Segundo trimestre – 1º Bach CCSS **10 de febrero de 2014**
Primer examen 2ª evaluación

NOMBRE: ____

1) Resolver: $3\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}=3$

2) Resolver el sistema siguiente: $\begin{cases} 2(x-3)<\dfrac{5+8x}{3} \\ x^2-6x+5\geq 0 \end{cases}$

3) Hallar el dominio de $y=\sqrt{\dfrac{-2x^2+12x-10}{x^2-2x}}$

4) Decir si es par, impar o ninguna de las dos cosas la siguiente función, y encontrar sus intersecciones con los ejes de coordenadas: $y=\dfrac{3x-1}{x^2-4}$

5) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{5-x}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{5-x}$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{5-x}$

SOLUCIONES

1) Resolver: $3\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}=3$

Resolver una inecuación irracional suele poder hacerse separando el sumando completo que contiene una raíz en un miembro de la ecuación y elevando ésta al cuadrado, lo que nos obligará a comprobar la validez de las soluciones obtenidas. Así:

$$3\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}=3 \;\Rightarrow\; 3\sqrt{x-1}=3+\sqrt{2x-1} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (3\sqrt{x-1})^2=(3+\sqrt{2x-1})^2 \;\Rightarrow\; 3^2(\sqrt{x-1})^2=3^2+2\cdot 3\sqrt{2x-1}+(\sqrt{2x-1})^2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 9(x-1)=9+6\sqrt{2x-1}+2x-1 \;\Rightarrow\; 9x-9-9-2x+1=6\sqrt{2x-1} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 7x-17=6\sqrt{2x-1} \;\Rightarrow\; (7x-17)^2=(6\sqrt{2x-1})^2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 49x^2-238x+289=36(2x-1) \;\Rightarrow\; 49x^2-238x+289-72x+36=0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 49x^2-310x+325=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{310\pm\sqrt{310^2-4\cdot 49\cdot 325}}{2\cdot 49}=\frac{310\pm 180}{98}=\left\langle\begin{array}{l}=\dfrac{65}{49}\\ =5\end{array}\right.$$

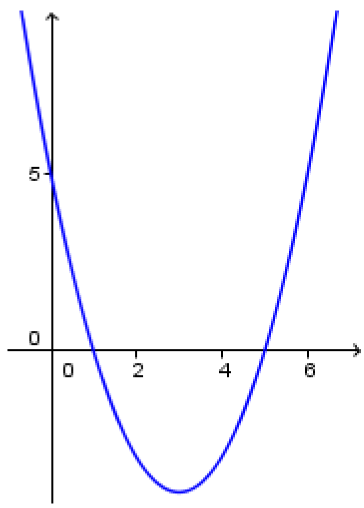
Con la calculadora, las comprobamos en la ecuación original, obteniendo que sólo es válida la segunda. De modo que $\boxed{\text{la solución única es } x = 5}$.

2) Resolver el sistema siguiente: $\begin{cases} 2(x-3)<\dfrac{5+8x}{3} \\ x^2-6x+5\geq 0 \end{cases}$

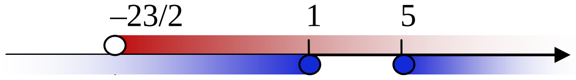
Un sistema de inecuaciones con una incógnita se resuelve calculando los valores de la incógnita que hacen ciertas las dos inecuaciones a la vez. Así:

- $2(x-3)<\dfrac{5+8x}{3} \;\Rightarrow\; 6(x-3) < 5 + 8x \;\Rightarrow\; 6x - 18 < 5 + 8x \;\Rightarrow$
  $\Rightarrow\; 6x - 8x < 5 + 18 \;\Rightarrow\; -2x < 23 \;\Rightarrow\; \boxed{x > -23/2}$.
- $x^2 - 6x + 5 \geq 0$: Llamamos $y = x^2 - 6x + 5$, con lo que buscamos los valores de x que hacen que $y \geq 0$. Pero la relación entre x e y, al ser ésta una función cuadrática, es una parábola cuya gráfica esbozamos sabiendo que es *convexa*, ya que el coeficiente de x^2 es positivo, y corta a OX en:

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}=\left\langle\begin{array}{l}=\dfrac{2}{2}=1\Rightarrow(1,\ 0)\\ =\dfrac{10}{2}=5\Rightarrow(5,\ 0)\end{array}\right.$$



Por ello, la gráfica debe parecerse a la adjunta. Y de ella concluimos que los valores que buscamos son los que dejan la curva sobre el eje OX, incluidos los puntos de corte con dicho eje porque se permite que $y = 0$. Es decir: $\boxed{x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)}$.



Los puntos que verifican ambas condiciones a la vez son, entonces:

$\boxed{x \in (-23/2, 1] \cup [5, +\infty)}$

3) Hallar el dominio de $y = \sqrt{\dfrac{-2x^2+12x-10}{x^2-2x}}$

Los valores x que están en el dominio son aquellos para los que existe imagen. Como quiera que la raíz cuadrada sólo puede calcularse cuando el radicando sea mayor o igual que cero, el dominio lo constituyen las soluciones de la inecuación:

$$\frac{-2x^2+12x-10}{x^2-2x} \geq 0$$

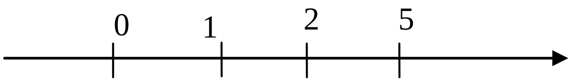
- Factorizamos y hallamos las raíces de numerador y denominador.
  - $-2x^2 + 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{matrix} =1 \\ =5 \end{matrix} \right.$

    Por lo que, como conocemos las dos raíces del polinomio de grado 2, aplicando el Teorema de Descomposición Factorial tenemos que:

    $\boxed{-2x^2 + 12x - 10 = -2(x-1)(x-5) \text{ y sus raíces son } 1 \text{ y } 5}$.
  - $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ó} \\ x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$ porque un producto vale cero si, y sólo si alguno de los factores se anula. Luego:

    $\boxed{x^2 - 2x = x(x-2) \text{ y sus raíces son } 0 \text{ y } 2}$.
- Inecuación simplificada:

  La inecuación se transforma en: $\dfrac{-2(x-1)(x-5)}{x(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{(x-1)(x-5)}{x(x-2)} \leq 0}$
- Cuadro de signos. Dividimos R en intervalos mediante las raíces obtenidas, una vez ordenadas, y creamos el cuadro de signos: ninguno de los factores intervinientes cambiará de signo dentro de dichos intervalos, por lo que basta tomar un punto cualquiera de cada uno de ellos para evaluar los signos (cualquier otro punto ofrecerá el mismo signo):



	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, 5)$	5	$(5, +\infty)$
$x-1$	–	...	–	0	+	...	+	...	+
$x-5$	–	...	–	...	–	...	–	0	+
x	–	0	+	...	+	...	+	...	+
$x-2$	–	...	–	...	–	0	+	...	+
$\dfrac{(x-1)(x-5)}{x(x-2)}$	+	$\nexists$	–	0	+	$\nexists$	–	0	+
¿Sirven? →	No	No	Si	Si	No	No	Si	Si	No

Los signos de la última fila, que son los que nos interesan, los obtenemos mediante la regla de los signos con los que están en su misma columna. Los valores que anulan el denominador provocan que no se pueda completar la operación, por lo que también los descartamos. De este modo:

$$\boxed{D(f) = (0, 1] \cup (2, 5]}$$

4) Decir si es par, impar o ninguna de las dos cosas la siguiente función, y encontrar sus intersecciones con los ejes de coordenadas: $y = \dfrac{3x-1}{x^2-4}$

- <u>Par / Impar</u>:

  $f(-x) = \dfrac{3(-x)-1}{(-x)^2-4} = \dfrac{-3x-1}{x^2-4}$

  $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-4}$; $\quad -f(x) = -\dfrac{3x-1}{x^2-4} = \dfrac{-(3x-1)}{x^2-4} = \dfrac{-3x+1}{x^2-4}$

  Como $f(-x)$ no coincide ni con $f(x)$ ni con $-f(x)$, $\boxed{f \text{ no es par ni impar}}$.

