PROBLEMAS RESUELTOS DE GRÁFICAS DE FUNCIONES (1)

1) Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos, los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de la función $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$. Represéntela gráficamente.

1. Monotonía. Extremos relativos. Como $\boxed{g'(x) = 3x^2 + 6x + 3}$, tenemos:
   - Discontinuidades de g ó g': No tiene (son polinómicas).
   - $g'(x) = 0$: $3x^2 + 6x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$.

   Dividimos R en intervalos mediante el único punto obtenido:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
g'	+	0	+
g	↗	...	↗

   Siempre es creciente y no tiene extremos relativos. En $x = -1$ tendrá pendiente horizontal, puesto que se anula la derivada.

2. Curvatura. Puntos de inflexión.
   $g''(x) = 6x + 6$
   - Discontinuidades de g, g' ó g': No tiene (son polinómicas).
   - $g''(x) = 0$: $6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$.

   Dividimos R en intervalos mediante el único punto obtenido:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
g''	–	0	+
g	∩	P.I.	∪

   Tiene un punto de inflexión en $(-1, -1)$.

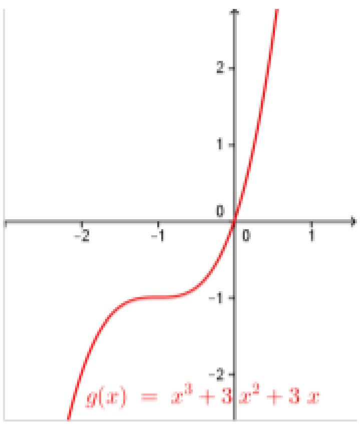
3. Gráfica.
   Como g es polinómica, no tiene discontinuidades ni asíntotas. No es ni par ni impar, puesto que:

   $$g(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 + 3(-x) = -x^3 + 3x^2 - 3x = -(x^3 - 3x^2 + 3x)$$

   Los cortes con los ejes son:

   $$x^3 + 3x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 3x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x^2 + 3x + 3 = 0$$

   puesto que un producto vale 0 si, y sólo si algún factor se anula. Y la ecuación de segundo grado no tiene solución, por lo que sólo corta a los ejes en (0, 0). Por ello, para afinar un poco nos vemos obligados a usar una pequeña tabla de valores, con lo que obtenemos la gráfica adjunta.



2) Sea la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

a) Estudie la monotonía y calcule los extremos relativos de f.
   $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$
   - Discontinuidades de f ó de f': No tiene.
   - $f'(x) = 0$: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ó $x = 3$.

   Dividimos R en intervalos mediante estos puntos:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	–	0	+	0	–
f	↘	**mín**	↗	**Máx**	↘

   Tiene un mínimo relativo en $(1, -4)$ y un máximo relativo en $(3, 0)$.

b) Estudie la curvatura y calcule el punto de inflexión de f.

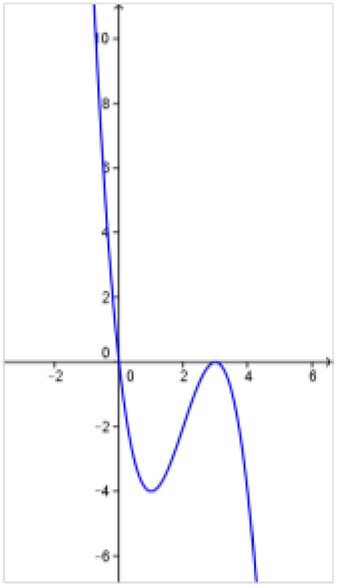
$f''(x) = -6x + 12$

- Discontinuidades de f, f' ó f'': No tiene.
- $f''(x) = 0$: $-6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Dividimos R en intervalos mediante este punto:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f''	+	0	–
f	$\cup$	P.I.	$\cap$

Tiene un $\boxed{\text{punto de inflexión en } (2, -2)}$.



c) Represente gráficamente la función.

