, las tres respuestas se pueden simplificar según lo dicho:

1) $P(C \cap H) = 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05$

2) $P(H) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}55 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}22$

3) $P(A/H) = \dfrac{P(A \cap H)}{P(H)} = \dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}2}{0{,}22} = 0{,}27$

Ampliación: El Teorema de la Probabilidad Total y la Fórmula de Bayes en rigor



Las fórmulas del Teorema de la Probabilidad Total y de Bayes son complejas. Veámoslas.

Supongamos un árbol general, donde de la raíz parten n sucesos incompatibles y que cubren todas las posibilidades: $A_1, A_2, \ldots A_n$. Sea B un suceso terminal del árbol. Dado que de cada rama parten todas las posibilidades, la unión de todos los sucesos con origen común es el suceso seguro E. Por tanto:

$$P(B) = P[B \cap E] = P[B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)] =$$

Por una de las propiedades *distributivas*:

$$= P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)] =$$

y como $A_1, \ldots, A_n$ son incompatibles entre sí, también lo son sus respectivas intersecciones con B (si A_i no tiene nada en común con A_j, tampoco lo tienen subconjuntos suyos: $B \cap A_i$ con $B \cap A_j$). Por tanto:

$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) =$$

$$= P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B / A_n) \cdot P(A_n)$$

donde se ha aplicado el Axioma de la Probabilidad Condicionada en cada suceso intersección. Luego: $\boxed{P(B) = P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B / A_n) \cdot P(A_n)}$, que es la fórmula rigurosa del **Teorema de la Probabilidad Total**. Coincide con lo que nosotros aplicamos, que resulta mucho más cómodo de recordar.

Aplicando, de nuevo, el Axioma de la Probabilidad Condicionada y el Teorema de la Probabilidad Total, se tiene:

$$\boxed{P(A_i / B) =} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \boxed{\frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B / A_n) \cdot P(A_n)}}$$

Y ésta es la **Fórmula de Bayes** en rigor. Como antes, es mucho más complicada de recordar que lo que nosotros hacemos, siendo equivalente.

7) Tablas de Contingencia

Cuando, en lugar de las probabilidades de cada suceso elemental, conocemos cuántos datos hay correspondientes a los mismos, los problemas que pueden resolverse mediante *diagramas de árbol* pueden abordarse de forma más fácil mediante *tablas de contingencia* y la fórmula de *Laplace*. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo: A una asamblea en la Universidad asisten 420 alumnos de los cuales 180 son de Empresariales, 72 de Relaciones Laborales y el resto de Derecho. Un tercio de los alumnos de Empresariales, dos tercios de los de Derecho y 16 alumnos de Relaciones Laborales votan NO a la huelga. El resto ha votado SÍ.

a) Calcule la probabilidad de que elegido un alumno al azar, sea de Empresariales y haya votado SÍ a la huelga.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que elegido un alumno al azar haya votado SÍ a la huelga?
c) Si elegido un alumno al azar, resulta que ha votado NO a la huelga, ¿cuál es la probabilidad de que sea de Relaciones Laborales?

Es un problema que puede resolverse mediante un diagrama de árbol, porque podemos calcular las probabilidades de $E \equiv$ *ser de Empresariales*: $P(E) = 180/420$ y, del mismo modo, del resto de sucesos elementales del primer experimento aleatorio ("*escoger al azar un alumno que asiste a la asamblea*"). También tenemos las del segundo experimento ($H \equiv$ *votar* si *a la huelga*) condicionadas a cada resultado del primero: por ejemplo, $P(H^c/E) = 1/3$. Pero lo abordamos por una tabla de contingencia.

En una tabla, colocamos en filas todas las posibilidades de uno de los fenómenos aleatorios relacionados, y en columnas, las del otro. Además, añadimos los totales. No tenemos todos los datos, pero podemos completar la tabla mediante simples sumas y restas. Hemos colocado en negro los datos que nos dan, y en color, los que deducimos de estos:

	E	R	D	Total
H	120	56	56	232
H^C	60	16	112	188
Total	180	72	168	420

donde, por ejemplo, los que han votado *no a la huelga* y son de *Empresariales* son 1/3 de 180, es decir, 60.

a) $P(E \cap H) = \dfrac{120}{420} = \dfrac{2}{7}$, pues 120 alumnos son de Empresariales y han votado sí a al huelga, de un total de 420.
b) $P(H) = \dfrac{232}{420} = \dfrac{58}{105}$, pues 232 alumnos votaron sí a la huelga de 420 en total.
c) $P(R / H^C) = \dfrac{16}{188} = \dfrac{4}{47}$, pues 16 alumnos son de Relaciones Laborales de un total de 188 que votaron no a la huelga.