NOMBRE: ____

Importante: Para aprobar el examen se requiere obtener, al menos, 1 punto en la pregunta número 1

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*
   a) $y = (x + 1)e^{2x+1}$
   b) $y = \ln\sqrt[4]{1-2x^2}$
   c) $y = \dfrac{1-x^2}{2+x^2}$
2) Un temario consta de 20 cuestiones. Se eligen 5 al azar para un examen. ¿Cuántos exámenes distintos se pueden formar? *(1,5 puntos)*
3) Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 - 3x + 2$ en el punto de abscisa $x = 3$. *(1 punto)*
4) Dada la función $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 9x - 5}{5}$, se pide: *(4 puntos)*
   a) Dominio. Estudiar si es Par o Impar. Intersecciones con los ejes. Asíntotas.
   b) Monotonía y extremos relativos.
   c) Curvatura y puntos de inflexión.
   d) Gráfica, usando la información obtenida en los puntos anteriores.
5) Los 34 alumnos de un grupo de 1º de Bachillerato han obtenido en la segunda evaluación las calificaciones en Economía y en Matemáticas que están recogidas en la tabla siguiente:

		y (Nota en Matemáticas)											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totales:
x (Nota en Economía)	0												0
	1			1									1
	2					1	1						2
	3	1	1	1	1								4
	4			2	2								4
	5	1				2	1	1		1			6
	6			1	2	2			1				6
	7							2	1	1	1		5
	8								2		1		3
	9								1	2			3
	10												0
Totales:		2	1	5	5	5	2	3	5	4	2	0	34

   a) Calcular: Medias marginales de x y de y. Desviaciones típicas marginales de ambas. Covarianza. Coeficiente de correlación lineal. Interpretarlo. *(1 punto)*
   b) Calcular la recta de regresión de y sobre x y emplearla para predecir qué nota cabría esperar en Matemáticas para un alumno que ha obtenido un 8 en Economía. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

a) $y = (x + 1)e^{2x+1}$

$$y' = 1 \cdot e^{2x+1} + (x+1)\,2e^{2x+1} = e^{2x+1}[1 + 2(x+1)] = e^{2x+1}(1 + 2x + 2) =$$
$$= \boxed{e^{2x+1}(2x+3)}$$

b) $y = \ln\sqrt[4]{1-2x^2}$

Simplificamos antes de derivar:

$$y = \ln\sqrt[4]{1-2x^2} = \frac{1}{4}\ln(1-2x^2)$$

No es posible simplificar más, porque no puede hacerse con el logaritmo de una suma o resta. Derivamos:

$$y' = \frac{1}{4}\cdot\frac{-4x}{1-2x^2} = \boxed{-\frac{x}{1-2x^2}}$$

c) $y = \dfrac{1-x^2}{2+x^2}$

$$y' = \frac{-2x(2+x^2)-(1-x^2)2x}{(2+x^2)^2} = \frac{-4x-2x^3-2x+2x^3}{(2+x^2)^2} = \boxed{\frac{-6x}{(2+x^2)^2}}$$

2) Un temario consta de 20 cuestiones. Se eligen 5 al azar para un examen. ¿Cuántos exámenes distintos se pueden formar? *(1,5 puntos)*

Los grupos son de 5 cuestiones de entre 20 posibles.

No entran todos los elementos en cada grupo, por lo que no son permutaciones.

No influye el orden para distinguir un grupo de otro: Sería el mismo examen si alterásemos el orden de las cuestiones que lo integran. Por tanto, *son combinaciones*.

$$C_{20,\,5} = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5!(20-5)!} = \boxed{15504}$$

Con la calculadora habría que pulsar: 20 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x!}$ $\boxed{:}$ $\boxed{(}$ 5 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x!}$ $\boxed{\times}$ 15 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x!}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$. Los paréntesis del denominador son indispensables, puesto que, de omitirlos, multiplicaríamos (20!/5!) ·15!.

3) Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 - 3x + 2$ en el punto de abscisa $x = 3$. *(1 punto)*

- Punto de tangencia: Si $x = 3 \Rightarrow y = f(3) = 3^2 - 3\cdot 3 + 2 = 2$. Es (3, 2).
- Pendiente de la tangente: Como $f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow m = f'(3) = 2\cdot 3 - 3 = 3$.
- Ecuación de la tangente: $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 3(x - 3) \Rightarrow$
  $\Rightarrow y = 3x - 9 + 2 \Rightarrow \boxed{y = 3x - 7}$.

4) Dada la función $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 9x - 5}{5}$, se pide: *(4 puntos)*

a) Dominio. Estudiar si es Par o Impar. Intersecciones con los ejes. Asíntotas.

La función es polinómica, pues el denominador 5 puede repartirse entre los 4 sumandos del numerador.

- Dominio: Es todo $\boxed{\mathbb{R}}$, puesto que se trata de una función polinómica, y los dominios de dichas funciones son el conjunto de los números reales.

- Par / Impar: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 3(-x)^2 - 9(-x) - 5}{5} = \dfrac{-x^3 - 3x^2 + 9x - 5}{5}$, que no coincide con $f(x)$, por lo que $\boxed{\text{no es par}}$, ni con $-f(x) = -\dfrac{x^3 - 3x^2 - 9x - 5}{5} = \dfrac{-(x^3 - 3x^2 - 9x - 5)}{5} = \dfrac{-x^3 + 3x^2 + 9x + 5}{5}$, por lo que $\boxed{\text{tampoco es impar}}$.
- Intersecciones con los ejes:
  - $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-5}{5} = -1 \Rightarrow \boxed{(0, -1)}$
  - $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 9x - 5}{5} \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$.

    Aplicamos Ruffini para resolver esta ecuación:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & -9 & -5 \\
-1 & & -1 & 4 & 5 \\
\hline
 & 1 & -4 & -5 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 5 & \\
\hline
 & 1 & -5 & \boxed{0} & \\
5 & & 5 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

    Tenemos tres soluciones, dos de ellas coincidentes. Por tanto, obtenemos dos puntos de corte: $\boxed{(-1, 0)\ \text{y}\ (5, 0)}$.
- Asíntotas: Las funciones polinómicas no tienen asíntotas.

b) Monotonía y extremos relativos.

Derivamos la función:

$$y = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x - 5}{5} = \frac{1}{5}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5) \Rightarrow \boxed{y' = \frac{1}{5}(3x^2 - 6x - 9)}$$

- Discontinuidades de f ó de f': No tienen (son polinómicas).
- $f'(x) = 0$: $\dfrac{1}{5}(3x^2 - 6x - 9) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$:

  $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} = \langle\begin{smallmatrix} = -1 \\ = 3 \end{smallmatrix}$

Al dividir R, mediante los dos puntos obtenidos, en intervalos, resulta:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	+	0	–	0	+
f	↗	**Máx**	↘	**mín**	↗

Luego tiene un $\boxed{\text{máximo relativo en } (-1, 0)}$ y $\boxed{\text{mínimo relativo en } (3, -6.4)}$

c) Curvatura y puntos de inflexión.