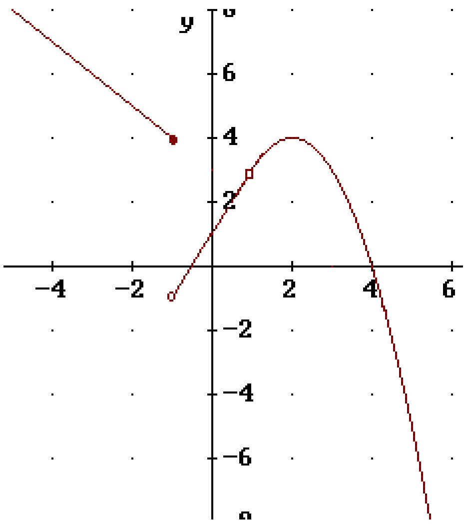
Llevando los datos que conocemos a un gráfico, y considerando que pasa por (0, 0), la gráfica debe ser como la de la figura adjunta.

3) Dibujar la siguiente función. El estudio de la parábola debe incluir el cálculo del eje, del vértice y de las intersecciones con los ejes:

$$f(x) = \begin{cases} -x+3, & si \quad x \le -1 \\ 2x+1, & si \quad -1 < x < 1 \\ 4x - x^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$$ *(2 puntos)*

Como es una función definida a trozos, constituida a partir de tres funciones muy sencillas: dos rectas y una parábola, el trazado es muy fácil dibujando éstas y restringiéndolas a las zonas correspondientes. Haremos esto en lugar del estudio general.

Las rectas $y = -x + 3$ y $y = 2x + 1$ se dibujan fácilmente mediante una pequeña tabla de valores, que puede hacerse de memoria. Al hacerlo, hay que restringirlas sólo a las zonas donde coinciden con f, esto es, a $(-\infty, -1]$ y a $(-1, 1)$ respectivamente. Todo ello lo hemos reflejado directamente en la gráfica. Por tanto, nos centramos en el estudio de la parábola $y = -x^2 + 4x$.



- Se trata de una función *cóncava*, puesto que el coeficiente de x^2 es negativo.
- El eje es: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{-2} = 2$, es decir, la recta de ecuación $x = 2$.
- Como $f(2) = -4 + 8 = 4$, el vértice es (2, 4).
- Intersección con OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0$: (0, 0).
- Intersección con OX: $y = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 + 4x$
  $\Rightarrow 0 = x(-x + 4) \Rightarrow x = 0$ ó $x = 4$.
  Es decir: (0, 0) y (4, 0).

Con estos datos y una pequeña tabla de valores adicional, dibujamos la parábola. Y la gráfica resultante la restringimos a la zona donde coincide con f, o sea, a $(1, +\infty)$.

Y así hemos dibujado la gráfica.

4) Estudiar y dibujar la gráfica de $y=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y'=\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$; $y''=-\dfrac{2}{(x+1)^3}$

Comencemos derivando:

$$y' = \frac{(2x+2)(x+1)-(x^2+2x)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+2x+2-x^2-2x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x+2)2(x+1)1}{[(x+1)^2]^2} =$$

$$= \frac{(x+1)[(2x+2)(x+1)-(x^2+2x+2)2]}{(x+1)^4} = \frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x-4}{(x+1)^3} =$$

$$= -\frac{2}{(x+1)^3}$$

a) Dominio: R – { –1 } (se anula el denominador)

b) Par / Impar: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+2(-x)}{-x+1} = \dfrac{x^2-2x}{-x+1} \Rightarrow$ Ni par ni impar.

c) Intersecciones con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 0$: (0, 0).

$y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{x^2+2x}{x+1} \Rightarrow 0 = x^2 + 2x \Rightarrow 0 = x(x + 2) \Rightarrow x = 0$ ó $x = -2$.

Por tanto, corta en (0, 0) y en (–2, 0).

d) Asíntotas:

1) AH: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{x+1}=\infty \Rightarrow$ No tiene.