  <u>Nota</u>: Cuando queremos demostrar que una propiedad *es cierta*, nos referimos a que lo sea *siempre*. Buscando si la función es par o impar, hacemos el intento de demostración *para cualquier posible valor de x* ($\forall x$). Pero lo contrario, que una propiedad sea *falsa*, significa que *no es cierta para todo x*. Por ello, *para probar que algo es falso basta encontrar un ejemplo en el que no se cumpla*. Luego probar que la función *no* es par ni impar *puede hacerse con un ejemplo* (un ejemplo de que una propiedad es falsa se denomina *contraejemplo*). Así:

  $f(1) = -2/3$ y $f(-1) = 4/3$, no igual ni a $f(1)$ ni a $-f(1) \Rightarrow$ Ni par ni impar

- <u>Intersecciones con los ejes</u>:
  - $x = 0 \Rightarrow y = 1/4$: $\boxed{(0,\ 1/4) \text{ es el corte con OY}}$.
  - $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{3x-1}{x^2-4} \Rightarrow$ Un cociente vale 0 si lo hace el numerador, descartando aquellos valores que también anulen el denominador: $3x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/3$, válido porque no anula el denominador: $\boxed{(1/3,\ 0) \text{ es el corte con OX}}$.

5) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{5-x}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{5-x}$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{5-x}$

a) $$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{5-x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 5} \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(5-x)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{x-1-4}{(5-x)(\sqrt{x-1}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{(5-x)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{-(-5+x)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{-(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{1}{-(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{1}{-(2+2)} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

b) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x-1}-2}{5-x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{1/2}}{-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{-x^{1-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{-x^{1/2}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{-\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{-\infty}\right) = \boxed{0}$$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{5-x}$ $\boxed{\text{No existe este límite}}$, porque cuando $x \to -\infty$ debe tomar valores negativos, por lo que no será posible calcular la raíz.

Segundo trimestre – 1º Bach CCSS **3 de marzo de 2014**
Examen Global 2ª evaluación

NOMBRE: ____

1ª EVALUACIÓN: □ APROBADA □ SUSPENDIDA (Marcar lo correcto)

Para aprobar el examen se requiere obtener al menos 1,2 puntos en el ejercicio 5.
Los resultados deben simplificarse al máximo.

1) Hallar el dominio de la siguiente función: $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{-6x^2+15x-9}}$ *(1,5 puntos)*

2) Dada la función $g(x) = \dfrac{2x^2-18}{x-1}$, hallar sus asíntotas. *(1 punto)*

3) Estudiar la continuidad de la siguiente función, clasificando sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x+2} & si \quad x<2 \\ x^2-2 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$ *(1,5 puntos)*

4) Hallar la recta tangente a $y = -2x^3 + x^2 + 1$ en el punto de abscisa $x = 1$. *(1 punto)*

5) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(2 puntos)*

a) $f(x) = 2^{3\cos x}$ b) $g(x) = 2x(3x^2 - 1)^6$ c) $h(x) = \dfrac{2x}{5x^2+2}$

d) $j(x) = e^{3x+1} \cdot \ln(3x + 1)$

6) **(Sólo para alumnos con la Primera Evaluación *aprobada*)** Calcular:

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x^3-18x^2+26x-12}{x^3+x^2-2}$$ *(1,5 puntos)*

7) **(Sólo para alumnos con la Primera Evaluación *aprobada*)** Represente el recinto del plano determinado por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices: *(1,5 ptos)*

$$4x - y \geq 4; \quad 2x + y \leq 15; \quad 3y - x \leq 10; \quad y \geq 0$$

8) **(Sólo para alumnos con la Primera Evaluación *pendiente*)** a) Factorizar:

$P(x) = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 12$ y $Q(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4$. *(0,8 puntos)*

b) Resolver la ecuación $\dfrac{4x^3-18x^2+26x-12}{2x^3+2x^2-4} = 0$ *(0,7 puntos)*

9) **(Sólo para alumnos con la Primera Evaluación *pendiente*)** Resolver y discutir (clasificar) el siguiente sistema por el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método). Si tuviera más de una solución, además de dar la forma general de todas las soluciones, decir dos soluciones concretas: *(1,5 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} -2x+3y+2z=10 \\ 3x+4y+3z=5 \\ -9x+5y+3z=25 \end{array}\right\}$$

SOLUCIONES

1) Hallar el dominio de la siguiente función: $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{-6x^2+15x-9}}$ *(1,5 puntos)*

Los valores x que están en el dominio son aquellos para los que existe imagen. Y como la raíz cuadrada sólo puede calcularse cuando el radicando sea mayor o igual que cero, el dominio lo constituyen las soluciones de la inecuación:

$$\frac{x-3}{-6x^2+15x-9} \geq 0$$

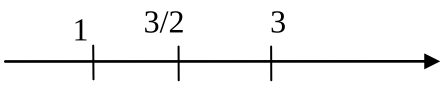
- Factorizamos y hallamos las raíces de numerador y denominador.
  - $\boxed{x-3 \text{ está factorizado y su única raíz es } x = 3}$.
  - $-6x^2 + 15x - 9 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \dfrac{5 \pm 1}{4} = \left\langle \begin{array}{l} =1 \\ =3/2 \end{array}\right.$

    Por lo que, como conocemos las dos raíces del polinomio de grado 2, aplicando el Teorema de Descomposición Factorial tenemos que:

    $$\boxed{-6x^2 + 15x - 9 = -6(x-1)(x-3/2) \text{ y sus raíces son } 1 \text{ y } 3/2}.$$
- Inecuación simplificada: La inecuación se transforma en:

$$\frac{x-3}{-6(x-1)(x-3/2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{(x-1)(x-3/2)} \leq 0$$

- Cuadro de signos. Dividimos R en intervalos mediante las raíces obtenidas, una vez ordenadas, y creamos el cuadro de signos: ninguno de los factores intervinientes cambiará de signo dentro de dichos intervalos, por lo que basta tomar un punto cualquiera de cada uno de ellos para evaluar los signos (cualquier otro punto ofrecerá el mismo signo):



	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3/2)$	3/2	$(3/2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x-1$	–	0	+	...	+	...	+
$x-3/2$	–	...	–	0	+	...	+
$x-3$	–	...	–	...	–	0	+
$\dfrac{x-3}{(x-1)(x-3/2)}$	–	∄	+	∄	–	0	+
¿Sirven? →	Si	No	No	No	Si	Si	No

Los signos de la última fila, que son los que nos interesan, los obtenemos mediante la regla de los signos con los que están en su misma columna. Los valores que anulan el denominador provocan que no se pueda completar la operación, por lo que también los descartamos. De este modo:

$$\boxed{D(f) = (-\infty, 1) \cup (3/2, 3]}$$

2) Dada la función $g(x) = \dfrac{2x^2-18}{x-1}$, hallar sus asíntotas. *(1 punto)*

Para calcular las asíntotas verticales, tenemos que saber dónde es continua (su dominio, porque es una función elemental). El único caso en que no pueden calcularse imágenes es cuando se anula el denominador, o sea, cuando $x = 1$. Por tanto, Dom(f) = R – {1}

- Asíntotas verticales: Sólo puede tenerla en $x = 1$, único punto de discontinuidad. Y como:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-18}{x-1} = \left(\frac{-16}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{\text{la recta } x = 1 \text{ es asíntota vertical}}.$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-18}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to\infty}2x = \infty \Rightarrow \boxed{\text{No tiene A.H.}}$$

- Asíntotas oblicuas: Procedemos a su cálculo porque no tiene A.H., pues de haber sido así obtendríamos de nuevo la misma asíntota horizontal.