Hallamos la derivada segunda:

$$\boxed{y'' = \frac{1}{5}(6x - 6)}$$

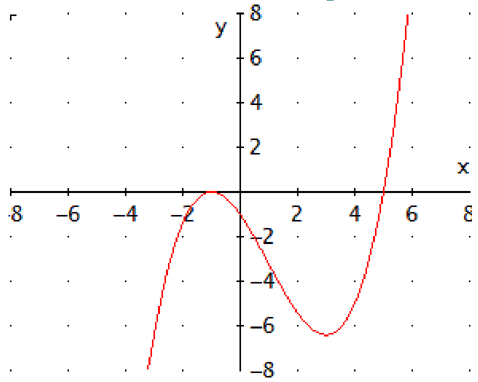
- Discontinuidades de f ó de f' ó de f'': No tienen (son polinómicas).
- $f''(x) = 0$: $6x - 6 = 0 \cdot 5 \Rightarrow x = 1$.

Dividimos R en intervalos mediante el punto obtenido:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f''	–	0	+
f	$\cap$	P.I.	$\cup$

Luego tiene un punto de inflexión en (1, –3.2).

d) Gráfica, usando la información obtenida en los puntos anteriores.



5) Los 34 alumnos de un grupo de 1º de Bachillerato han obtenido en la segunda evaluación las calificaciones en Economía y en Matemáticas que están recogidas en la tabla siguiente:

		y (Nota en Matemáticas)											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totales:
x (Nota en Economía)	0												0
	1			1									1
	2					1	1						2
	3	1	1	1	1								4
	4			2	2								4
	5	1				2	1	1		1			6
	6			1	2	2			1				6
	7							2	1	1	1		5
	8								2		1		3
	9								1	2			3
	10												0
Totales:		2	1	5	5	5	2	3	5	4	2	0	34

c) Calcular: Medias marginales de x y de y. Desviaciones típicas marginales de ambas. Covarianza. Coeficiente de correlación lineal. Interpretarlo. *(1 punto)*

$$\bar{x} = \frac{1{\cdot}1 + 2{\cdot}2 + 3{\cdot}4 + \ldots + 9{\cdot}3}{34} = \boxed{5.441} \qquad \bar{y} = \frac{0{\cdot}2 + 1{\cdot}1 + 2{\cdot}5 + \ldots + 9{\cdot}2}{34} = \boxed{4.676}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1^2{\cdot}1 + 2^2{\cdot}2 + 3^2{\cdot}4 + \ldots + 9^2{\cdot}3}{34} - \bar{x}^2} = \boxed{2.089}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{0^2{\cdot}2 + 1^2{\cdot}1 + 2^2{\cdot}5 + \ldots + 9^2{\cdot}2}{34}} = \boxed{2.654}$$

$$s_{xy} = \frac{1{\cdot}2{\cdot}1 + 2{\cdot}4{\cdot}1 + 2{\cdot}5{\cdot}1 + \ldots + 9{\cdot}8{\cdot}2}{34} - \bar{x}{\cdot}\bar{y} = \boxed{3.790} \qquad r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \boxed{0.708}$$

Como está próximo a 1 y es positivo, las variables tienen correlación alta y positiva. Las predicciones que se hagan con la recta de regresión pueden ser fiables, si bien con cierta cautela.

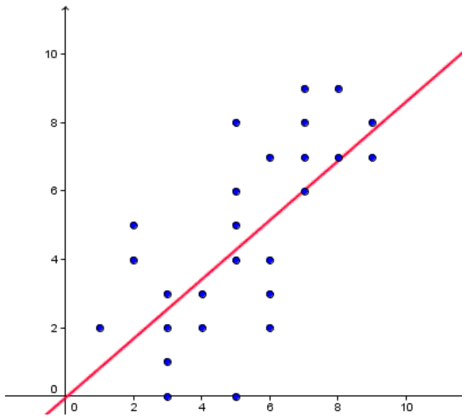
Las fórmulas utilizadas son las estándares, donde se han utilizado los valores de x y de y que proporciona la tabla, junto con las frecuencias de cada pareja, que se encuentran en el interior, o las de cada valor de x, que están sumadas en el margen derecho, y las de y, en el margen inferior.
Pero en el cálculo hemos usado la función *estadística* de la calculadora. Para una tipo Casio S.V.P.A.M. (por ejemplo, la *fx-82MS*), o alguna de otra marca que tienen un funcionamiento idéntico, sería como sigue.

- Ponemos la calculadora en modo *regresión lineal*: $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{REG}}$ $\boxed{\text{LIN}}$.
- Introducimos los datos: 1 $\boxed{,}$ 2 $\boxed{\text{M+}}$. 2 $\boxed{,}$ 4 $\boxed{\text{M+}}$. Etc. Para aquellos datos cuya frecuencia es mayor que 1 sería: 4 $\boxed{,}$ 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{,}$ 2 $\boxed{\text{M+}}$ que aparece en pantalla como: 4,2;2. Si queremos rectificar algún dato, nos movemos con flecha abajo o flecha arriba hasta el valor a cambiar, escribimos el nuevo sobre el mismo y pulsamos $\boxed{=}$. Hay que salir del modo *introducción de datos* pulsando $\boxed{\text{AC}}$. Los datos introducidos no se pierden aunque apaguemos la calculadora. Sólo lo hacen al cambiar el MODE o elegir $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{CLR}}$.
- Los datos de $\bar{x}$ o $\bar{y}$ los obtenemos en $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$: esta secuencia de teclas nos lleva a los resultados más importantes que buscamos. Hay que desplazarse con Flecha Derecha o Flecha Izquierda hasta encontrar el que buscamos. La *desviación típica* es la simbolizada con σx o σy. Entre este conjunto de datos está también el *coeficiente de correlación*.
- La *covarianza* no la proporciona directamente la calculadora. Un modo de obtenerla es usar su fórmula: $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\to}$ $\boxed{3}$ $\boxed{:}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\to}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$, que muestra en pantalla: $\sum xy : n - \bar{x} \text{ x } \bar{y}$.

d) Calcular la recta de regresión de y sobre x y emplearla para predecir qué nota cabría esperar en Matemáticas para un alumno que ha obtenido un 8 en Economía. *(1 punto)*

La recta de regresión lineal de y sobre x será: $y - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \bar{x})$, que sustituyendo y despejando resulta: $\boxed{y = -0.048562933 + 0.868384539x}$.
Para $x = 8$ se obtiene $\boxed{y = 6.89}$, que es la nota que cabría esperar en Matemáticas para un alumno que ha obtenido un 8 en Economía.

Con la calculadora, los coeficientes de la recta de regresión son los valores A y B de la serie de datos de $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$. La predicción para $x = 8$ también la proporciona pulsando: 8 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\to}$ $\boxed{\to}$ $\boxed{\to}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$. En pantalla se nos mostrará: $8\,\hat{y}$.
Hay que recordar salir del *modo estadística*, lo que se consigue pulsando $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{COMP}}$.
La nube de puntos y la recta de regresión se muestran en el gráfico.