2) AV: Tenemos discontinuidad en $x = -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x}{x+1}=\left(\dfrac{-1}{0}\right)=\infty$. Por tanto, la recta $x = -1$ es A.V.

3) A.O.:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2x}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\big(f(x)-mx\big) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x+1}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1} = 1$$

Luego la recta $y = x + 1$ es A.O.

e) Monotonía:

- Discontinuidades de f: $x = -1$.
- Discontinuidades de f': $x = -1$.
- $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}$ que no tiene solución.

Como –1 es el único punto obtenido, tenemos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$f\,'$	+	∄	+
f	↗	∄	↗

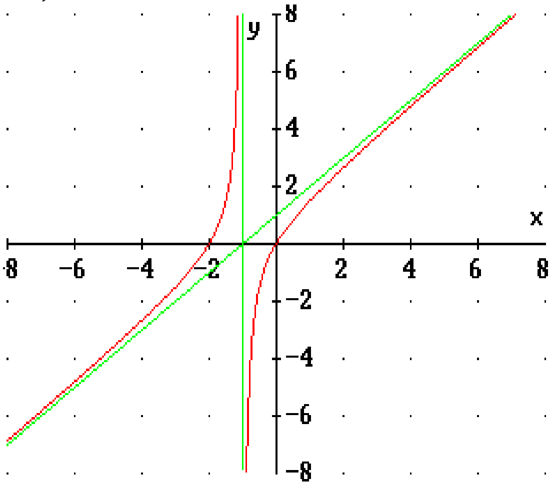
No tiene extremos relativos.

f) Curvatura:
- Discontinuidades de f y $f\,'$: $x = -1$.
- Discontinuidades de $f\,''$: $x = -1$.
- $f\,''(x) = 0 \;\Rightarrow\; -\dfrac{2}{(x+1)^3} = 0 \;\Rightarrow\; -2 = 0 \;\Rightarrow\;$ No es posible.

Como -1 es el único punto obtenido, tenemos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$f\,''$	+	∄	–
f	∪ (convexa)	∄	∩ (cóncava)

g) Gráfica: Las asíntotas se han dibujado de color verde. Combinando todos los resultados anteriores, se obtiene:



5) Estudiar y dibujar la gráfica de $y = \dfrac{x}{(x+5)^2}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y' = \dfrac{-x+5}{(x+5)^3}$; $y'' = \dfrac{2(x-10)}{(x+5)^4}$

Comencemos derivando:

$$y' = \frac{1(x+5)^2 - x2(x+5)}{(x+5)^4} = \frac{(x+5)[(x+5)-2x]}{(x+5)^4} = \boxed{\frac{-x+5}{(x+5)^3}}$$

$$y'' = \frac{-1(x+5)^3 - (-x+5)3(x+5)^2}{[(x+5)^3]^2} = \frac{(x+5)^2[-(x+5)-(-3x+15)]}{(x+5)^6} =$$

$$\frac{-x-5+3x-15}{(x+5)^4} = = \frac{2x-20}{(x+5)^4} = \boxed{\frac{2(x-10)}{(x+5)^4}}$$

a) Dominio. $\boxed{D(f) = \mathrm{R} - \{-5\}}$

b) Par / Impar. $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x+5)^2} = -\dfrac{x}{(-x+5)^2}$, que no coincide ni con $-f(x)$ ni con $f(x)$, por lo que no es par ni impar.

c) Intersecciones con los ejes. $x = 0 \Rightarrow y = 0$. Análogamente, $y = 0 \Rightarrow x = 0$. Por tanto, corta únicamente en (0, 0) a los ejes.

d) Asíntotas.

i) AH. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{(x+5)^2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+10x+25} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = \left(\dfrac{1}{\infty}\right)$ $= 0$. Por tanto, $\boxed{y = 0}$ es AH.

ii) AV. Probamos en la discontinuidad: $\lim\limits_{x\to-5} \dfrac{x}{(x+5)^2} = \left(\dfrac{-5}{0}\right) = \infty$. De ello, deducimos que $\boxed{x = -5}$ es AV.

iii) AO. Si intentamos calcularla, saldrá, de nuevo, la horizontal ya obtenida.

e) Monotonía.

