1) Factorizar: $2x^3 + x^2 - 13x + 6$ *Sol: 2(x–2)(x+3)(x–1/2)*
2) Factorizar: $6x^4 - 29x^3 + 39x^2 - 19x + 3$ *Sol: 6(x–1)(x–3)(x–1/2)(x–1/3)*
3) Factorizar: $12x^3 + x^2 - 9x + 2$ *Sol: 12(x+1)(x–1/4)(x–2/3)*
4) Factorizar: $2x^3 - 18x$ *Sol: 2x(x–3)(x+3)*
5) Factorizar: $2x^3 - 2$ *Sol:* $2(x-1)(x^2+x+1)$
6) Factorizar: $-8x^2 + 6x - 1$ *Sol: –8(x–1/2)(x–1/4)*
7) Factorizar: $-4x^2 + 4x - 1$ *Sol:* $-4(x-1/2)^2$
8) Factorizar: $2x^2 + 4x + 2$ *Sol:* $2(x+1)^2$
9) Factorizar: $2x^3 - 4x^2 - 5x - 3$ *Sol:* $(x-3)(2x^2+2x+1)$
10) Simplificar: $\dfrac{x^5 - 32}{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16}$ *Sol: x–2*
11) Efectuar y simplificar el resultado: $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$ *Sol:* 0, *si* $x \neq 1 \wedge x \neq 2$
12) Efectuar y simplificar el resultado: $\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1-x}{1+x} - \dfrac{x^2}{1-x^2} + 1$ *Sol :* $3/(1-x^2)$ *, si* $x \neq -1 \wedge x \neq 1$
13) Efectuar y simplificar: $\dfrac{x^3 - 9x}{x^3 - x^2 - 9x + 9} + \dfrac{2x}{x^2 - 4x + 3} - \dfrac{15}{x-3}$ *Sol:* $(x-15)/(x-3)$, *si* $x \neq 1 \wedge x \neq 3 \wedge x \neq -3$
14) Efectuar y simplificar el resultado:

$$\frac{3}{x+2} - \frac{x^3 - 9x^2 + 29x - 6}{x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 32x + 32} + \frac{5}{x^3 - 7x^2 + 8x + 16}$$ *Sol:* $2/(x+1)$ *, si* $x \neq -1 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 4$

15) Efectuar y simplificar el resultado:

$$\frac{15x^2 - 28x - 6}{3x^2 - 15x + 18} - \frac{2x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2} - \frac{3x^2 - 4x}{x^2 - 5x + 6}$$ *Sol:* $2/(3x-6)$ *, si* $x \neq 1 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 3$

16) Sin efectuar la división, hallar el valor que debe tomar m para que sea exacta la división de $P(x) = mx^4 - 2x - 5$ entre $x + 2$. *Sol: m=1/16*
17) Sin efectuar la división, hallar el valor de a para que sea exacta la división del polinomio $P(x) = x^4 - ax^2 + 1$ entre $x - 2$. Efectuar la división factorizando, como consecuencia de la misma, $P(x)$. *Sol:* $a = 17/4$. $P(x)=(x-2)(x^3+2x^2-x/4-1/2)$
18) Hallar el valor de m para que el resto de efectuar la división del polinomio $P(x) = 3x^4 + mx^3 - x^2 + m$ entre $x + 3$ valga 2. *Sol: m=116/13*
19) Resolver la ecuación: $x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 32x + 32 = 0$ *Sol: –1, –2, 4 (sol. doble)*
20) Resolver la ecuación: $8x^3 - 42x^2 = 21 - 55x$ *Sol: 1, 3/4, 7/2*
21) Resolver la ecuación: $3x(x - 2)(x + 1) = 0$ *Sol: –1, 0, 2*
22) Resolver la ecuación: $\dfrac{x-3}{x^2 - x - 2} - \dfrac{2}{2x+2} = \dfrac{4}{x+1}$ *Sol: 7/4*
23) Resolver la ecuación: $\dfrac{1}{2x+2} - \dfrac{5}{x^2 + 4x + 3} = \dfrac{4x}{x+3} - \dfrac{8}{2x^2 + 8x + 6}$ *Sol: 1/8*
24) Resolver la ecuación: $e^x(x + 2)(2x - 1) = 0$ *Sol: –2, 1/2*
25) Resolver la ecuación: $3(x - \sqrt{2})\log(x+1) = 0$ *Sol:* $\sqrt{2}$ *, 0*
26) Resolver la ecuación: $4(x - \pi)(x + 3) \ln x = 0$ *Sol:* π*, –3, 1*