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-18}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-18}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-18}{x^2-x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty}2 = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-18}{x-1}-2x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-18-2x(x-1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-18-2x^2+2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{-18+2x}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x} = 2$$

Por tanto, $\boxed{y = 2x + 2 \text{ es asíntota oblicua}}$.

3) Estudiar la continuidad de la siguiente función, clasificando sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x+2} & si \quad x < 2 \\ x^2 - 2 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$ *(1,5 puntos)*

- Zona (–∞, 2): f coincide con $y = \dfrac{2x}{x+2}$. Ésta es una función elemental y, por tanto, continua en su dominio, que es R –{–2}, ya que –2 es su única discontinuidad por anular el denominador. Como dicho valor está en la zona, también es discontinuidad de f. En el resto de puntos del intervalo f es, pues, continua. Veamos qué discontinuidad hay en $x = –2$.
  1) ∄ $f(–2)$, como hemos comentado.
  2) $\lim_{x\to -2}\dfrac{2x}{x+2} = \left(\dfrac{-4}{0}\right) = \infty$, por lo que la discontinuidad es asintótica (habría una asíntota vertical en $x = –2$). Veamos si, además, es de salto infinito.

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{2x}{x+2} = \left(\frac{-}{-}\right) = +\infty \qquad \lim_{x\to -2^+}\frac{2x}{x+2} = \left(\frac{-}{+}\right) = -\infty$$

  Luego es una discontinuidad asintótica de salto infinito la que hay en $x = –2$.
- Zona (2, +∞): f coincide con $y = x^2 – 2$, que no tiene discontinuidades, como todas las funciones polinómicas. Luego f es continua en toda la zona.
- $x = 2$: 1) ∃$f(2) = 2^2 – 2 = 2$; 2) Para calcular $\lim_{x\to 2} f(x)$ hemos de recurrir a los límites laterales, porque la definición de f es distinta cuando x está a la derecha o a la izquierda de 2. Así:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x}{x+2} = \frac{4}{4} = 1; \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2-2) = 4-2 = 2$$

Al diferir, presenta una discontinuidad de salto finito.

En resumen, f es continua en $R - \{-2, 2\}$. Tiene una discontinuidad asintótica de salto infinito en $x = -2$, y una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

4) Hallar la recta tangente a $y = -2x^3 + x^2 + 1$ en el punto de abscisa $x = 1$. *(1 punto)*

- Punto de tangencia: $x = 1 \Rightarrow y = -2\cdot 1^3 + 1^2 + 1 = 0$: $(1, 0)$.
- Pendiente de la tangente: Como $y' = -6x^2 + 2x \Rightarrow m = f'(1) = -4$
- Ecuación de la tangente: $y - 0 = -4(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -4x + 4}$

5) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(2 puntos)*

a) $f(x) = 2^{3\cos x}$ b) $g(x) = 2x(3x^2 - 1)^6$ c) $h(x) = \dfrac{2x}{5x^2+2}$

d) $j(x) = e^{3x+1} \cdot \ln(3x + 1)$

a) $f(x) = 2^{3\cos x} \Rightarrow f'(x) = \boxed{-3(\text{sen } x)2^{3\cos x} \ln 2}$

b) $g(x) = 2x(3x^2 - 1)^6 \Rightarrow g'(x) = 2(3x^2 - 1)^6 + 2x\cdot 6(3x^2 - 1)^5 6x =$
$= 2(3x^2 - 1)^5[(3x^2 - 1) + 6x6x] = 2(3x^2 - 1)^5(3x^2 - 1 + 36x^2) =$
$= \boxed{2(3x^2 - 1)^5(39x^2 - 1)}$

c) $h(x) = \dfrac{2x}{5x^2+2} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{2(5x^2+2)-2x10x}{(5x^2+2)^2} = \dfrac{10x^2+4-20x^2}{(5x^2+2)^2} = \boxed{\dfrac{-10x^2+4}{(5x^2+2)^2}}$

d) $j(x) = e^{3x+1} \cdot \ln(3x + 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow j'(x) = 3e^{3x+1}\ln(3x+1) + e^{3x+1}\frac{3}{3x+1} = \boxed{e^{3x+1}\left[3\ln(3x+1) + \frac{3}{3x+1}\right]}$$