- Discontinuidades de f: -5 (anula el denominador).
- Discontinuidades de f': -5
- $f'(x) = 0$: $\dfrac{-x+5}{(x+5)^3} = 0 \Rightarrow -x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

Dividimos R en intervalos mediante los dos puntos obtenidos:

	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, 5)$	5	$(5, +\infty)$
f'	–	∄	+	0	–
f	↘	∄	↗	Máx	↘

Tiene un máximo en (5, 0.05).

f) Curvatura.

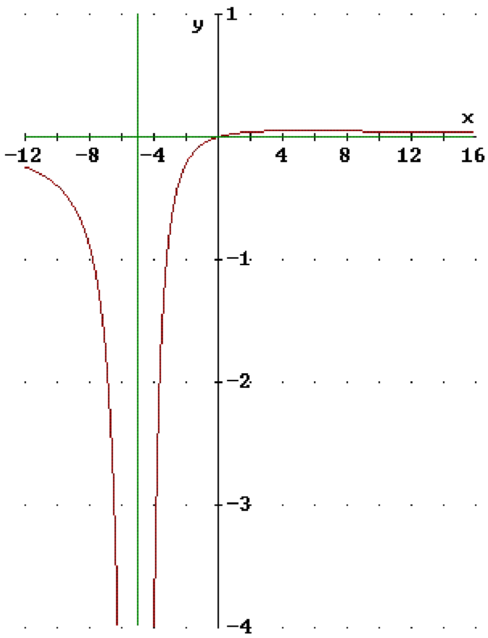
- Discontinuidades de f, f': -5 (anula el denominador).
- Discontinuidades de f'': -5
- $f''(x) = 0$: $\dfrac{2(x-10)}{(x+5)^4} = 0 \Rightarrow 2(x-10) = 0 \Rightarrow x = 10$

Dividimos R en intervalos mediante los dos puntos obtenidos:

	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, 10)$	10	$(10, +\infty)$
f''	–	∄	–	0	+
f	∩ (cóncava)	∄	∩ (cóncava)	P.I.	∪ (convexa)

Punto de inflexión en (10, 0.044)

g) Gráfica. Las asíntotas están en verde. Se ha exagerado la amplitud de cada unidad del eje de ordenadas para poder ver un poco la forma, ya que el máximo relativo y el punto de inflexión se hallan muy próximos al eje de ordenadas.



6) Estudiar y dibujar la gráfica de $y = \dfrac{4-x^2}{x-3}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y' = \dfrac{-x^2+6x-4}{(x-3)^2}$; $y'' = \dfrac{-10}{(x-3)^3}$

Comenzamos derivando:

$$y' = \frac{-2x(x-3)-(4-x^2)}{(x-3)^2} = \frac{-2x^2+6x-4+x^2}{(x-3)^2} = \boxed{\frac{-x^2+6x-4}{(x-3)^2}}$$

$$y'' = \frac{(-2x+6)(x-3)^2-(-x^2+6x-4)2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{(x-3)[(-2x+6)(x-3)-(-x^2+6x-4)2]}{(x-3)^4} = \frac{-2x^2+6x+6x-18+2x^2-12x+8}{(x-3)^3} =$$

$$= \boxed{\frac{-10}{(x-3)^3}}$$

a) Dominio: $\boxed{\mathbb{R}-\{3\}}$, ya que ese valor anula el denominador.

b) Intersecciones con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = -4/3$: $\boxed{(0, -4/3)}$
$y = 0 \Rightarrow 4-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2$ ó $x = 2$: $\boxed{(-2, 0);\ (2, 0)}$

c) Par / Impar: $f(-x) = \dfrac{4-(-x)^2}{-x-3} = \dfrac{4+x^2}{-(x+3)}$ que no coincide ni con $f(x)$ ni con $-f(x)$. Por ello, no es par ni impar.

d) Asíntotas:

AH: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-x^2}{x-3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(-x) = \infty \Rightarrow$ No tiene AH.