Tercer trimestre – 1º Bach CCSS **24 de Mayo de 2013**
Global 3ª evaluación

NOMBRE: ____
1ª y 2ª EVALUACIÓN: ☐ APROBADAS ☐ SUSPENDIDAS

Importante: Para aprobar el examen se requiere obtener, al menos, 1 punto en la pregunta número 1

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*
   a) $y = (2x + 5)e^{3x}$
   b) $y = (3x^2 + 5x - 1)^6$
   c) $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$
2) *(Sólo para los que tienen aprobadas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Desarrollar y simplificar, aplicando la fórmula del *Binomio de Newton*: $(3x - 2)^5$ *(1 punto)*
3) *(Sólo para los que tienen aprobadas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = x^3 - 4x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$. *(1 punto)*
4) Dada la función $y = \dfrac{1+2x}{x-2}$, se pide: *(4 puntos)*
   a) Dominio. Intersecciones con los ejes. Asíntotas.
   b) Monotonía y extremos relativos.
   c) Curvatura y puntos de inflexión.
   d) Gráfica, usando la información obtenida en los puntos anteriores.
5) De 10 personas se va a elegir 3 para trabajar en una empresa.
   a) ¿Cuántas elecciones posibles se pueden realizar? *(0,5 puntos)*
   b) ¿En cuántas de ellas figura la persona *A*? *(0,5 puntos)*
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea contratada *A*? *(0,5 puntos)*
6) De las 180 personas que asisten a un congreso médico, 100 son mujeres. Observando las especialidades de los congresistas, vemos que de las 60 personas que son pediatras 20 son mujeres. Se elije al azar una persona asistente al congreso.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y pediatra? *(0,5 puntos)*
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea pediatra? *(0,5 puntos)*

2) *(Sólo para los que tienen suspendidas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Factorizar el polinomio $8x^3 + 6x^2 - 29x + 15$ *(1 punto)*
3) *(Sólo para los que tienen suspendidas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Clasificar y resolver aplicando *exclusivamente* el método de Gauss en su forma matricial, el sistema siguiente: *(1 punto)*

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 6 \\ -2x + 3y + 2z = -3 \\ x - 6y - z = -3 \end{array}\right\}$$

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

a) $y = (2x + 5)e^{3x}$

$$y' = 2e^{3x} + (2x + 5)3e^{3x} = e^{3x}[2 + (2x + 5)3] = e^{3x}(2 + 6x + 15) = \boxed{e^{3x}(6x + 17)}$$

b) $y = (3x^2 + 5x - 1)^6$

$$y' = 6(3x^2 + 5x - 1)^5(6x + 5) = \boxed{(36x + 30)(3x^2 + 5x - 1)^5}$$

c) $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$

Simplificamos antes de derivar:

$$y = \ln\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}} = \frac{1}{4}\ln\frac{1+2x}{1-2x} = \frac{1}{4}\left[\ln(1+2x) - \ln(1-2x)\right]$$

Derivando:

$$y' = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{1+2x} - \frac{-2}{1-2x}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{1+2x} + \frac{2}{1-2x}\right) =$$

Bien podríamos terminarlo ahí, pero vamos a sumar las dos fracciones, porque no parece muy complicado y porque el m.c.m. de los denominadores consta de una suma por diferencia:

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2(1-2x) + 2(1+2x)}{1^2 - (2x)^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2 - 4x + 2 + 4x}{1-4x^2}\right) = \frac{1}{4}\frac{4}{1-4x^2} = \boxed{\frac{1}{1-4x^2}}$$

2) *(Sólo para los que tienen aprobadas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Desarrollar y simplificar, aplicando la fórmula del *Binomio de Newton*: $(3x - 2)^5$ *(1 punto)*

$$(3x - 2)^5 =$$

$$= \binom{5}{0}(3x)^5 - \binom{5}{1}(3x)^4 2 + \binom{5}{2}(3x)^3 2^2 - \binom{5}{3}(3x)^2 2^3 + \binom{5}{4}(3x)2^4 - \binom{5}{5}2^5 =$$

$$= 1\cdot 3^5x^5 - 5\cdot 3^4x^4\cdot 2 + 10\cdot 3^3x^3\cdot 4 - 10\cdot 3^2x^2\cdot 8 + 5\cdot 3x\cdot 16 - 1\cdot 32 =$$

$$= \boxed{243x^5 - 810x^4 + 1080x^3 - 720x^2 + 240x - 32}$$

3) *(Sólo para los que tienen aprobadas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = x^3 - 4x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$. *(1 punto)*

- Punto de tangencia: Si $x = 2 \Rightarrow y = 2^3 - 4\cdot 2^2 = -8$. Es $(2, -8)$
- Pendiente de la tangente: Derivando, tenemos que $y' = 3x^2 - 8x$. Por tanto, $m = f'(2) = 3\cdot 2^2 - 8\cdot 2 = -4$.
- Recta tangente buscada: $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 8 = -4(x - 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow y = -4x + 8 - 8 \Rightarrow \boxed{y = -4x}$

4) Dada la función $y = \dfrac{1+2x}{x-2}$, se pide: *(4 puntos)*

a) Dominio. Intersecciones con los ejes. Asíntotas.

- Dominio: No se puede anular el denominador. Y eso ocurre si $x - 2 = 0$ $\Rightarrow x = 2 \Rightarrow \boxed{D(f) = R - \{2\}}$
- Intersecciones con los ejes:
  - $x = 0 \Rightarrow y = 1/(-2) = -1/2 \Rightarrow \boxed{(0, -1/2)}$

- $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{1+2x}{x-2} \Rightarrow$ Para que un cociente se anule, el numerador debe ser 0 y, de las soluciones que encontremos, desechamos las que anulen el denominador: $1 + 2x = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -1/2$, que no anula el denominador $\Rightarrow \boxed{(-1/2,\ 0)}$.

- Asíntotas
  - AV: Como la única discontinuidad está en $x = 2$, probamos únicamente dicho valor: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1+2x}{x-2} = \left(\dfrac{5}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{x = 2 \text{ es AV}}$. Si calculásemos los límites laterales, tendríamos más información sobre la posición de la curva respecto de la asíntota encontrada, pero la monotonía también nos proporcionará dicha información.
  - AH: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+2x}{x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{1} = 2 \Rightarrow \boxed{y = 2 \text{ es AH}}$. En el cálculo del límite hemos considerado que 1 es despreciable frente al doble de infinito, en el numerador, y que 2 lo es frente a infinito, en el denominador.
  - AO: Si intentásemos calcularla, saldría la asíntota horizontal que ya tenemos.

b) Monotonía y extremos relativos.

Necesitamos la función derivada:

$$f'(x) = \frac{2(x-2)-(1+2x)}{(x-2)^2} = \frac{2x-4-1-2x}{(x-2)^2} = \boxed{\frac{-5}{(x-2)^2}}$$

- Discontinuidades de f ó de f': $x = 2$.
- $f'(x) = 0$: Como antes dijimos, debe ser 0 el numerador, y no hay valor de x que haga que $-5 = 0$. No tiene solución.

Dividimos R en intervalos mediante el único punto obtenido:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	–	∄	–
f	↘	∄	↘

La función siempre es decreciente y no tiene extremos relativos.

c) Curvatura y puntos de inflexión.

Necesitamos la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{0-(-5)\cdot 2(x-2)\cdot 1}{(x-2)^4} = \boxed{\frac{10}{(x-2)^3}}$$

- Discont. de f ó de f' ó de f'': $x = 2$.
- $f''(x) = 0$: No es posible conseguir que $10 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución.