6) **(Sólo para alumnos con la Primera Evaluación *aprobada*)** Calcular:

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x^3 - 18x^2 + 26x - 12}{x^3 + x^2 - 2}$$ *(1,5 puntos)*

Al sustituir, obtenemos la indeterminación 0/0. Para eliminarla, aplicamos Ruffini a cada polinomio, probando con $x = 1$, que es el número que provoca los ceros de ambos polinomios:

	4	–18	26	– 12
1		4	– 14	12
	4	– 14	12	0

	1	1	0	– 2
1		1	2	2
	1	2	2	0

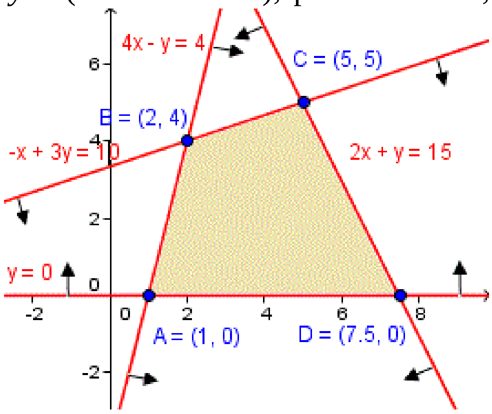
Por tanto:

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x^3 - 18x^2 + 26x - 12}{x^3 + x^2 - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(4x^2 - 14x + 12)}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} = \lim_{x\to 1} \frac{4x^2 - 14x + 12}{x^2 + 2x + 2} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

7) **(Sólo para alumnos con la Primera Evaluación *aprobada*)** Represente el recinto del plano determinado por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices: *(1,5 ptos)*

$$4x - y \geq 4; \quad 2x + y \leq 15; \quad 3y - x \leq 10; \quad y \geq 0$$

Mediante tablas de valores, representamos las rectas que se obtienen al cambiar el signo de desigualdad por un igual en cada una de las inecuaciones. Después, decidimos, para cada una de de ellas, cuál de los dos semiplanos nos interesa. Para la primera, es el de abajo, pues al despejar queda $y \leq 4x - 4$, o sea, $y \leq$ (ecuación de la recta); para la segunda, el de abajo, pues es $y \leq$ (ec. de la recta); para la tercera, también el de abajo, pues resulta $y \leq$ (ec. de la recta). Y la última, señala la para que queda sobre la recta horizontal $y = 0$ (eje OX). Así, la región factible, a falta de calcular sus vértices, es la del gráfico.



Vértice A:
$y = 0 \Rightarrow 4x - 0 = 4 \Rightarrow x = 1$: $\boxed{A(1, 0)}$.

Vértice B:
$$\begin{cases} 4x - y = 4 \\ -x + 3y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 3y = 12 \\ -x + 3y = 10 \end{cases} \Rightarrow$$
Sumando: $11x = 22 \Rightarrow x = 2$
Sustituyendo en la 1ª ec: $8 - y = 4 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \boxed{B(2, 4)}$.

Vértice C:
$$\begin{cases} 2x + y = 15 \\ -x + 3y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 15 \\ -2x + 6y = 20 \end{cases} \Rightarrow \text{Sumando: } 7y = 35 \Rightarrow y = 5$$
Sustituyendo en la 1ª ec: $2x + 5 = 15 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$: $\boxed{C(5, 5)}$.

Vértice D:
$y = 0 \Rightarrow 2x + 0 = 15 \Rightarrow x = 15/2$: $\boxed{D(15/2, 0)}$.

