LÍMITES DE FUNCIONES

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+5x^2+1}{2x^3+4x+2}$ *Sol:* 2

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+1}{x+2}$ *Sol:* ∞

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{3x^3+2x^2-5}$ *Sol:* 0

4) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}\right)$ *Sol:* 0

5) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ *Sol:* 0

6) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$ *Sol:* $-\frac{1}{2}$

7) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$ *Sol:* – 1

8) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+3x}\right)$ *Sol:* – 2

9) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ *Sol:* 1

10) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ *Sol:* – 4

11) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^3-1}$ *Sol:* 0

12) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$ *Sol:* $\frac{2}{3}$

13) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2+x+6}{x^2+3x+2}$ *Sol:* ∞

14) $\lim_{x\to -2} \frac{2x^3+3x^2+x+6}{x^2+3x+2}$ *Sol:* – 13

15) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ *Sol:* 0

16) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ *Sol:* $\frac{\sqrt{3}}{6}$

17) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$ *Sol:* 0

18) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$ *Sol:* $\frac{\sqrt{3}}{36}$

19) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-2x-8}$ *Sol:* 0

20) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-2x-8}$ *Sol:* $\frac{1}{24}$

21) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ *Sol:* 0

22) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ *Sol:* $\frac{1}{2}$

23) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2-x^2}{\sqrt{2x}-2}$ *Sol:* $-\infty$

24) $\lim_{x\to 2} \frac{2-x^2}{\sqrt{2x}-2}$ *Sol:* ∞

25) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}-3}$ *Sol:* $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

26) $\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}-3}$ *Sol:* $-\frac{3}{4}$

27) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5x+4}-3}{2-\sqrt{4x}}$ *Sol:* $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

28) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5x+4}-3}{2-\sqrt{4x}}$ *Sol:* $-\frac{5}{6}$

29) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{3x}\right)^{x^2-1}$ *Sol:* 0

30) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{3x}\right)^{1-x^2}$ *Sol:* $+\infty$

31) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{2x}\right)^{x^2-1}$ *Sol:* ∞

32) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{2x}\right)^{1-x^2}$ *Sol:* 0

33) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{3x}\right)^{\frac{4}{x^2-1}}$ *Sol:* 1

34) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2x+1}{3x}\right)^{\frac{4}{x^2-1}}$ *Sol:* $e^{-\frac{2}{3}}$

35) $\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{3}{x}\right)^{x-1}$ *Sol:* e^{-3}

EJEMPLOS RESUELTOS

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{3x^3+2x^2-5}$

Cuando tenemos un cociente de polinomios (aunque alguno esté dentro de una raíz), con $x\to\infty$ y con indeterminación del tipo $\infty\ /\ \infty$, podemos sustituir cada polinomio por su término (sumando) de mayor grado:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{3x^3+2x^2-5} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{3x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^2} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$

8) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+3x}\right)$

Si tenemos una resta en la que interviene alguna raíz, con $x\to\infty$ y con indeterminación del tipo $\infty-\infty$, no podemos sustituir por el término de mayor grado, como antes. Aquí hay que empezar multiplicando y dividiendo por el conjugado de la resta:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+3x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+3x}\right)\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+3x}\right)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+3x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-x)-(x^2+3x)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+3x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x-3x}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+3x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+3x}} =$$

Ya estamos en las condiciones del tipo de límites anterior, por lo que sustituimos cada polinomio por su término de mayor grado:

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{2\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{2x} = \lim_{x\to\infty}-2 = -2$$

Otra opción consiste en dividir numerador y denominador de la expresión resultante entre x elevada a la máxima potencia con que aparezca entre numerador y denominador (pero cuando el polinomio está dentro de una raíz, dicha potencia hay que dividirla entre 2, porque una raíz cuadrada equivale a una potencia de exponente ½). En nuestro ejemplo, la máxima potencia de x en el numerador es 1 y en el denominador, también 1 (el 2 del x^2 lo dividimos entre 2 porque está dentro de una raíz cuadrada). Dividimos numerador y denominador entre x^1:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+3x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-4x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+3x}}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}+\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+3x}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}} =$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}} = -\frac{4}{1+1} = -2$$

14) $\lim_{x\to-2}\frac{2x^3+3x^2+x+6}{x^2+3x+2}$

El problema 13, que tiene la misma expresión pero con $x\to\infty$, es igual al problema resuelto número 3. Pero en éste, $x\to-2$ y, al sustituir, obtenemos la indeterminación $0/0$. En estos problemas hay que descomponer factorialmente los polinomios. Es fácil hacerlo por Ruffini, puesto que ya conocemos un valor que los anula: aquél al que tiende x (en este caso, – 2).

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & 1 & 6 \\ -2 & & -4 & 2 & -6 \\ \hline & 2 & -1 & 3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 3 & 2 \\ -2 & & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x^3+3x^2+x+6}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(2x^2-x+3)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to-2}\frac{2x^2-x+3}{x+1} = \frac{13}{-1} = -13$$

26) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}-3}$

El problema 25 tiene la misma expresión que éste, pero con $x\to\infty$, produciendo la indeterminación ∞/∞. Se resuelve de forma similar a la que hicimos en el problema 8 con:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+3x}}$$

Pero en este problema, $x\to 4$ (un número), originando la indeterminación $0/0$. La resolución de un problema con esta indeterminación, en el que hay alguna raíz cuadrada dentro de una resta, pasa por multiplicar numerador y denominador por el conjugado de la expresión que contenga raíces y produzca un cero. Hay dos expresiones de este tipo, una en el numerador y otra en el denominador. Multiplicamos numerador y denominador, pues, por el conjugado de ambas y aplicamos que suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados:

$$\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}-3} = \lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}-3}\,\frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\,\frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3} = \lim_{x\to 4} \frac{4-x}{(2x+1)-9}\,\frac{\sqrt{2x+1}+3}{2+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(-x+4)(\sqrt{2x+1}+3)}{(2x-8)(2+\sqrt{x})} =$$

Ahora, multiplicando por expresiones que contienen raíces, expresiones a las que no vamos a tocar, aparecen polinomios, tanto en numerador como en denominador, responsables de la indeterminación $0/0$. Procedemos con ellos de la misma forma que en los problemas del tipo del 14, que hicimos antes; es decir, descomponiéndolos por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cc} & -1 & 4 \\ 4 & & -4 \\ \hline & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} & 2 & -8 \\ 4 & & 8 \\ \hline & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{-1(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}{2(x-4)(2+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 4} \frac{-1(\sqrt{2x+1}+3)}{2(2+\sqrt{x})} = \frac{-(3+3)}{2(2+2)} = -\frac{3}{4}$$

33) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x-1}$

Los problemas 29 al 33 no originan indeterminaciones, por lo que son inmediatos (consultar el resumen de resultados de límites en los que intervienen 0 ó ∞). En cambio, el 34 y 35 dan indeterminaciones del tipo 1^∞, que son límites del tipo número e. Cuando un límite produce esta indeterminación, se sustituye de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to(\text{lo que sea})} f(x)^{g(x)} = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to(\text{lo que sea})} e^{g(x)(f(x)-1)}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{3}{x}\right)^{x-1} = \lim_{x\to\infty} e^{(x-1)\left(1-\frac{3}{x}-1\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{(x-1)\left(-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-3x+3}{x}} =$$

El exponente es un cociente de polinomios que da lugar a una indeterminación del tipo ∞/∞ con $x\to\infty$, que sabemos (problema 3) que se puede resolver sustituyendo cada polinomio por su término de mayor grado:

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-3x}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{-3} = e^{--3}$$