AV: Tomamos límite en el punto de discontinuidad: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4-x^2}{x-3} = \left(\dfrac{-5}{0}\right) = \infty$

$\Rightarrow$ La recta $\boxed{x = 3}$ es AV.

AO: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{4-x^2}{x-3}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-x^2}{x^2-3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4-x^2}{x-3}-(-x)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4-x^2+x(x-3)}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4-x^2+x^2-3x}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{4-3x}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x}{x} = -3$$

Por tanto, la recta $\boxed{y = -x-3}$ es A.O.

e) Monotonía / Extremos relativos:

- Discontinuidades de f: 3
- Discontinuidades de f': 3
- $f'(x) = 0$: $-x^2+6x-4 = 0 \Rightarrow x^2-6x+4 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ x=\frac{6\pm\sqrt{36-16}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt{5}}{2}=3\pm\sqrt{5}$$

Dividimos R en intervalos mediante los dos puntos obtenidos:

	$(-\infty,\ 3-\sqrt{5})$	$3-\sqrt{5}$	$(3-\sqrt{5},\ 3)$	3	$(3,\ 3+\sqrt{5})$	$3+\sqrt{5}$	$(3+\sqrt{5},+\infty)$
f'	–	0	+	∄	+	0	–
f	↘	Mín	↗	∄	↗	Máx	↘

Tiene un mínimo en $(3-\sqrt{5},-1.53)$ y un máximo en $(3+\sqrt{5},-10.47)$.

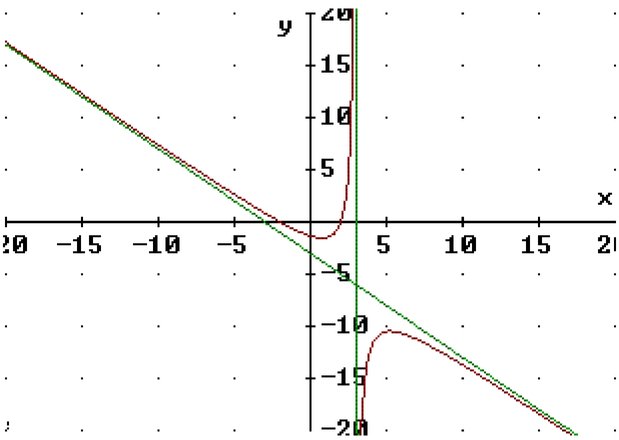
f) Curvatura / Puntos de inflexión:

- Discontinuidades de $f,\ f'$: 3
- Discontinuidades de f'': 3
- $f''(x)=0$: No hay ningún valor

Dividimos R en intervalos mediante los dos puntos obtenidos:

	$(-\infty,3)$	3	$(3,+\infty)$
f''	+	∄	–
f	∪ (convexa)	∄	∩ (cóncava)

g) Gráfica:



7) Estudiar y dibujar la gráfica de $y=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$, comprobando previamente que sus derivadas son $y'=\dfrac{-14x}{(x^2-4)^2}$ $\quad y''=\dfrac{14(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$.

Comenzamos derivando:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2}=\frac{2x[(x^2-4)-(x^2+3)]}{(x^2-4)^2}=\frac{2x(x^2-4-x^2-3)}{(x^2-4)^2}=$$

$$=\frac{2x(-7)}{(x^2-4)^2}=\frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-14(x^2-4)^2+14x2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4}=\frac{(x^2-4)[-14(x^2-4)+14x4x]}{(x^2-4)^4}=$$

$$=\frac{14(-x^2+4+4x^2)}{(x^2-4)^3}=\frac{14(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

a) Dominio. $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}}$, ya que los valores de x que anulan el denominador son –2 y 2,

b) Par / Impar. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+3}{(-x)^2-4} = \dfrac{x^2+3}{x^2-4} \Rightarrow$ es $\boxed{\text{PAR}}$.

c) Intersecciones con los ejes.