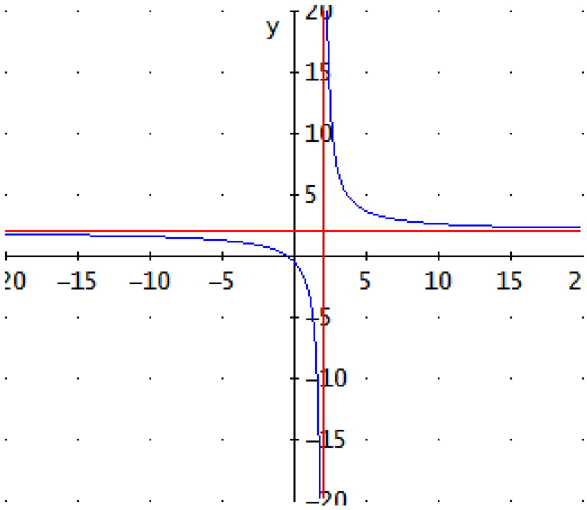
Dividimos R en intervalos mediante el único punto obtenido:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f''	–	∄	+
f	∩	∄	∪

No tiene puntos de inflexión.

d) Gráfica, usando la información obtenida en los puntos anteriores.

Dibujamos las dos asíntotas. Señalamos los puntos de corte con los ejes. Con esta información y la de la monotonía y curvatura, teniendo presente que la función debe acercarse a cada asíntota por uno de sus lados cuando nos alejamos del origen de coordenadas, la gráfica no puede ser otra que la del gráfico adjunto, en el que las dos asíntotas figuran en color rojo. Si aún dudamos, usamos alguna pequeña tabla de valores para salir de dudas. Si encontrásemos incongruencias, es que hemos realizado mal alguno de los cálculos previos.



5) De 10 personas se va a elegir 3 para trabajar en una empresa.

a) ¿Cuántas elecciones posibles se pueden realizar? *(0,5 puntos)*

No entran todos los elementos en todos los grupos $\Rightarrow$ No son permutaciones.
El orden no influye: Cada grupo consta de 3 personas elegidas para el trabajo, y es indiferente el orden en que se enumeren.
No se puede repetir la misma persona en un mismo grupo.
Por tanto, se trata de *combinaciones*.

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \boxed{120}$$

b) ¿En cuántas de ellas figura la persona *A*? *(0,5 puntos)*

Si *A* está ya elegida, sólo se puede completar el grupo con otras dos personas, puesto que, en total, se eligen 3. Siguen rigiendo las reglas anteriores, por lo que son, también, combinaciones. Además, para completar el grupo, disponemos de una persona menos. Luego la respuesta es:

$$C_{9,2} = \binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2\cdot 1} = \boxed{36}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea contratada *A*? *(0,5 puntos)*

De los dos apartados anteriores, tenemos los casos posibles y los favorables, respectivamente. Por tanto:

$$P(A) = \frac{36}{120} = \boxed{\frac{3}{10} = 0{,}3}$$

6) De las 180 personas que asisten a un congreso médico, 100 son mujeres. Observando las especialidades de los congresistas, vemos que de las 60 personas que son pediatras 20 son mujeres. Se elije al azar una persona asistente al congreso.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y pediatra? *(0,5 puntos)*

Se podría hacer una tabla de contingencia; incluso un árbol. Pero leyendo el enunciado con detenimiento, observamos que hay 20 personas que son mujeres y pediatras de un total de 180. Por tanto:

$$P(M\cap P) = \frac{20}{180} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea pediatra? *(0,5 puntos)*
Igual que antes, tenemos 60 pediatras de las 180 personas:

$$P(\text{P}) = \frac{60}{180} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

2) *(Sólo para los que tienen suspendidas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Factorizar el polinomio $8x^3 + 6x^2 - 29x + 15$ *(1 punto)*
Intentamos hacerlo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 8 & 6 & -29 & 15 \\ 1 & & 8 & 14 & -15 \\ \hline & 8 & 14 & -15 & \boxed{0} \end{array}$$

Pero aquí no encontramos la forma de seguir. Igualamos el polinomio cociente a cero e intentamos resolver la ecuación de segundo grado resultante para ver si tiene más raíces:

$$8x^2 + 14x - 15 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-14 \pm \sqrt{196+480}}{16} = \frac{-14 \pm 26}{16} = \begin{cases} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4} \\ = \dfrac{-40}{16} = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Por tanto: $\boxed{8x^3 + 6x^2 - 29x + 15 = 8(x-1)\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)}$

3) *(Sólo para los que tienen suspendidas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Clasificar y resolver aplicando *exclusivamente* el método de Gauss en su forma matricial, el sistema siguiente: *(1 punto)*

$$\left.\begin{aligned} x + 3y - z &= 6 \\ -2x + 3y + 2z &= -3 \\ x - 6y - z &= -3 \end{aligned}\right\}$$

Escribimos la matriz ampliada del sistema y realizamos transformaciones elementales para triangularizarla:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ -2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 9 & 0 & 9 \\ 0 & -9 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 + F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos triangularizado el sistema y, además, la última ecuación la eliminamos, por estar constituida únicamente de 0. Como, después de triangularizar, nos quedan menos ecuaciones (2) que incógnitas (3), estamos ante un <u>sistema *compatible indeterminado*</u>. Hemos de pasar una incógnita al segundo miembro y hacerla actuar como un parámetro con valor arbitrariamente escogido por nosotros. Lo hacemos con z, a la que llamaremos t. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 6 + t \\ 9y &= 9 \end{aligned}\right\}$$

- 2ª ecuación: $9y = 9 \;\Rightarrow\; y = 1$.
- 1ª ecuación: $x + 3\cdot 1 = 6 + t \;\Rightarrow\; x = 6 + t - 3 \;\Rightarrow\; x = 3 + t$

Así que las infinitas ecuaciones del sistema obedecen a la estructura siguiente, en la que eligiendo valores de t obtenemos, cada vez, una solución:

$$\boxed{(3 + t, 1, t)}$$

Tercer trimestre – 1º Bach CCSS **29 de Mayo de 2013**
Global 3ª evaluación

NOMBRE: ____

1ª y 2ª EVALUACIÓN: ☐ APROBADAS ☐ SUSPENDIDAS

Importante: Para aprobar el examen se requiere obtener, al menos, 1 punto en la pregunta número 1

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*
   a) $y = (3x - 5)e^{7x}$
   b) $y = (x^2 + 3x - 1)^5$
   c) $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{3x-2}{3x+2}}$
2) *(Sólo para los que tienen aprobadas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Desarrollar y simplificar, aplicando la fórmula del *Binomio de Newton*: $(2x - 3)^4$ *(1 punto)*
3) *(Sólo para los que tienen aprobadas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = -x^3 + 2x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$. *(1 punto)*
4) Dada la función $y = \dfrac{2+x}{2x-2}$, se pide: *(4 puntos)*
   a) Dominio. Intersecciones con los ejes. Asíntotas.
   b) Monotonía y extremos relativos.
   c) Curvatura y puntos de inflexión.
   d) Gráfica, usando la información obtenida en los puntos anteriores.
5) De 10 temas se van a elegir, al azar, 3 para un examen.
   a) ¿Cuántas elecciones posibles se pueden realizar? *(0,5 puntos)*
   b) ¿En cuántas de ellas no figuran ninguno de los temas 1, 2 ni 3? *(0,5 puntos)*
   c) Si de los tres temas que se eligen para el examen sólo me he estudiado los temas 1, 2 y 3, ¿cuál es la probabilidad de que me sepa, al menos, uno de los temas que salgan? *(0,5 puntos)*
6) Un recipiente contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas. Se extrae una bola al azar.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca? *(0,5 puntos)*
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra y esté marcada? *(0,5 puntos)*