8) **(Sólo para alumnos con la Primera Evaluación *pendiente*)** a) Factorizar:
$P(x) = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 12$ y $Q(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4$. *(0,8 puntos)*

Factorizamos por Ruffini cada polinomio:

	4	−18	26	−12
1		4	−14	12
	4	−14	12	0

Resolvemos $4x^2 - 14x + 12 = 0$:
$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 192}}{8} = \frac{14 \pm 2}{8} = \begin{cases} = 3/2 \\ = 2 \end{cases}$$

	2	2	0	−4
1		2	4	4
	2	4	4	0

Resolvemos $2x^2 + 4x + 4 = 0$:
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{8} \text{ sin solución}$$

Por tanto: $P(x) = 4(x - 1)(x - 3/2)(x - 2)$, ya que hemos empleado el *Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios*, puesto que conocemos *las tres* raíces del polinomio de grado 3, por lo que procedemos a escribir factores del tipo (x – *raíz*) y los multiplicamos por el coeficiente del término de mayor grado.
Análogamente, $Q(x) = (x - 1)(2x^2 + 4x + 4)$, porque aquí no podemos emplear el *Teorema*, ya que el polinomio es de grado 3 y sólo conocemos una raíz. Luego aplicamos lo que nos ha salido de la división por Ruffini.

b) Resolver la ecuación $\dfrac{4x^3 - 18x^2 + 26x - 12}{2x^3 + 2x^2 - 4} = 0$ *(0,7 puntos)*

Según lo anterior:

$$\frac{4x^3-18x^2+26x-12}{2x^3+2x^2-4}=0 \iff \frac{4(x-1)(x-3/2)(x-2)}{(x-1)(2x^2+4x+4)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{4(x-3/2)(x-2)}{2x^2+4x+4}=0, \text{ si } x\neq 1.$$

Una fracción se anula si, y sólo si lo hace el numerador pero no el denominador. Así que: $4(x-3/2)(x-2)=0 \Rightarrow x=2$ ó $x=3/2$. Como el denominador no tenía raíces, no se anula para ningún valor, luego ambas soluciones son válidas:

$$\boxed{x=2 \text{ ó } x=3/2}$$

9) **(Sólo para alumnos con la Primera Evaluación *pendiente*)** Resolver y discutir (clasificar) el siguiente sistema por el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método). Si tuviera más de una solución, además de dar la forma general de todas las soluciones, decir dos soluciones concretas: *(1,5 puntos)*

$$\left.\begin{aligned} -2x+3y+2z&=10 \\ 3x+4y+3z&=5 \\ -9x+5y+3z&=25 \end{aligned}\right\}$$

Triangularizamos la *matriz ampliada*:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 10 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ -9 & 5 & 3 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3-3F_1]{2F_2-3F_1} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 10 \\ 12 & -1 & 0 & -20 \\ -12 & 1 & 0 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 10 \\ 12 & -1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya está triangularizada. Al ser la última fila completa de 0, la eliminamos. Quedan, entonces, 2 ecuaciones con 3 incógnitas, por lo que estamos ante un **<u>sistema compatible indeterminado</u>**. Reconstruimos el sistema y lo resolvemos:

$$\left.\begin{aligned} -2x+3y+2z&=10 \\ 12x-y\qquad&=-20 \end{aligned}\right\}$$

Llamamos $x=t$ (le damos un valor arbitrario y fijo a una de las incógnitas, que no sea z, porque en ella hay uno de los 0 de la triangularización y nos resultaría algo más largo resolver la ecuación, aunque también lo conseguiríamos). Pasándola al segundo miembro, el sistema será:

$$\left.\begin{aligned} 3y+2z&=10+2t \\ -y\qquad&=-20-12t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} 2^a ec: & y=20+12t \\ 1^a ec: & 2z=10+2t-3(20+12t)=10+2t-60-36t= \\ & =-50-34t \Rightarrow z=-25-17t \end{array}$$

La forma de las infinitas soluciones es, entonces: $\boxed{(t,\ 20+12t,\ -25-17t)}$

Nos piden dos soluciones concretas:

- $t=0 \Rightarrow (0, 20, -25)$
- $t=1 \Rightarrow (1, 32, -42)$