PROBLEMAS RESUELTOS DE RECTAS TANGENTES

1) (Parte de un problema de Selectividad de Ciencias y Tecnología 2007) Sea f: R → R la función definida por $f(x) = x^2$. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
   - Punto de tangencia: Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^2 = 1 \Rightarrow$ Es (1, 1).
   - Pendiente de la tangente: Como $f'(x) = 2x \Rightarrow m = f'(1) = 2$.

   Por tanto, la ecuación de la recta tangente es (usando la ecuación de la recta en forma punto-pendiente): $y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$.

2) (Selectividad CCSS 2011) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -2e^{3x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.
   - Punto de tangencia: $x = 0 \Rightarrow f(0) = -2e^0 = -2\cdot 1 = -2$: (0, –2).
   - Pendiente: $f'(x) = -2\cdot 3e^{3x} = -6e^{3x} \Rightarrow m = f'(0) = -6e^0 = -6\cdot 1 = -6$
   - Ecuación: $y + 2 = -6(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -6x - 2}$

3) (Selectividad CCSS) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -2e^{3x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.
   - Punto de tangencia: $x = 0 \Rightarrow f(0) = -2e^0 = -2\cdot 1 = -2$: (0, –2).
   - Pendiente: $f'(x) = -2\cdot 3e^{3x} = -6e^{3x} \Rightarrow m = f'(0) = -6e^0 = -6\cdot 1 = -6$
   - Ecuación: $y + 2 = -6(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -6x - 2}$

4) (Parte de un problema de Selectividad de Ciencias y Tecnología 2007) Sea $f: (-1, +\infty) \to$ R la función definida por $f(x) = \text{Ln}(x + 1)$ (Ln denota la función logaritmo neperiano). Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

   Hallamos el punto de tangencia. Si $x = 0 \Rightarrow f(0) = \text{Ln } 1 = 0 \Rightarrow$ Es (0, 0).

   Hallemos la pendiente de la tangente. $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 1$.

   Luego la tangente es: $y-0 = 1(x-1) \Rightarrow y = x$.

5) (Parte de un problema de Selectividad de Ciencias y Tecnología 2008) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = e^{-2x}$. Justifica que la recta de ecuación $y = -2ex$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -\dfrac{1}{2}$.

   Como $f(-1/2) = e \Rightarrow$ El punto de tangencia es $(-1/2, e)$.
   Como $f'(x) = -2e^{-2x} \Rightarrow$ La pendiente de la tangente es: $m = f'(-1/2) = -2e$.
   Por tanto, la ecuación de la tangente es:

$$y - e = -2e\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -2ex - e + e \Rightarrow \boxed{y = -2ex}$$

6) (Parte de un problema de Selectividad de Ciencias y Tecnología 2009) Considera la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = -1$.

   Como $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$, el punto de tangencia es $(-1, 2)$.
   Y como $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow$ la pendiente de la tangente es $m = f'(-1) = 0$ (es horizontal).
   Luego la ecuación es: $y - 2 = 0\cdot(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = 2}$.

7) (Selectividad de Ciencias Sociales 2005) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* definida de la forma $f(x) = 1 + \mathrm{L}(2x-1)$ en el punto de abscisa $x = 1$. (L denota *logaritmo neperiano)*

Del punto de tangencia, donde la recta y la curva se tocan, conocemos $x=1$. La segunda coordenada de dicho punto, al ser un punto de *f*, será, por tanto: $f(1) = 1+\mathrm{L}(2-1) = 1 + \mathrm{L}1 = 1+0 = 1 \Rightarrow$ El punto es (1, 1)

Para la pendiente de la tangente, necesitamos la función derivada: $f'(x) = 0 + \frac{2}{2x-1} = \frac{2}{2x-1} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$ será la pendiente, puesto que $x = 1$ es la primera coordenada del punto de tangencia.

Aplicando la ecuación punto-pendiente de la recta, la tangente será: $y - 1 = 2(x - 1)$ $\Rightarrow y = 2x - 2 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$

8) (Selectividad de Ciencias Sociales, anterior a 2002) Dada la función $f(x) = \frac{3x+7}{x+2}$,

a) Calcule los puntos de la gráfica de dicha función donde la tangente tiene pendiente –1.

Según la interpretación geométrica de la derivada, la pendiente de la recta tangente a una función en el punto $(x, f(x))$ vale $f'(x)$. Por el enunciado del problema, dicha pendiente debe valer –1. Veamos el valor de x para que eso ocurra:

$$f'(x) = \frac{3(x+2)-(3x+7)}{(x+2)^2} = \frac{3x+6-3x-7}{(x+2)^2} = -\frac{1}{(x+2)^2} = -1 \Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2} = 1$$

$$\Rightarrow 1 = (x+2)^2 \Rightarrow 1 = x^2+4x+4 \Rightarrow 0 = x^2+4x+3 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$$

$$\frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow$$ Los puntos donde ocurre son, entonces: (–1, 4) y (–3, 2).