2) *(Sólo para los que tienen suspendidas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Factorizar el polinomio $12x^3 - 44x^2 - 3x + 35$ *(1 punto)*
3) *(Sólo para los que tienen suspendidas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Clasificar y resolver aplicando *exclusivamente* el método de Gauss en su forma matricial, el sistema siguiente: *(1 punto)*

$$\left.\begin{array}{r} x+3y-z=2 \\ -2x+3y+2z=5 \\ 3x-3z=-3 \end{array}\right\}$$

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*
   a) $y = (3x-5)e^{7x}$
   $y' = 3e^{7x} + (3x-5)\cdot 7e^{7x} = e^{7x}[3+(3x-5)7] = e^{7x}(3+21x-35) = \boxed{e^{7x}(21x-32)}$

   b) $y = (x^2+3x-1)^5$
   $y' = 5(x^2+3x-1)^4(2x+3) = \boxed{(10x+15)(x^2+3x-1)^4}$

   c) $y = \ln\sqrt[5]{\dfrac{3x-2}{3x+2}}$
   Simplificamos antes de derivar, aplicando propiedades de logaritmos:
   $$y = \ln\sqrt[5]{\frac{3x-2}{3x+2}} = \frac{1}{5}\ln\frac{3x-2}{3x+2} = \frac{1}{5}\left[\ln(3x-2)-\ln(3x+2)\right]$$
   Derivando:
   $$y' = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{3x-2}-\frac{3}{3x+2}\right) =$$
   Podría terminarse aquí, pero dada la similitud de las dos fracciones y que el mcm de los denominadores contendrá una suma por diferencia y será, por tanto, fácil de obtener, continuamos:
   $$= \frac{1}{5}\left(\frac{3(3x+2)-3(3x-2)}{(3x)^2-2^2}\right) = \frac{1}{5}\frac{9x+6-9x+6}{9x^2-4} = \boxed{\frac{1}{5}\frac{12}{9x^2-4}}$$

2) *(Sólo para los que tienen aprobadas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Desarrollar y simplificar, aplicando la fórmula del *Binomio de Newton*: $(2x-3)^4$ *(1 punto)*
$$(2x-3)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 - \binom{4}{1}(2x)^3 3 + \binom{4}{2}(2x)^2 3^2 - \binom{4}{3}2x\cdot 3^3 + \binom{4}{4}3^4 =$$
$$= 1\cdot 2^4x^4 - 4\cdot 2^3x^3\cdot 3 + 6\cdot 2^2x^2\cdot 9 - 4\cdot 2x\cdot 27 + 1\cdot 81 =$$
$$= \boxed{16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81}$$

3) *(Sólo para los que tienen aprobadas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = -x^3 + 2x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$. *(1 punto)*
   - Punto de tangencia: Si $x = 2 \Rightarrow y = -2^3 + 2\cdot 2^2 = -8+8 = 0$. Es (2, 0)
   - Pendiente de la tangente: Derivando, tenemos que $y' = -3x^2 + 4x$. Por tanto, $m = f'(2) = -3\cdot 2^2 + 4\cdot 2 = -12 + 8 = -4$.
   - Recta tangente buscada: $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -4(x-2) \Rightarrow$
     $\Rightarrow \boxed{y = -4x + 8}$

4) Dada la función $y = \dfrac{2+x}{2x-2}$, se pide: *(4 puntos)*
   a) Dominio. Intersecciones con los ejes. Asíntotas.
      - Dominio: No se puede anular el denominador. Y eso ocurre si $2x-2 = 0$ $\Rightarrow x = 1 \Rightarrow \boxed{D(f) = R - \{1\}}$
      - Intersecciones con los ejes:
        - $x = 0 \Rightarrow y = 1/(-2) = -1 \Rightarrow \boxed{(0, -1)}$

- $y = 0 \;\Rightarrow\; 0 = \dfrac{2+x}{2x-2} \;\Rightarrow$ Para que un cociente se anule, el numerador debe ser 0 y, de las soluciones que encontremos, desechamos las que anulen el denominador: $2 + x = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$, que no anula el denominador $\Rightarrow \boxed{(-2, 0)}$.

- Asíntotas
  - AV: Como la única discontinuidad está en $x = 2$, probamos únicamente dicho valor: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2+x}{2x-2} = \left(\dfrac{3}{0}\right) = \infty \;\Rightarrow\; \boxed{x = 1 \text{ es AV}}$.
    Si calculásemos los límites laterales, tendríamos más información sobre la posición de la curva respecto de la asíntota encontrada, pero la monotonía también nos proporcionará dicha información.
  - AH: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+x}{2x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{y = \dfrac{1}{2} \text{ es AH}}$. En el cálculo del límite hemos considerado que 2 es despreciable frente a infinito, en el numerador, y que 2 lo es frente a infinito, en el denominador.
  - AO: Si intentásemos calcularla, saldría la asíntota horizontal que ya tenemos.

b) Monotonía y extremos relativos.
Necesitamos la función derivada:

$$f'(x) = \frac{1\cdot(2x-2)-(2+x)2}{(2x-2)^2} = \frac{2x-2-4-2x}{(2x-2)^2} = \boxed{\frac{-6}{(2x-2)^2}}$$

- Discontinuidades de f ó de f': Ya sabemos que $x = 1$ es discontinuidad de f. Si anulamos el denominador de f':
  $(2x-2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; (2x-2)(2x-2) = 0 \;\Rightarrow\; 2x-2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$
  puesto que un producto vale 0 si, y sólo si alguno de los factores vale 0.
- $f'(x) = 0$: Como antes dijimos, debe ser 0 el numerador, y no hay valor de x que haga que $-6 = 0$. No tiene solución.

Dividimos R en intervalos mediante el único punto obtenido:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	–	∄	–
f	↘	∄	↘

La función siempre es decreciente y no tiene extremos relativos.

c) Curvatura y puntos de inflexión.
Necesitamos la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{0-(-6)\cdot 2(2x-2)\cdot 2}{(2x-2)^4} = \boxed{\frac{24}{(2x-2)^3}}$$

- Discont. de f ó de f' ó de f'': $x = 1$.
- $f''(x) = 0$: No es posible conseguir que $24 = 0 \;\Rightarrow$ No tiene solución.

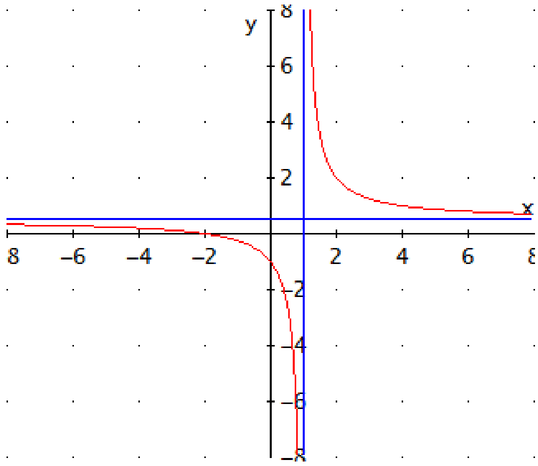
Dividimos R en intervalos mediante el único punto obtenido:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f''	–	∄	+
f	∩	∄	∪

No tiene puntos de inflexión.

d) Gráfica, usando la información obtenida en los puntos anteriores.