Problema resuelto:

1) Resolver la ecuación: $\dfrac{23x-31}{-18x^2+42x-12}+\dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2-6x+4}=\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2-12x-15}$

Factorizamos los denominadores. Y comprobamos si las raíces de cada denominador lo son también del numerador correspondiente, para simplificar factores, en su caso. Si hacemos alguna de estas simplificaciones, explicitaremos que x no puede ser igual a la raíz obtenida, porque los denominadores no pueden valer 0 en ningún caso.

- Primera fracción:

$$-18x^2+42x-12=0 \Rightarrow -6(3x^2-7x+2)=0 \Rightarrow 3x^2-7x+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{7\pm 5}{6}=\left\langle \begin{array}{l} =\dfrac{7-5}{6}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{7+5}{6}=2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{-18x^2+42x-12=-18(x-1/3)(x-2)}$$

Para $x=1/3$, el valor numérico del numerador no se anula. Tampoco para $x=2$. Por ello, la primera fracción no es reducible.

- Segunda fracción:

$$2x^2-6x+4=0 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\left\langle \begin{array}{l} =1 \\ =2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{2x^2-6x+4=2(x-1)(x-2)}$$

Para $x=1$ el valor numérico del numerador es: $2-5+3=0$, por lo que sí es raíz. Como la conocemos, nos es más fácil factorizarlo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rr|r} & 2 & -5 & 3 \\ 1 & & 2 & -3 \\ \hline & 2 & -3 & 0 \\ 3/2 & & 3 & \\ \hline & 2 & 0 & \end{array}$$

Por tanto: $\boxed{2x^2-5x+3=2(x-1)(x-3/2)}$

- Tercera fracción:

$\boxed{3x^2-12x-15=3(x^2-4x-5),}$ es decir, 3 veces el denominador. Por tanto, también es reducible. Hallamos las raíces del denominador, porque hay que excluirlas de las soluciones, pues el denominador nunca puede anularse. Y si simplificamos, sin más, no nos vamos a dar cuenta de cuáles eran los valores con los que hemos de tener cuidado:

$$x^2-4x-5=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\left\langle \begin{array}{l} =-1 \\ =5 \end{array}\right.$$

De esta forma, la ecuación se transforma en:

$$\frac{23x-31}{-18(x-1/3)(x-2)}+\frac{2(x-1)(x-3/2)}{2(x-1)(x-2)}=\frac{x^2-4x-5}{3(x^2-4x-5)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{23x-31}{-18(x-1/3)(x-2)}+\frac{2(x-3/2)}{2(x-2)}=\frac{1}{3}, \text{ si } x\neq -1,\ x\neq 5,\ x\neq 2,\ x\neq 1/3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-23x+31}{18(x-1/3)(x-2)}+\frac{9\cdot 2(x-3/2)(x-1/3)}{9\cdot 2(x-2)(x-1/3)}=\frac{6(x-2)(x-1/3)}{3\cdot 6(x-2)(x-1/3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-23x+31}{18(x-1/3)(x-2)}+\frac{(18x-27)(x-1/3)}{18(x-2)(x-1/3)}-\frac{(x-2)(6x-2)}{18(x-2)(x-1/3)}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-23x+31+18x^2-6x-27x+9-(6x^2-2x-12x+4)}{18(x-1/3)(x-2)}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{18x^2-56x+40-6x^2+14x-4}{18(x-1/3)(x-2)}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{12x^2-42x+36}{18(x-1/3)(x-2)}=0$$

Una fracción se anula si lo hace el numerador pero no el denominador. Así que igualamos el numerador a 0 y excluimos, de las soluciones que obtengamos, los valores que anulan los denominadores, y que indicamos antes (aunque no hemos ido arrastrándolos a cada paso):

$$12x^2 - 42x + 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 7x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ 2 \end{array} \right.$$

$x = 2$ no es válida, pues anula denominadores. De modo que la solución única es:

$$\boxed{x = 3/2}$$