- $x = 0 \Rightarrow y = -3/4$. $\boxed{\text{Corta en } (0, -3/4)}$.
- $y = 0 \Rightarrow x^2 + 3 = 0$ (siempre que las soluciones no anulen, también, el denominador) $\Rightarrow x = \pm\sqrt{-3} \Rightarrow$ $\boxed{\text{No corta al eje OY}}$.

d) Asíntotas.

- Asíntota horizontal: Como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3}{x^2-4} = 1$, puesto que la máxima potencia de x tanto del numerador como del denominador es 2, y los coeficientes de los términos correspondientes valen, ambos, 1, siendo su cociente, también, 1. Por tanto, la recta horizontal de ecuación $\boxed{y = 1}$ es A.H.
- Asíntota vertical: Hay dos discontinuidades para estudiar:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \left(\frac{7}{0}\right) = \infty \Rightarrow \text{La recta vertical de ecuación } \boxed{x = -2} \text{ es A.V.}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \left(\frac{7}{0}\right) = \infty \Rightarrow \text{La recta vertical de ecuación } \boxed{x = 2} \text{ es A.V.}$$

- Asíntota oblicua: Como tiene A.H. tanto por el lado del $+\infty$ como por el del $-\infty$, si intentamos calcular la A.O. obtendríamos otra vez la A.H.

e) Monotonía / Extremos relativos

- Discontinuidades de f: –2 y 2 (no están en el dominio)
- Discontinuidades de f': –2 y 2 (anulan el denominador, por lo que no tienen imagen)
- Puntos que anulan f': $-14x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos y averiguamos el signo de f' en cada uno de ellos, para lo que basta elegir un punto arbitrario del intervalo en cuestión y sustituirlo en f', anotando su signo, porque en todos los puntos del intervalo el signo de f' es el mismo (garantizado por el Teorema de Bolzano). Como el denominador de f' es el cuadrado de una expresión, siempre va a ser positivo, con lo que basta comprobar el signo del numerador:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	+	∄	+	0	–	∄	–
f	↗	∄	↗	Máx	↘	∄	↘

Como $f(0) = -3/4$, las coordenadas del $\boxed{\text{máximo relativo son } (0, -3/4)}$

f) Curvatura / Puntos de inflexión

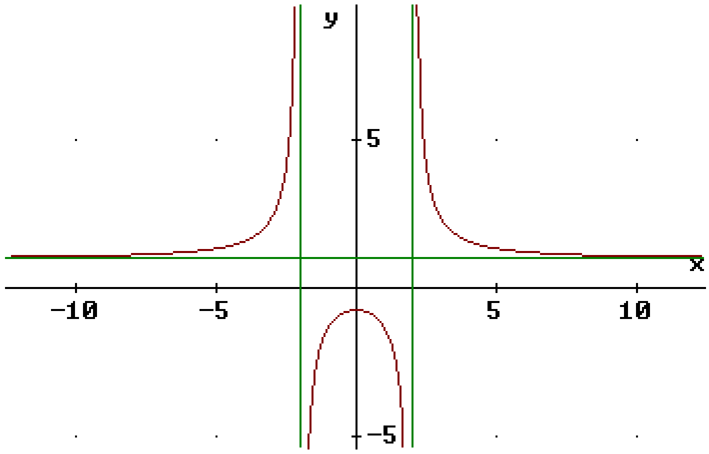
- Discontinuidades de f, f', f'': –2 y 2 (no están en el dominio)
- Puntos que anulan f'': $14(3x^2 + 4) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4/3}$ $\Rightarrow$ No hay.