Dibujamos las dos asíntotas (en azul). Señalamos los puntos de corte con los ejes. Con esta información y la de la monotonía y curvatura, teniendo presente que la función debe acercarse a cada asíntota por uno de sus lados cuando nos alejamos del origen de coordenadas, la gráfica no puede ser otra que la del gráfico adjunto. Si aún dudamos, usamos alguna pequeña tabla de valores para salir de dudas. Si encontrásemos incongruencias, es que hemos realizado mal alguno de los cálculos previos.



5) De 10 temas se van a elegir, al azar, 3 para un examen.

a) ¿Cuántas elecciones posibles se pueden realizar? *(0,5 puntos)*

No entran todos los elementos en todos los grupos $\Rightarrow$ No son permutaciones.
El orden no influye: Cada grupo consta de 3 temas, y es indiferente el orden en que se enumeren.
No se puede repetir el mismo tema en un mismo examen.
Por tanto, se trata de *combinaciones*.

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \boxed{120}$$

b) ¿En cuántas de ellas no figuran ninguno de los temas 1, 2 ni 3? *(0,5 puntos)*

Las reglas de formación son las mismas, pero disponemos de 3 temas menos para formar el examen, ya que del 1 al 3 no son elegibles. Por tanto, son:

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \boxed{35}$$

c) Si de los tres temas que se eligen para el examen sólo me he estudiado los temas 1, 2 y 3, ¿cuál es la probabilidad de que me sepa, al menos, uno de los temas que salgan? *(0,5 puntos)*

$$P(\text{saberse al menos un tema}) = 1 - P(\text{no saberse ninguno}) = 1 - \frac{35}{120} =$$

$$= \frac{85}{120} = \boxed{\frac{17}{24} = 0.7083}$$

puesto que los grupos en los que no sale ninguno de los temas que nos sabemos son 35 de un total de 120. En tantos por ciento, serían 70,83%.
Otra forma de hacerlo sería considerando que si de 120 exámenes posibles hay 35 en los que no sabemos ningún tema, hay 120 – 35 = 85 exámenes en los que nos sabemos alguno.

6) Un recipiente contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas. Se extrae una bola al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca? *(0,5 puntos)*

Como hay 25 + 75 = 100 bolas blancas de un total de 25 +75 +125 +175 = 400 bolas, por la Regla de Laplace:

$$P(\text{blanca}) = \frac{100}{400} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra y esté marcada? *(0,5 puntos)*

Hay 175 bolas negras marcadas de un total de 400:

$$P(\text{negra} \cap \text{marcada}) = \frac{175}{400} = \boxed{\frac{7}{16} = 0.4375}$$

El problema se puede resolver construyendo un árbol, pero no es necesario, puesto que resulta inmediato por Laplace.

2) *(Sólo para los que tienen suspendidas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Factorizar el polinomio $12x^3 - 44x^2 - 3x + 35$ *(1 punto)*

Intentamos hacerlo por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 12 & -44 & -3 & 35 \\ 1 & & 12 & -32 & -35 \\ \hline & 12 & -32 & -35 & \boxed{0} \end{array}$$

Pero aquí no encontramos la forma de seguir. Igualamos el polinomio cociente a cero e intentamos resolver la ecuación de segundo grado resultante para ver si tiene más raíces:

$$12x^2 - 32x - 35 = 0 \Rightarrow x = \frac{32 \pm \sqrt{1024+1680}}{24} = \frac{32 \pm 52}{24} = \begin{cases} = \dfrac{-20}{24} = -\dfrac{5}{6} \\ = \dfrac{84}{24} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Por tanto: $\boxed{12x^3 - 44x^2 - 3x + 35 = 12(x-1)\left(x-\frac{7}{2}\right)\left(x+\frac{5}{6}\right)}$

3) *(Sólo para los que tienen suspendidas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Clasificar y resolver aplicando *exclusivamente* el método de Gauss en su forma matricial, el sistema siguiente: *(1 punto)*

$$\left.\begin{array}{r} x+3y-z=2 \\ -2x+3y+2z=5 \\ 3x-3z=-3 \end{array}\right\}$$

Trabajamos con la matriz ampliada. El proceso más corto para triangularizar consiste en elegir una fila y, a partir de ella y mediante combinaciones lineales de filas, conseguir que todas las posiciones de una columna sean 0 salvo la de esa fila (en el primer paso, elegiremos la fila 1 y columna 2). En el paso siguiente, ignorando la fila del paso anterior, elegimos otra fila y otra columna y repetimos el proceso. Habrá que dar tantos pasos como filas haya menos una: en nuestro caso, 3 – 1 = 2, con lo que estará garantizada la triangularización:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la tercera fila es de 0, la eliminamos. Las dos filas restantes corresponden a un sistema ya triangularizado, pero con dos ecuaciones y tres incógnitas. Por tanto, al estar triangularizado y tener menos ecuaciones que incógnitas, lo que tenemos es un $\boxed{\textit{sistema compatible indeterminado}}$, con infinitas soluciones. Pasamos, por ejemplo z al segundo miembro; a partir de ahora, actuará de parámetro: $z = t$, suponiendo t un número conocido, cuyo valor determinamos nosotros a nuestro antojo (también podríamos haber pasado x al segundo miembro, pero no deberíamos hacerlo con y o tendremos un trabajo extra). La 2ª ecuación, además, puede simplificarse entre 3:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y-z=2 \\ -3x\qquad +3z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y=2+z \\ -x=1-z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y=2+t \\ -x=1-t \end{array}\right\}$$

La 2ª ecuación nos da el valor de x: $x = t - 1$. Sustituyéndolo en la 1ª y despejando:

$$t - 1 + 3y = 2 + t \;\Rightarrow\; 3y = 2 + t - t + 1 = 3 \;\Rightarrow\; y = 1$$

Las infinitas soluciones, dependientes del valor que, para cada una de ellas, elijamos para t, son:

$$\boxed{(x = t - 1,\ y = 1,\ z = t)}$$

Tercer trimestre – 1º Bach CCSS **12 de Junio de 2013**
Recuperación 3ª evaluación

NOMBRE: ____

Importante: Para aprobar el examen se requiere obtener, al menos, 1 punto en la pregunta número 1

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*
   a) $y = xe^{7x^2+5}$
   b) $y = (4x^2 + 2x - 1)^5$
   c) $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{(4x-1)^2}{4x+1}}$
2) Clasificar y resolver aplicando *exclusivamente* el método de Gauss en su forma matricial, el sistema siguiente: *(1 punto)*

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 2 \\ x + y - \quad z = 1 \\ 2x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$$

3) Hallar el dominio de $f(x) = \sqrt{-15x^3 + 68x^2 - x - 52}$ *(1,5 puntos)*
4) Dada la función $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, se pide: *(2,5 puntos)*
   a) Dominio. Intersecciones con los ejes. Asíntotas.
   b) Monotonía y extremos relativos.
   c) Gráfica, usando la información obtenida en los puntos anteriores.
5) Desarrollar y simplificar, usando el *Binomio de Newton*: $(4x - 1)^4$ *(1 punto)*
6) El 30% de los aparatos que llegan a un servicio técnico para ser reparados están en garantía. De los que no están en garantía, el 20% ya fueron reparados en otra ocasión. De los que sí están en garantía, el 5% fue reparado con anterioridad. Elegido un aparato al azar, hallar:
   a) Probabilidad de que haya sido reparado anteriormente. *(0,5 puntos)*
   b) Probabilidad de que el aparato no haya sido reparado anteriormente y no esté en garantía. *(0,5 puntos)*
7) Un examen tipo test consta de 40 preguntas. Cada una de ellas tiene 5 respuestas posibles de las que sólo una es correcta. Si se responde al azar, calcular: *(1,5 puntos)*
   a) La probabilidad de obtener 20 respuestas correctas en el examen.
   b) La media de respuestas correctas que cabe esperarse. Desviación típica.
   c) Probabilidad de acertar 10 o más respuestas.

