PROBLEMAS RESUELTOS DE GRÁFICAS DE FUNCIONES (2)

1) Estudiar y dibujar la gráfica de: $y = x^3 + 3x^2$

1) Dominio: R (es polinómica).
2) Par / Impar: $f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 = -x^3 + 3x^2$, que no coincide con $f(x)$ ni tampoco con $-f(x) = -x^3 - 3x^2$. Luego no es par ni impar.
3) Cortes con los ejes: Si $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ Corta en (0, 0).

   Si $y = 0 \Rightarrow 0 = x^3 + 3x^2 \Rightarrow x^2(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases} \Rightarrow$

   $\Rightarrow$ (0, 0) y (–3, 0).
4) Asíntotas: Las funciones polinómicas nunca tienen asíntotas.
5) Monotonía:

   Comenzamos calculando la derivada: $\boxed{f'(x) = 3x^2 + 6x}$

   Separamos R en intervalos mediante los puntos siguientes:

   a) Discontinuidades de f: No tiene (es polinómica).

   b) Discontinuidades de f': Tampoco, por la misma razón.

   c) Puntos que anulan f': $3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(3x + 6) = 0 \Rightarrow$

   $\begin{cases} x = 0 \\ 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$

   Los puntos obtenidos son 0 y –2. Los intervalos resultantes dan lugar al siguiente cuadro; dentro de cada intervalo, el signo de f' no varía, por lo que, para averiguarlo, damos un valor cualquiera a x dentro del intervalo en estudio. Y según el signo de f' tenemos la monotonía de f:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f'	+	0	–	0	+
f	↗	Máx	↘	mín	↗

   Las coordenadas de los extremos relativos encontrados son:

   - Si $x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 = -8 + 12 = 4 \Rightarrow$ Máx en (–2, 4)
   - Si $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow$ mín en (0, 0).
6) Curvatura:

   Comenzamos calculando la derivada segunda: $\boxed{f''(x) = 6x + 6}$

   Separamos R en intervalos mediante los puntos siguientes:

   a) Discontinuidades de f y f': No tienen (son polinómicas).

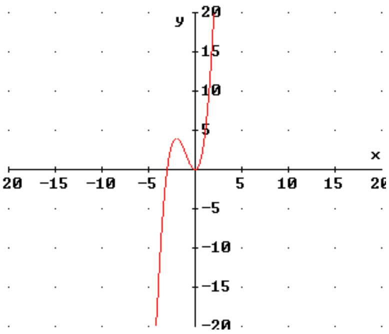
   b) Discontinuidades de f'': Tampoco, por la misma razón.

   c) Puntos que anulan f'': $6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

   Sólo hemos obtenido el valor –1. Creamos el cuadro correspondiente, para estudiar el signo de f'' en cada intervalo resultante, dando a x un valor cualquiera dentro del intervalo en cuestión. El signo de f'' nos dice la curvatura de f:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
f''	–	0	+
f	∩ (cóncava)	P.I.	∪ (convexa)

   El punto de inflexión es (–1, 2), puesto que $f(-1) =$
   $= (-1)^3 + 3(-1)^2 = -1 + 3 = 2$
7) Gráfica: Utilizando todos los resultados anteriores, y completando, si es necesario, con una pequeña tabla de valores, obtenemos la gráfica de la función, que es la adjunta.



2) Estudiar y dibujar la gráfica de: $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

1) Dominio: R – {1} ($x = 1$ anula el denominador, y no se puede dividir entre 0).

2) Par / Impar: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = \dfrac{-x^3}{[-(x+1)]^2} = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, que no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$. Luego no es par ni impar.

3) Cortes con los ejes: Si $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ Corta en (0, 0).
Si $y = 0 \Rightarrow 0 = x^3 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ (0, 0).

4) Asíntotas:

a) AH: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2-2x+1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty \Rightarrow$ No tiene.

b) AV: Probamos en el punto de discontinuidad: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \left(\dfrac{1}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ La recta $\boxed{x = 1}$ es AV.

c) AO: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x(x^2-2x+1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^3-2x^2+x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1.$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2-2x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Luego $y = 1\cdot x + 2$, es decir, $\boxed{y = x + 2}$ es A.O.

5) Monotonía:

Comenzamos calculando la derivada: $f'(x) = \dfrac{3x^2(x-1)^2 - x^3 2(x-1)\cdot 1}{[(x-1)^2]^2} =$

$$= \frac{(x-1)[3x^2(x-1) - 2x^3]}{(x-1)^4} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \boxed{\frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}}$$

Separamos R en intervalos mediante los puntos siguientes:

a) Discontinuidades de f: $x = 1$.

b) Discontinuidades de f': $x = 1$.

c) Puntos que anulan f': $x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$

Los puntos obtenidos son 0, 1 y 3. Mediante ellos, dividimos R en intervalos para estudiar el signo de f' y, de ahí, deducir la monotonía de f:

	$(-\infty, 0)$	0	(0, 1)	1	(1, 3)	3	$(3, +\infty)$
f'	+	0	+	∄	–	0	+
f	↗	?	↗	∄	↘	mín	↗

En $x = 0$ tendremos, probablemente, un punto de inflexión. Las coordenadas del mínimo obtenido son:

- Si $x = 3 \Rightarrow f(3) = \dfrac{3^3}{(3-1)^2} = \dfrac{27}{4} = 6{,}75 \Rightarrow$ mín en (3, 6.75)

6) Curvatura:

Comenzamos calculando la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-(x^3-3x^2)3(x-1)^2\cdot 1}{[(x-1)^3]^2} =$$

$$= \frac{(x-1)^2[(3x^2-6x)(x-1)-3(x^3-3x^2)]}{(x-1)^6} = \frac{3x^3-3x^2-6x^2+6x-3x^3+9x^2}{(x-1)^4} =$$

$$= \boxed{\frac{6x}{(x-1)^4}}$$

Separamos R en intervalos mediante los puntos siguientes:

a) Discontinuidades de f y f': 1.

b) Discontinuidades de f'': 1.

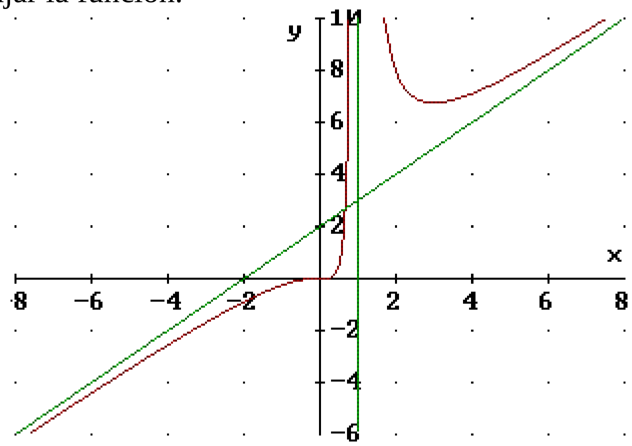
c) Puntos que anulan f'': $6x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Dividimos R en intervalos mediante los puntos obtenidos: 0 y 1. Creamos el cuadro correspondiente, para estudiar el signo de f'', el cual es el mismo dentro de cada uno de los intervalos resultantes.El signo de f'' nos dice la curvatura de f:

	$(-\infty, 0)$	0	(0, 1)	1	$(1, +\infty)$
f''	–	0	+	∄	+
f	∩ (cóncava)	P.I.	∪ (convexa)	∄	∪ (convexa)

El punto de inflexión es (0, 0), puesto que $f(0) = 0$.

7) Gráfica: Utilizando todos los resultados anteriores, y completando, si es necesario, con una pequeña tabla de valores, obtenemos la gráfica de la función, que es la siguiente. En el dibujo se han incluido las asíntotas, en color verde, que sirven de ayuda para dibujar la función.



3) Estudiar y dibujar la gráfica de: $y = \dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$

1) Dominio: R – {2} (2 anula el denominador).

2) Par / Impar: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2-5(-x)+7}{-x-2} = \dfrac{x^2+5x+7}{-x-2}$, que no coincide con $f(x)$ ni tampoco con $-f(x) = -\dfrac{x^2-5x+7}{x-2} = \dfrac{x^2-5x+7}{-x+2}$. Luego no es par ni impar.

3) Cortes con los ejes: Si $x = 0 \Rightarrow y = -7/2 \Rightarrow$ Corta en (0, –7/2).

Si $y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 5x + 7 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-28}}{2} \Rightarrow$ No corta a OX.

$\Rightarrow$ (0, 0) y (–3, 0).

4) Asíntotas:

a) AH: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+7}{x-2} = \infty \Rightarrow$ No tiene.

b) AV: 2 es la única discontinuidad. Y $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+7}{x-2} = \left(\dfrac{1}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ $\boxed{x = 2 \text{ es AV}}$.

c) AO: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^2-5x+7}{x-2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+7}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+7}{x^2-2x} =$

$= \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

$n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+7}{x-2} - 1\cdot x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+7-x(x-2)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+7-x^2+2x}{x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x+7}{x-2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x}{x} = -3$

Por tanto, $y = 1\cdot x - 3$, o sea, $\boxed{y = x - 3}$ es A.O.

5) Monotonía: $f'(x) = \dfrac{(2x-5)(x-2)-(x^2-5x+7)\cdot 1}{(x-2)^2} =$

$= \dfrac{2x^2-4x-5x+10-x^2+5x-7}{(x-2)^2} = \boxed{\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}}$

a) Discontinuidades de f: $x = 2$.
b) Discontinuidades de f': $x = 2$.

c) Puntos que anulan f': $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{array} \right.$

Los puntos obtenidos son 1, 2 y 3. Mediante ellos, dividimos R en intervalos para estudiar el signo de f' y, de ahí, deducir la monotonía de f:

	(–∞, 1)	1	(1, 2)	2	(2, 3)	3	(3, +∞)
f'	+	0	–	∄	–	0	+
f	↗	Máx	↘	∄	↘	mín	↗

- $f(1) = \dfrac{1-5+7}{-1} = -3 \Rightarrow$ Máx en (1, –3).

- $f(3) = \dfrac{9-15+7}{1} = 1 \;\Rightarrow\;$ mín en (3, 1).

6) Curvatura:

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x+3)2(x-2)\cdot 1}{[(x-2)^2]^2} =$$

$$= \frac{(x-2)[(2x-4)(x-2)-2(x^2-4x+3)]}{(x-2)^4} = \frac{2x^2-4x-4x+8-2x^2+8x-6}{(x-2)^3} =$$

$$= \boxed{\frac{2}{(x-2)^3}}$$

Separamos R en intervalos mediante los puntos siguientes:

- Discontinuidades de f y f': 2.
- Discontinuidades de f'': 2.
- Puntos que anulan f'': $2 = 0 \Rightarrow$ Ningún valor de x lo hace posible.

Dividimos R en intervalos mediante el punto obtenido: 2. Creamos el cuadro correspondiente, para estudiar el signo de f'', el cual es el mismo dentro de cada uno de los intervalos resultantes.El signo de f'' nos dice la curvatura de f:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\cap$ (cóncava)	$\nexists$	$\cup$ (convexa)

No tiene puntos de inflexión.

7) Gráfica: Utilizando todos los resultados anteriores, y completando, si es necesario, con una pequeña tabla de valores, obtenemos la gráfica de la función, que es la siguiente.