No nos piden las ecuaciones de las rectas tangentes, pero usando la ecuación punto pendiente: $y-y_0=m(x-x_0)$, serían, respectivamente:

$y-4 = -1(x+1) \Rightarrow y = -x-1+4 \Rightarrow \boxed{y = -x+3}$

$y-2 = -1(x+3) \Rightarrow y = -x-3+2 \Rightarrow \boxed{y = -x-1}$

b) Explique, razonadamente, si puede existir algún punto de tangente horizontal en esta función.

Debería ser 0 la pendiente, para que la recta tangente fuese horizontal. Entonces:

$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow -1 = 0$, que no es posible.

9) a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 1$ en cada uno de los puntos en los que su pendiente sea igual a 3

Para calcular la ecuación de la recta tangente a una curva, necesitamos un punto de dicha recta y su pendiente.

El punto será donde la recta toque a la curva; es decir, es un punto que está sobre la curva. De este punto sólo conoceremos, por lo general, la coordenada x; la segunda coordenada se hallará sustituyendo dicho valor de x en la fórmula de la función.

La pendiente es, según la interpretación geométrica de la derivada, el valor de la derivada en el valor del x del punto de tangencia.

Una vez que tenemos el punto de tangencia (a, f(a)) y la pendiente $m=f'(a)$, la recta tangente será, según la ecuación punto-pendiente: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

En este problema no nos dan el punto de tangencia, sino la pendiente: 3. La coordenada x de dicho punto será tal que $f'(x)=3$, por la interpretación geométrica de la derivada. Es decir:

$$f'(x)=3 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=-1 \text{ ó } x=1$$

Hay dos puntos donde eso ocurre, por lo que el problema tiene dos soluciones.

1ª: $x=1 \Rightarrow f(x)=f(1)=1-1=0 \Rightarrow$ El punto de tangencia es (1, 0). Como la pendiente es 3, la recta es: $y-0=3(x-1) \Rightarrow \boxed{y=3x-3}$

2ª: $x=-1 \Rightarrow f(x)=f(-1)=-1-1=-2 \Rightarrow$ El punto de tangencia es (–1, –2). Como la pendiente es 3, la recta es: $y+2=3(x+1) \Rightarrow y=3x+3-2 \Rightarrow \boxed{y=3x+1}$

b) Dada la función $f(x) = x^3+ax^2+b$, calcule a y b para que f(x) tenga un punto de inflexión en (–1, 2)

Primeramente, debe pasar por (–1, 2), para que pueda éste ser un punto de inflexión. Luego $f(-1)=2 \Rightarrow (-1)^3+a(-1)^2+b=2 \Rightarrow a+b=3$

Por otra parte, la x del punto de inflexión verifica que $f''(x)=0$. O sea: $f''(-1)=0 \Rightarrow$

Como $f'(x)=3x^2+2ax$ y $f''(x)=6x+2a$, será: $6(-1)+2a=0 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow \boxed{a=3}$

Sustituyendo en $a+b=3 \Rightarrow 3+b=3 \Rightarrow \boxed{b=0}$.

10) (Selectividad CCSS 2005) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si } x<1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

De los dos intervalos donde nos definen f de forma distinta, $x = 2$ pertenece a $[1, +\infty)$, donde $f(x) = \dfrac{2}{x}$. Nos limitamos a esta fórmula de f, pues.

Cuando $x = 2 \Rightarrow f(2) = \dfrac{2}{2} = 1 \Rightarrow$ El punto de tangencia es (2, 1).

La pendiente de la recta tangente será $f'(2)$, según la interpretación geométrica de la derivada. Como $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} \Rightarrow f'(2) = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

Luego la recta tangente será, usando la ecuación de la recta en forma punto-pendiente:

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x+1+1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x+2$$

11) (Selectividad CCSS 2009) Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x\leq 0 \\ x^3-x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

- Punto de tangencia: Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 1 + 1 = 1$. <u>Es (1, 1)</u>.
- Pendiente: $\underline{m = f'(1) = 3\cdot 1^2 - 1 = 2}$

- Ecuación: Según la interpretación geométrica de la derivada, usando la ecuación de la recta en forma punto-pendiente, será:

$$y - 1 = 2(x - 1) \;\Rightarrow\; y = 2x - 2 + 1 \;\Rightarrow\; \boxed{y = 2x - 1}$$

12) (Selectividad CCSS 2011) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si} \quad 2 \le x < 4 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$

Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 3$.

- Coordenadas del punto de tangencia: (3, 4/3).
- Pendiente en el punto de tangencia: $m = f'(3) = -4/9$.
- Ecuación de la tangente: $y - y_0 = m(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - \frac{4}{3} = -\frac{4}{9}(x - 3) \;\Rightarrow$

$$9\left(y - \frac{4}{3}\right) = -4(x-3) \;\Rightarrow\; 9y - 12 = -4x + 12 \;\Rightarrow\; 9y = -4x + 24 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{y = \frac{-4x + 24}{9}}$$