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

a) $y = xe^{7x^2+5}$

$$y' = 1\cdot e^{7x^2+5} + x\cdot 14x\, e^{7x^2+5} = \boxed{e^{7x^2+5}(1+14x^2)}$$

b) $y = (4x^2+2x-1)^5$

$$y' = 5(4x^2+2x-1)^4(8x+2) = \boxed{(40x+10)(4x^2+2x-1)^4}$$

c) $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{(4x-1)^2}{4x+1}}$

Simplificamos antes de proceder a derivar, aplicando propiedades de logaritmos:

$$y = \frac{1}{3}\ln\frac{(4x-1)^2}{4x+1} = \frac{1}{3}\left[\ln(4x-1)^2 - \ln(4x+1)\right] = \frac{1}{3}\left[2\ln(4x-1) - \ln(4x+1)\right]$$

Ya no podemos simplificar más, porque no puede hacerse con el logaritmo de una suma o resta. Derivando:

$$y' = \frac{1}{3}\left(2\frac{4}{4x-1} - \frac{4}{4x+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{4x-1} - \frac{4}{4x+1}\right)$$

que podría terminarse aquí, pero que vamos a simplificar teniendo en cuenta que el mcm de los denominadores es fácil de calcular, por tratarse de una *suma por diferencia*:

$$= \frac{1}{3}\frac{8(4x+1)-4(4x-1)}{(4x-1)(4x+1)} = \frac{1}{3}\frac{32x+8-16x+4}{(4x)^2-1^2} = \boxed{\frac{1}{3}\cdot\frac{16x+12}{16x^2-1}}$$

2) Clasificar y resolver aplicando *exclusivamente* el método de Gauss en su forma matricial, el sistema siguiente: *(1 punto)*

$$\begin{cases} 3x+y-2z=2 \\ x+y-\ \ z=1 \\ 2x-2y-3z=3 \end{cases}$$

Trabajamos con la matriz ampliada. El proceso más corto para triangularizar consiste en elegir una fila y, a partir de ella y mediante combinaciones lineales de filas, conseguir que todas las posiciones de una columna sean 0 salvo la de esa fila (en el primer paso, elegiremos la fila 1 y columna 2). En el paso siguiente, ignorando la fila del paso anterior, elegimos otra fila y otra columna y repetimos el proceso. Habrá que dar tantos pasos como filas haya menos una: en nuestro caso, 3 – 1 = 2, con lo que estará garantizada la triangularización:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 3 \\ 8 & 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-4F_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -19 & 19 \end{pmatrix}$$

El sistema es $\boxed{\text{compatible determinado}}$.

De la última ecuación obtenemos: $-19z = 19 \Rightarrow z = -1$

Sustituyendo en la 2ª: $2x - 3(-1) = 3 \Rightarrow 2x + 3 = 3 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

Sustituyendo en la 1ª: $0 + y - 2(-1) = 2 \Rightarrow y + 2 = 2 \Rightarrow y = 0$

$\boxed{\text{La única solución es: } (0, 0, -1)}$.

3) Hallar el dominio de $f(x) = \sqrt{-15x^3 + 68x^2 - x - 52}$ *(1,5 puntos)*

Existirá imagen cuando $-15x^3 + 68x^2 - x - 52 \geq 0$. Para resolver esta inecuación, factorizamos el polinomio:

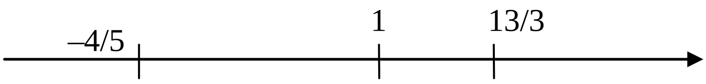
	– 15	68	– 1	– 52
1		– 15	53	52
	– 15	53	52	0

Pero aquí no encontramos la forma de seguir. Igualamos el polinomio cociente a cero e intentamos resolver la ecuación de segundo grado resultante para ver si tiene más raíces (multiplicamos los dos miembros por –1 para que nos resulte más cómoda la resolución de dicha ecuación de segundo grado):

$$15x^2 - 53x - 52 = 0 \Rightarrow x = \frac{53 \pm \sqrt{2809+3120}}{30} = \frac{53 \pm 77}{30} = \begin{cases} = \dfrac{-24}{30} = -\dfrac{4}{5} \\ = \dfrac{130}{30} = \dfrac{13}{3} \end{cases}$$

Por tanto: $-15x^3 + 68x^2 - x - 52 = -15(x-1)\left(x+\frac{4}{5}\right)\left(x-\frac{13}{3}\right)$. Así que la inecuación a resolver es: $-15(x-1)\left(x+\frac{4}{5}\right)\left(x-\frac{13}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{(x-1)\left(x+\frac{4}{5}\right)\left(x-\frac{13}{3}\right) \leq 0}$.

Porque al pasar -15 dividiendo al segundo miembro de la inecuación, ésta cambia de sentido, al ser -15 negativo. Dividimos R en intervalos mediante las raíces obtenidas:



	$(-\infty, -4/5)$	$-4/5$	$(-4/5, 1)$	1	$(1, 13/3)$	$13/3$	$(13/3, +\infty)$
$x + 4/5$	–	0	+	…	+	…	+
$x - 1$	–	…	–	0	+	…	+
$x - 13/3$	–	…	–	…	–	0	+
$(x-1)\left(x+\frac{4}{5}\right)\left(x-\frac{13}{3}\right)$	–	0	+	0	–	0	+
¿Sirven? →	Si	Si	No	Si	Si	Si	No

Por tanto: $\boxed{D(f) = (-\infty, -4/5] \cup [1, 13/3]}$.

4) Dada la función $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, se pide: *(2,5 puntos)*

a) Dominio. Intersecciones con los ejes. Asíntotas.

- Dominio: No se puede dividir entre 0, por lo que no estarán en el dominio los valores de x que verifiquen que $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Por tanto, $\boxed{D(f) = R - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)}$.
- Cortes con los ejes:
  - $x = 0 \Rightarrow y = 0/(-1) = 0$: $\boxed{(0, 0)}$.
  - $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{x}{x^2 - 1} \Rightarrow x = 0$, porque para que una fracción se anule, el numerador debe ser 0, sin que las soluciones obtenidas anulen el denominador.

- Asíntotas.
    - Verticales: Hay que calcular el límite en los puntos de discontinuidad, que son dos:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2-1}=\left(\frac{-1}{1-1}\right)=\left(\frac{-1}{0}\right)=\infty \Rightarrow \text{ La recta } \boxed{x=-1} \text{ es AV}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}=\left(\frac{1}{1-1}\right)=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty \Rightarrow \text{ La recta } \boxed{x=1} \text{ es AV}$$

Los dos infinitos obtenidos son *sin signo*. Con los límites laterales se obtendrían los signos respectivos, lo que daría información sobre la dirección de la curva cerca de la asíntota respectivas, pero también obtendremos dicha información cuando estudiemos la monotonía.

- Horizontal: $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0 \Rightarrow$ La recta $\boxed{y=0}$ es AH.
- Oblicua: Si intentamos calcularla, volveremos a obtener la asíntota horizontal que ya conocemos.

b) Monotonía y extremos relativos.

- Monotonía.

$$y'=\frac{1(x^2-1)-x2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\boxed{\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}}$$

- Discontinuidades de f o de f': 1 y –1, que anulan los denominadores de ambas.
- $f'(x)=0$: $\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}=0 \Rightarrow -x^2-1=0 \Rightarrow -1=x^2$, sin solución.

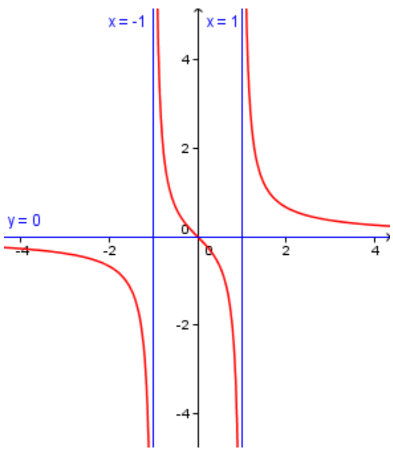
Dividimos R en intervalos mediante los puntos obtenidos y construimos el siguiente cuadro:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	–	∄	–	∄	–
f	↘	∄	↘	∄	↘

$\boxed{\text{No tiene extremos relativos}}$.

c) Gráfica, usando la información obtenida en los puntos anteriores.

No hemos calculado la curvatura, pero teniendo en cuenta la monotonía, las asíntotas y los cortes con los ejes podemos trazar la gráfica con bastante aproximación. Deducimos, además, que en $x = 0$ debe tener un *punto de inflexión*, porque debe descender de una asíntota vertical a la otra pasando por (0, 0). La gráfica es la adjunta, donde las asíntotas se han trazado en azul.



5) Desarrollar y simplificar, usando el *Binomio de Newton*: $(4x-1)^4$ *(1 punto)*

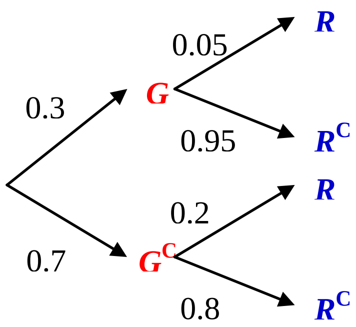
$$(4x-1)^4=\binom{4}{0}(4x)^4-\binom{4}{1}(4x)^3 1+\binom{4}{2}(4x)^2 1^2-\binom{4}{3}4x1^3+\binom{4}{4}1^4=$$

$$=1\cdot 4^4x^4-4\cdot 4^3x^3+6\cdot 4^2x^2-4\cdot 4x+1=\boxed{256x^4-256x^3+96x^2-16x+1}$$

6) El 30% de los aparatos que llegan a un servicio técnico para ser reparados están en garantía. De los que no están en garantía, el 20% ya fueron reparados en otra ocasión. De los que sí están en garantía, el 5% fue reparado con anterioridad. Elegido un aparato al azar, hallar:

a) Probabilidad de que haya sido reparado anteriormente. *(0,5 puntos)*

Tenemos dos experimentos aleatorios relacionados: El primero, con resultados *Estar en garantía* (lo llamaremos G) o *no estarlo* (G^c) y *Haber sido reparado con anterioridad* (R), *o no* (R^c). Es, por tanto, un problema susceptible de ser tratado a través de un diagrama de árbol. Lo construimos a la izquierda de este texto, teniendo en cuenta que la probabilidad que se pone *en cada rama* es la del suceso *terminal* de la misma *condicionado* a que se verifique el suceso *inicial*. Completamos dichas probabilidades con los datos del enunciado, recordando que *las probabilidades de todas las ramas que parten de un mismo punto deben sumar 1*.



Según el *Teorema de la Probabilidad Total*, la probabilidad de un suceso terminal del árbol (R), sin condicionar a nada, es la suma de los productos de las distintas ramas que conducen a cada aparición de dicho suceso. Es decir:

$$P(R) = 0.3 \cdot 0.05 + 0.7 \cdot 0.2 = \boxed{0.155}$$

b) Probabilidad de que el aparato no haya sido reparado anteriormente y no esté en garantía. *(0,5 puntos)*

Nos piden la probabilidad de una intersección ("*y*"). Dicha probabilidad es el producto de todas las ramas que contienen los sucesos implicados, desde la izquierda a la derecha del árbol:

$$P(G^c \cap R^c) = 0.7 \cdot 0.8 = \boxed{0.56}$$

7) Un examen tipo test consta de 40 preguntas. Cada una de ellas tiene 5 respuestas posibles de las que sólo una es correcta. Si se responde al azar, calcular: *(1,5 puntos)*

a) La probabilidad de obtener 20 respuestas correctas en el examen.

Trabajaremos con la variable aleatoria:

X = *nº de respuestas acertadas de entre las 40.*

Para cada pregunta podemos considerar dos posibles resultados: *acertarla* ("éxito"), con probabilidad $p = 1/5$ (si se hace al azar), y *fallarla* ("fracaso"), con probabilidad $q = 1 - p = 4/5$. Dichas probabilidades no cambian de una respuesta a otra, con lo que estamos ante una distribución binomial:

$$X \sim \mathrm{B}(40;\ 0.2)$$

Por tanto:

$$P(X = 20) = \binom{40}{20} 0.2^{20} 0.8^{20} = \frac{40!}{20! \cdot (40-20)!} 0.2^{20} 0.8^{20} = \boxed{0{,}00001667}$$

b) La media de respuestas correctas que cabe esperarse. Desviación típica.

La media poblacional de la binomial es:

$$\mu = n \cdot p = 40 \cdot 0{,}2 = \boxed{8}$$

La desviación típica: $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{40 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \boxed{2{,}5298}$

c) Probabilidad de acertar 10 o más respuestas.

Nos piden $P(X \geq 10)$. Esto nos requerirá 31 sumandos como los del apartado *a*. Por tanto, nos será más cómodo *aproximar la Binomial mediante una Normal*. Así, consideraremos $\boxed{X \sim N(8;\ 2.5298)}$, según el apartado anterior.

Dicha aproximación puede hacerse con éxito, puesto que cumple las tres condiciones que se necesitan:

1. $n \geq 30$: $n = 40$.
2. $n\cdot p \geq 5$: $n\cdot p = 40\cdot 0{,}2 = 8$
3. $n\cdot q \geq 5$: $n\cdot q = 40\cdot 0{,}8 = 32$

Por otra parte, la aproximación de una variable aleatoria discreta por una continua requiere redondear cada número entero desde media unidad menos hasta media unidad más. Por tanto:

$$P(X \geq 10) = P(X \geq 9.5) = \text{(tipificando)} = P\left(\frac{X-8}{2.5298} \geq \frac{9.5-8}{2.5298}\right) = P(Z \geq 0.59) =$$

$$= 1 - P(Z < 0.59) = 1 - 0.7224 = \boxed{0{,}2776}$$

Donde hemos pasado al suceso contrario de $P(Z \geq 0.59)$, ya que las tablas de la N(0; 1) nos requieren tener expresiones del tipo $P(Z \leq k)$. Además, $P(Z \leq k) = P(Z < k)$, puesto que en una distribución *continua* $P(Z = k) = 0$.

Para tener idea de la bondad de la aproximación, hemos calculado el resultado de los 31 sumandos usando la binomial original, y nos da 0,2682.