Dividimos el dominio en intervalos:

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f''	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\cup$	$\nexists$	$\cap$	$\nexists$	$\cup$

Por tanto, $\boxed{\text{no tiene puntos de inflexión}}$.

g) Gráfica
Hemos dibujado en color verde las dos asíntotas verticales y la asíntota horizontal. La gráfica queda como sigue, aprovechando los conocimientos que de la función tenemos merced al estudio que de ella hemos realizado:



8) Estudiar y dibujar la gráfica de $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$, comprobando previamente que sus derivadas son $y'=\dfrac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$ $\quad y''=\dfrac{4x^3+12x}{(x^2-1)^3}$.

Comenzamos derivando:

$$f'(x)=\frac{2(x^2-1)-2x2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-4x(x^2-1)^2-(-2x^2-2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=\frac{(x^2-1)[-4x(x^2-1)-(-2x^2-2)4x]}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{-4x^3+4x-(-8x^3-8x)}{(x^2-1)^3}=\frac{-4x^3+4x+8x^3+8x}{(x^2-1)^3}=\frac{4x^3+12x}{(x^2-1)^3}$$

a) Dominio. $\boxed{\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}}$, ya que los valores de x que anulan el denominador son –1 y 1,

b) Par / Impar. $f(-x)=\dfrac{2(-x)}{(-x)^2-1}=-\dfrac{2x}{x^2-1}=-f(x)\ \Rightarrow$ es $\boxed{\text{IMPAR}}$.

c) Intersecciones con los ejes.
- $x=0 \ \Rightarrow\ y=0$. $\boxed{\text{Corta en } (0, 0)}$.
- $y=0 \ \Rightarrow\ 2x=0$ (siempre que las soluciones no anulen, también, el denominador) $\Rightarrow x=0$ (que no anula el denominador) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Corta en } (0, 0)}$.

d) Asíntotas.
- Asíntota horizontal: Como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=\left(\dfrac{2}{\infty}\right)=0 \ \Rightarrow$ la recta horizontal de ecuación $\boxed{y=0}$ es A.H.
- Asíntota vertical: Hay dos discontinuidades para estudiar:

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x}{x^2-1} = \left(\frac{-2}{0}\right) = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{La recta vertical de ecuación } \boxed{x = -1} \text{ es A.V.}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x}{x^2-1} = \left(\frac{2}{0}\right) = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{La recta vertical de ecuación } \boxed{x = 1} \text{ es A.V.}$$

- Asíntota oblicua: Como tiene A.H. tanto por el lado del $+\infty$ como por el del $-\infty$, si intentamos calcular la A.O. obtendríamos otra vez la A.H.

e) Monotonía / Extremos relativos

- Discontinuidades de f: -1 y 1 (no están en el dominio)
- Discontinuidades de f': -1 y 1 (anulan el denominador, por lo que no tienen imagen)
- Puntos que anulan f': $-2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow -2 = 2x^2 \Rightarrow \pm\sqrt{-1} = x \Rightarrow$ No hay.

Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	$-$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$-$
f	↘	$\nexists$	↘	$\nexists$	↘

No tiene extremos relativos.

Si nos hubiésemos fijado en la primera derivada, veríamos que el signo del denominador es siempre negativo (o cero, fuera del dominio). En el numerador, tenemos el producto de un número siempre positivo o cero x^2 por un número negativo: -2, lo que siempre resulta negativo o cero; y al restarle 2 nos saldrá siempre negativo. Por tanto el cociente es, menos entre más, igual a menos, siempre. O sea, que si la derivada es negativa donde existe, la función siempre es decreciente, donde existe. Con esto, no tendríamos porqué haber estudiado el cuadro de monotonía anterior.

f) Curvatura / Puntos de inflexión

- Discontinuidades de f, f', f'': -1 y 1 (no están en el dominio)
- Puntos que anulan f'': $4x^3 + 12x = 0 \Rightarrow x^3 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x^2 + 3 = 0$ (que no es posible) ó $x = 0$.

Dividimos el dominio en intervalos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\cap$	$\nexists$	$\cup$	P.I.	$\cap$	$\nexists$	$\cup$

Por tanto, $\boxed{(0, 0) \text{ es un punto de inflexión}}$.

g) Gráfica

Combinando los resultados anteriores, se obtiene: