IES Fernando de Herrera
Tercer trimestre – 1º Bach CCSS – Primer examen **28 de Abril de 2014**

NOMBRE: ____

Importante: Para aprobar el examen se requiere obtener, al menos, 1 punto en la pregunta número 1. De lo contrario, la calificación máxima es 4,4.

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*
   a) $y = 2x^5 e^{4x-1}$
   b) $y = \ln\sqrt[3]{6-5x^2}$
   c) $y = (2x^3 - 3)^3$
2) De un grupo de 20 alumnos se van a escoger a 5 para representar a la clase en una reunión. ¿De cuántas formas puede realizarse la elección, y en cuántas de ellas figura una determinada chica? *(1 punto)*
3) Desarrollar usando la fórmula del *Binomio de Newton*: $(-2x + 3x^2)^4$. *(1,5 puntos)*
4) Si formamos al azar un número de cuatro cifras distintas con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5 (no valen, pues, los que empiecen por 0, porque serían de tres cifras), ¿cuál es la probabilidad de que empiece por 1? *(1,5 puntos)*
5) Dada la función $y = \dfrac{x^2-9}{x-1}$, se pide:
   a) Dominio. Ver si es Par o Impar. Cortes con los ejes. Asíntotas. *(1 punto)*
   b) Monotonía y extremos relativos. *(1 punto)*
   c) Curvatura y puntos de inflexión. *(1 punto)*
   d) Gráfica, usando la información obtenida en los puntos anteriores. *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

a) $y = 2x^5e^{4x-1}$

$$y' = 10x^4e^{4x-1} + 2x^5\cdot 4e^{4x-1} = \boxed{2e^{4x-1}(5x^4 + 4x^5)}$$

b) $y = \ln\sqrt[3]{6-5x^2}$

Simplificamos antes de derivar:

$$y = \ln\sqrt[3]{6-5x^2} = \frac{1}{3}\ln(6-5x^2) \Rightarrow y' = \frac{1}{3}\frac{-10x}{6-5x^2} = \boxed{\frac{1}{3}\frac{10x}{5x^2-6}}$$

c) $y = (2x^3-3)^3$

$$y' = 3(2x^3-3)^2 6x^2 = \boxed{18x^2(2x^3-3)^2}$$

2) De un grupo de 20 alumnos se van a escoger a 5 para representar a la clase en una reunión. ¿De cuántas formas puede realizarse la elección, y en cuántas de ellas figura una determinada chica? *(1 punto)*

Elementos disponibles para formar grupos: $m = 20$. Los grupos son de $n = 5$ personas. No puede haber repeticiones en el mismo grupo y el orden dentro del grupo no influye. Son, pues *combinaciones*:

$$C_{20,5} = \binom{20}{5} = \frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{5!} = \boxed{15504}$$

Si una determinada chica ya está en el grupo, hay $m = 19$ elementos disponibles para completar $n = 4$ posiciones. Luego son:

$$C_{19,4} = \binom{19}{4} = \frac{19\cdot18\cdot17\cdot16}{4!} = \boxed{3876}$$

3) Desarrollar usando la fórmula del *Binomio de Newton*: $(-2x + 3x^2)^4$. *(1,5 puntos)*

$(-2x + 3x^2)^4 = (3x^2 - 2x)^4 =$

$$= \binom{4}{0}(3x^2)^4 - \binom{4}{1}(3x^2)^3 2x + \binom{4}{2}(3x^2)^2(2x)^2 - \binom{4}{3}3x^2(2x)^3 + \binom{4}{4}(2x)^4 =$$

$$= 81x^8 - 4\cdot27\cdot2x^6x + 6\cdot9\cdot4x^4x^2 - 4\cdot3\cdot8x^2x^3 + 16x^4 =$$

$$= \boxed{81x^8 - 216x^7 + 216x^6 - 96x^5 + 16x^4}$$

4) Si formamos al azar un número de cuatro cifras distintas con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5 (no valen, pues, los que empiecen por 0, porque serían de tres cifras), ¿cuál es la probabilidad de que empiece por 1? *(1,5 puntos)*

Veamos cuántos números se pueden formar. Tenemos $m = 6$ elementos disponibles para formar grupos de $n = 4$ cifras que no se pueden repetir e importando el orden: $V_{6,4} = 6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360$. De ellos, empiezan por 0: $V_{5,3} = 5\cdot4\cdot3 = 60$, porque hay 3 lugares y un elemento menos disponible (el 0). Luego los casos posibles son: $360 - 60 = 300$.

Los que empiezan por 1 se calculan igual, pero con sólo tres lugares para rellenar y un elemento disponible menos (el 1): $V_{5,3} = 5\cdot4\cdot3 = 60$.

Por tanto, si A es el suceso pedido, por Laplace: $P(A) = \dfrac{60}{300} = \boxed{\dfrac{1}{5} = 0.2}$

5) Dada la función $y = \dfrac{x^2-9}{x-1}$, se pide:

a) Dominio. Ver si es Par o Impar. Cortes con los ejes. Asíntotas. *(1 punto)*

1) $\boxed{D(f) = R - \{1\}}$, porque el denominador no se puede anular.

2) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2-9}{(-x)-1} = \dfrac{x^2-9}{-x-1} = -\dfrac{x^2-9}{x+1}$, que no coincide ni con $f(x)$ ni con $-f(x)$, por lo que $\boxed{\text{no es par ni impar}}$.

3) Si $x = 0 \Rightarrow y = 9$. $\boxed{\text{Corta en } (0, 9)}$.
Si $y = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$ no siendo válidas las soluciones que anulen, también, al denominador $\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$, que son válidas: $\boxed{(-3, 0) \text{ y } (3, 0)}$.

4) <u>Asíntotas verticales</u>: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-9}{x-1} = \left(\dfrac{-8}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{x = 1 \text{ es A.V.}}$

<u>Asíntota horizontal</u>: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-9}{x-1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$. $\boxed{\text{No tiene}}$.

<u>Asíntota oblicua</u>: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^2-9}{x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-9}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-9}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-9-x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-9-x^2+x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x-9}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \boxed{y = x + 1 \text{ es A.O.}}$$

b) Monotonía y extremos relativos. *(1 punto)*

$$y' = \frac{2x(x-1)-(x^2-9)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2+9}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{x^2-2x+9}{(x-1)^2}}$$

- <u>Discontinuidades de f ó f'</u>: $x = 1$, que anula los denominadores de ambas.
- <u>$f'(x) = 0$</u>: $x^2 - 2x + 9 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-36}}{2}$, sin solución.

Dividimos el dominio mediante los puntos obtenidos (sólo $x = 1$):

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	+	∄	+
f	↗	∄	↗

$\boxed{\text{No tiene máximos ni mínimos relativos}}$.

c) Curvatura y puntos de inflexión. *(1 punto)*

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x+9)2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)[(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+9)2]}{(x-1)^4} = \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x-18}{(x-1)^3} =$$

$$= \boxed{\frac{-16}{(x-1)^3}}$$

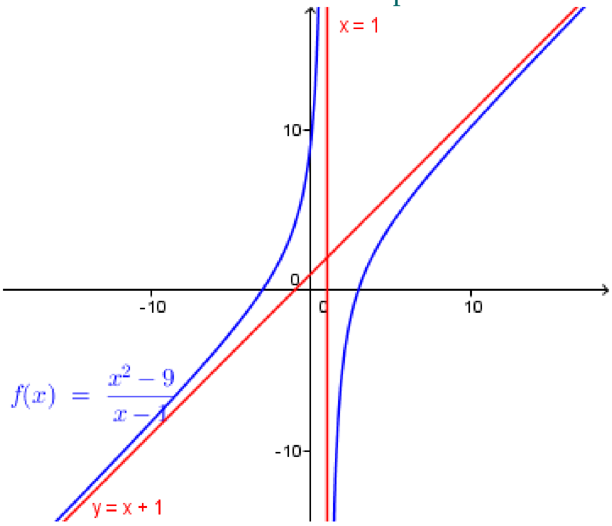
- <u>Discontinuidades de f, f' ó f''</u>: $x = 1$, que anula los denominadores.
- <u>$f''(x) = 0$</u>: $-16 = 0$, sin solución.

Dividimos el dominio mediante los puntos obtenidos (sólo $x = 1$):

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f''	+	∄	–
f	∪ **convexa**	∄	∩ **cóncava**

No tiene puntos de inflexión.

d) Gráfica, usando la información obtenida en los puntos anteriores. *(1,5 puntos)*



IES Fernando de Herrera
Tercer trimestre – 1º Bach CCSS –Examen Global **19 de Mayo de 2014**

NOMBRE: ____
1ª y 2ª EVALUACIÓN: ☐ APROBADAS ☐ SUSPENDIDAS

Importante: Para aprobar el examen se requiere obtener, al menos, 1 punto en la pregunta número 1. De lo contrario, la calificación máxima es 4,4.

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*
   a) $y = (2x + 5)e^{3x}$
   b) $y = (3x^2 + 5x - 1)^6$
   c) $y = 3^{2x}\ln(2x^3 - 1)$
2) *(Sólo para los que tienen aprobadas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Desarrollar y simplificar, aplicando la fórmula del *Binomio de Newton*: $(3x^2 - 2)^4$ *(1 punto)*
3) *(Sólo para los que tienen aprobadas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Dados los sucesos A y B, de los que se sabe que $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.7$ y $P(A \cup B) = 0.94$, hallar $P(A/B)$ y decir si A y B son independientes. *(1 punto)*
4) *(Sólo para los que tienen aprobadas las evaluaciones 1ª y 2ª)* La probabilidad de nacimiento de una niña en una determinada población es de 0,6. Hallar:
   a) La probabilidad de que, de 10 nacimientos, nazcan exactamente 5 niñas *(0,5 p)*
   b) La media de niñas que cabría esperar en series de 10 bebés recién nacidos. *(0,5 p)*
5) Dada la función $y = \dfrac{1+2x}{x-2}$, se pide: *(0,5+0,7+0,8+1 puntos)*
   a) Dominio. Intersecciones con los ejes. Asíntotas.
   b) Monotonía y extremos relativos.
   c) Curvatura y puntos de inflexión.
   d) Gráfica, usando la información obtenida en los puntos anteriores.
6) De 10 personas se van a elegir 4 para trabajar en una empresa.
   a) ¿Cuántas elecciones posibles se pueden realizar? *(0,5 puntos)*
   b) ¿En cuántas de ellas figura la persona A? *(0,5 puntos)*
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea contratada A? *(0,5 puntos)*
7) En un sistema de alarma, la probabilidad de que haya incidente es 0.1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma suene es 0.95. La probabilidad de que suene la alarma sin que haya incidente es de 0.03.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que suene la alarma? *(0,5 puntos)*
   b) Si ha sonado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido incidente? *(0,5 puntos)*

2) *(Sólo para los que tienen suspendidas las evaluaciones 1ª y 2ª)*
   a) Factorizar el polinomio $8x^3 + 6x^2 - 29x + 15$ *(0,5 puntos)*
   b) Hallar a para que $ax^3 + 6x^2 - 29x + 15$ de resto 1 al ser dividido entre $x + 2$. *(0,5 puntos)*
3) *(Sólo para los que tienen suspendidas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = x^3 - 4x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$. *(1 punto)*
4) *(Sólo para los que tienen suspendidas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Clasificar y resolver aplicando *exclusivamente* el método de Gauss en su forma matricial, el sistema siguiente: *(1 punto)*

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 6 \\ -2x + 3y + 2z = -3 \\ x - 6y - z = -3 \end{array}\right\}$$

1) Derivar y simplificar las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

a) $y = (2x + 5)e^{3x}$

$$y' = 2e^{3x} + (2x + 5)3e^{3x} = e^{3x}[2 + (2x + 5)3] = e^{3x}(2 + 6x + 15) = \boxed{e^{3x}(6x + 17)}$$

b) $y = (3x^2 + 5x - 1)^6$

$$y' = 6(3x^2 + 5x - 1)^5(6x + 5) = \boxed{(36x + 30)(3x^2 + 5x - 1)^5}$$

c) $y = 3^{2x}\ln(2x^3 - 1)$

$$y' = \boxed{2\cdot 3^{2x}\ln 3\ln(2x^3 - 1) + 3^{2x}\frac{6x^2}{2x^3 - 1}}$$

2) *(Sólo para los que tienen aprobadas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Desarrollar y simplificar, aplicando la fórmula del *Binomio de Newton*: $(3x^2 - 2)^4$ *(1 punto)*

$$(3x^2 - 2)^4 =$$

$$= \binom{4}{0}(3x^2)^4 - \binom{4}{1}(3x^2)^3 2 + \binom{4}{2}(3x^2)^2 2^2 - \binom{4}{3}(3x^2)2^3 + \binom{4}{4}2^4 =$$

$$= 1\cdot 3^4x^8 - 4\cdot 3^3x^6\cdot 2 + 6\cdot 3^2x^4\cdot 4 - 4\cdot 3x^2\cdot 8 + 1\cdot 16 =$$

$$= \boxed{81x^8 - 216x^6 + 216x^4 - 96x^2 + 16}$$

3) *(Sólo para los que tienen aprobadas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Dados los sucesos A y B, de los que se sabe que $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.7$ y $P(A\cup B) = 0.94$, hallar $P(A/B)$ y decir si A y B son independientes. *(1 punto)*

Sabemos que $P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, pero desconocemos $P(A\cap B)$.

Como $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$, despejando tenemos que:

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = 0.8 + 0.7 - 0.94 = 0.56$$

Por tanto:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.56}{0.7} = \boxed{0.8}$$

Como $P(A) = 0.8$, tenemos que $P(A/B) = P(A) \Rightarrow$ $\boxed{A \text{ y } B \text{ son independientes}}$.

4) *(Sólo para los que tienen aprobadas las evaluaciones 1ª y 2ª)* La probabilidad de nacimiento de una niña en una determinada población es de 0,6. Hallar:

a) La probabilidad de que, de 10 nacimientos, nazcan exactamente 5 niñas *(0,5 p)*

Cada uno de los 10 nacimientos es una prueba de Bernoulli, pues sólo caben dos posibilidades: niña o niño. Si llamamos *éxito* al nacimiento de una niña (que es en lo que nos estamos fijando), $p = 0.6$ (luego $q = 1 - p = 0.4$). Por tanto, si X = nº de niñas nacidas entre los 10 bebés, dado que mide los *éxitos* en 10 pruebas independientes de Bernoulli, $X \in B(10; 0.6)$. Por tanto:

$$P(X = 5) = \binom{10}{5}0.6^5 0.4^{10-5} = \boxed{0.2}$$

b) La media de niñas que cabría esperar en series de 10 bebés recién nacidos. *(0,5 p)*

La media de una binomial es $\mu = np = 10\cdot 0.6 = \boxed{6}$.

5) Dada la función $y = \frac{1+2x}{x-2}$, se pide:

a) Dominio. Intersecciones con los ejes. Asíntotas. *(0,5 puntos)*

- Dominio: No se puede anular el denominador. Y eso ocurre si $x - 2 = 0$ $\Rightarrow$ $x = 2$ $\Rightarrow$ $\boxed{D(f) = R - \{2\}}$
- Intersecciones con los ejes:
  - $x = 0 \Rightarrow y = 1/(-2) = -1/2 \Rightarrow \boxed{(0, -1/2)}$
  - $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1+2x}{x-2} \Rightarrow$ Para que un cociente se anule, el numerador debe ser 0 y, de las soluciones que encontremos, desechamos las que anulen el denominador: $1 + 2x = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -1/2$, que no anula el denominador $\Rightarrow \boxed{(-1/2, 0)}$.
- Asíntotas
  - AV: Como la única discontinuidad está en $x = 2$, probamos únicamente dicho valor: $\lim_{x\to 2} \frac{1+2x}{x-2} = \left(\frac{5}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{x = 2 \text{ es AV}}$. Si calculásemos los límites laterales, tendríamos más información sobre la posición de la curva respecto de la asíntota encontrada, pero la monotonía también nos proporcionará dicha información.
  - AH: $\lim_{x\to\infty} \frac{1+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \boxed{y = 2 \text{ es AH}}$. En el cálculo del límite hemos considerado que 1 es despreciable frente al doble de infinito, en el numerador, y que 2 lo es frente a infinito, en el denominador.
  - AO: Si intentásemos calcularla, saldría la asíntota horizontal que ya tenemos.

b) Monotonía y extremos relativos. *(0,7 puntos)*

Necesitamos la función derivada:

$$f'(x) = \frac{2(x-2)-(1+2x)}{(x-2)^2} = \frac{2x-4-1-2x}{(x-2)^2} = \boxed{\frac{-5}{(x-2)^2}}$$

- Discontinuidades de f ó de f': $x = 2$.
- $f'(x) = 0$: Como antes dijimos, debe ser 0 el numerador, y no hay valor de x que haga que $-5 = 0$. No tiene solución.

Dividimos R en intervalos mediante el único punto obtenido:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	–	$\nexists$	–
f	↘	$\nexists$	↘

La función siempre es decreciente y no tiene extremos relativos.

c) Curvatura y puntos de inflexión. *(0,8 puntos)*

Necesitamos la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{0-(-5)\cdot 2(x-2)\cdot 1}{(x-2)^4} = \boxed{\frac{10}{(x-2)^3}}$$

- Discont. de f ó de f' ó de f'': $x = 2$.
- $f''(x) = 0$: No es posible conseguir que $10 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución.

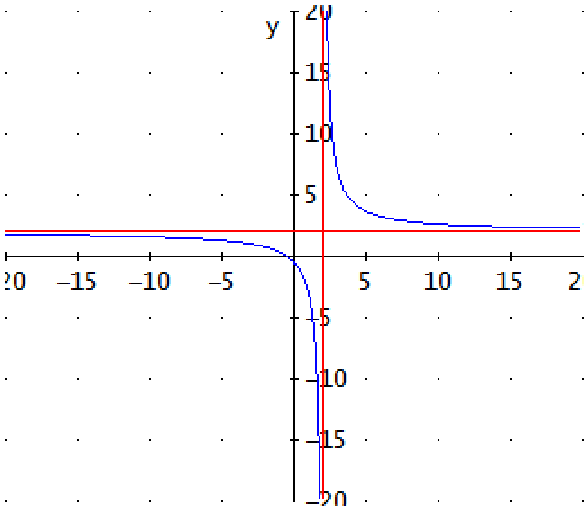
Dividimos R en intervalos mediante el único punto obtenido:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f''	–	$\nexists$	+
f	$\cap$ **Cóncava**	$\nexists$	$\cup$ **Convexa**

No tiene puntos de inflexión.

d) Gráfica, usando la información obtenida en los puntos anteriores. *(1 punto)*

Dibujamos las dos asíntotas. Señalamos los puntos de corte con los ejes. Con esta información y la de la monotonía y curvatura, teniendo presente que la función debe acercarse a cada asíntota por uno de sus lados cuando nos alejamos del origen de coordenadas, la gráfica no puede ser otra que la del gráfico adjunto, en el que las dos asíntotas figuran en color rojo. Si aún dudamos, usamos alguna pequeña tabla de valores para salir de dudas. Si encontrásemos incongruencias, es que hemos realizado mal alguno de los cálculos previos.



6) De 10 personas se van a elegir 4 para trabajar en una empresa.

a) ¿Cuántas elecciones posibles se pueden realizar? *(0,5 puntos)*

No entran todos los elementos en todos los grupos $\Rightarrow$ No son permutaciones.
El orden no influye: Cada grupo consta de 4 personas elegidas para el trabajo, y es indiferente el orden en que se enumeren.
No se puede repetir la misma persona en un mismo grupo.
Por tanto, se trata de *combinaciones*.

$$C_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \boxed{210}$$

b) ¿En cuántas de ellas figura la persona A? *(0,5 puntos)*

Si A está ya elegida, sólo se puede completar el grupo con otras tres personas, puesto que, en total, se eligen 4. Siguen rigiendo las reglas anteriores, por lo que son, también, combinaciones. Además, para completar el grupo, disponemos de una persona menos. Luego la respuesta es:

$$C_{9,3} = \binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = \boxed{84}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea contratada A? *(0,5 puntos)*

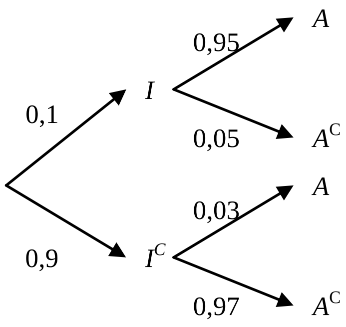
De los dos apartados anteriores, tenemos los casos posibles y los favorables, respectivamente. Por tanto:

$$P(A) = \frac{84}{210} = \boxed{\frac{2}{5} = 0{,}4}$$

7) En un sistema de alarma, la probabilidad de que haya incidente es 0.1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma suene es 0.95. La probabilidad de que suene la alarma sin que haya incidente es de 0.03.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que suene la alarma? *(0,5 puntos)*

Este problema se puede resolver muy fácilmente organizando los datos en un *diagrama en árbol*. Llamamos $I \equiv$ *Hay incidente* y $A \equiv$ *Suena la alarma*. Resulta el diagrama adjunto.



Por el *Teorema de la Probabilidad Total*:

$$P(A) = 0.1 \cdot 0.95 + 0.9 \cdot 0.03 = \boxed{0.122}$$

b) Si ha sonado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido incidente? *(0,5 puntos)*

Por la fórmula de la *Probabilidad Condicionada*, de la que se deriva la *Fórmula de Bayes*, se tiene:

$$P(I^C/A) = \frac{P(I^C \cap A)}{P(A)} = \frac{0.9 \cdot 0.03}{0.122} = \boxed{0.2213}$$

2) *(Sólo para los que tienen suspendidas las evaluaciones 1ª y 2ª)*

a) Factorizar el polinomio $8x^3 + 6x^2 - 29x + 15$ *(0,5 puntos)*

Intentamos hacerlo por Ruffini:

	8	6	– 29	15
1		8	14	– 15
	8	14	– 15	0

Pero aquí no encontramos la forma de seguir. Igualamos el polinomio cociente a cero e intentamos resolver la ecuación de segundo grado resultante para ver si tiene más raíces:

$$8x^2 + 14x - 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{196+480}}{16} = \frac{-14 \pm 26}{16} = \begin{cases} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4} \\ = \dfrac{-40}{16} = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Por tanto: $\boxed{8x^3 + 6x^2 - 29x + 15 = 8(x-1)\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)}$

b) Hallar a para que $ax^3 + 6x^2 - 29x + 15$ de resto 1 al ser dividido entre $x + 2$. *(0,5 puntos)*

Por el *Teorema del Resto*, el resto de dicha división es $P(-2)$, siendo $P(x)$ el polinomio dado. Y dicho resto debe valer 1. Por ello:

$$a(-2)^3 + 6(-2)^2 - 29(-2) + 15 = 1 \Rightarrow -8a + 24 + 58 + 15 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 97 - 1 = 8a \Rightarrow a = 96/8 = \boxed{12}$$

3) *(Sólo para los que tienen aprobadas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Hallar la ecuación de la recta tangente a $y = x^3 - 4x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$. *(1 punto)*

- Punto de tangencia: Si $x = 2 \Rightarrow y = 2^3 - 4 \cdot 2^2 = -8$. Es $(2, -8)$
- Pendiente de la tangente: Derivando, tenemos que $y' = 3x^2 - 8x$. Por tanto, $m = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 = -4$.
- Recta tangente buscada: $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 8 = -4(x - 2) \Rightarrow$
  $\Rightarrow y = -4x + 8 - 8 \Rightarrow \boxed{y = -4x}$

4) *(Sólo para los que tienen suspendidas las evaluaciones 1ª y 2ª)* Clasificar y resolver aplicando *exclusivamente* el método de Gauss en su forma matricial, el sistema siguiente: *(1 punto)*

$$\left.\begin{array}{r} x+3y-\ \ z=6 \\ -2x+3y+2z=-3 \\ x-6y-z=-3 \end{array}\right\}$$

Escribimos la matriz ampliada del sistema y realizamos transformaciones elementales para triangularizarla:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ -2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 9 & 0 & 9 \\ 0 & -9 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos triangularizado el sistema y, además, la última ecuación la eliminamos, por estar constituida únicamente de 0. Como, después de triangularizar, nos quedan menos ecuaciones (2) que incógnitas (3), estamos ante un sistema *compatible indeterminado*. Hemos de pasar una incógnita al segundo miembro y hacerla actuar como un parámetro con valor arbitrariamente escogido por nosotros. Lo hacemos con z, a la que llamaremos t. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y=6+t \\ 9y=9 \end{array}\right\}$$

- 2ª ecuación: $9y = 9 \Rightarrow y = 1$.
- 1ª ecuación: $x + 3\cdot 1 = 6 + t \Rightarrow x = 6 + t - 3 \Rightarrow x = 3 + t$

Así que las infinitas ecuaciones del sistema obedecen a la estructura siguiente, en la que eligiendo valores de t obtenemos, cada vez, una solución:

$$\boxed{(3+t,\ 1,\ t)}$$

IES Fernando de Herrera
Tercer trimestre – 1º Bach CCSS – Recuperación **2 de Junio de 2014**

NOMBRE: ____

Importante: Para aprobar el examen se requiere obtener, al menos, 0,7 puntos en la pregunta número 8. De lo contrario, la calificación máxima es 4,4.

1) Resolver: $3^x + \dfrac{1}{3^{x-1}} = 4$ *(1 punto)*
2) Factorizar: $2x^3 + 3x^2 - 17x + 12$ *(1 punto)*
3) Resolver: $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{6}{x^2-9}$ *(1 punto)*
4) Clasificar y resolver el sistema siguiente por el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método ni forma): *(0,5 puntos)*
$$\left.\begin{aligned} -2x+3y+2z &= 10 \\ 3x+4y+3z &= 5 \\ -9x+5y+3z &= 24 \end{aligned}\right\}$$
5) Representar gráficamente el recinto determinado por las siguientes inecuaciones, calculando sus vértices: *(1 punto)*
$$6x - y + 9 \geq 0,\ 2x + 5y - 13 \leq 0,\ 2x - 3y - 5 \leq 0.$$
6) Estudiar la continuidad de la función siguiente, clasificando sus discontinuidades y hallando el valor que debe tomar a para que sea continua en $x = 2$: *(1 punto)*
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-1} & si \quad x < 2 \\ ax^2 - 2 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$
7) Dada la función $y = \dfrac{x^2-9}{x+2}$, se pide:
   a) Dominio. Cortes con los ejes. Asíntotas. *(0,5 puntos)*
   b) Monotonía y extremos relativos. *(0,5 puntos)*
   c) Curvatura y puntos de inflexión. *(0,5 puntos)*
   d) Gráfica, usando la información obtenida en los puntos anteriores. *(1 punto)*
8) Calcular las derivadas de: *(1 punto)*
   a) $f(x) = (2x^2 - 3)^3$ b) $g(x) = e^{3x} \ln(2x^2 - 1)$
9) Una máquina fabrica rollos de cinta aislante. La proporción de rollos defectuosos es de 0.002. Si se fabrican 3000 rollos, ¿cuál es la probabilidad de obtener menos de 4 defectuosos? *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Resolver: $3^x + \dfrac{1}{3^{x-1}} = 4$ *(1 punto)*

$$3^x + \frac{1}{3^{x-1}} = 4 \Rightarrow \frac{3^x 3^{x-1} + 1}{3^{x-1}} = 4 \Rightarrow 3^{x+x-1} + 1 = 4\cdot 3^{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{2x}\cdot 3^{-1} + 1 = 4\cdot 3^x\cdot 3^{-1} \Rightarrow \frac{(3^x)^2}{3} + 1 = 4\cdot\frac{3^x}{3} \Rightarrow \text{Cambio de incógnita: } \boxed{t = 3^x}:$$

$$\frac{t^2}{3} + 1 = \frac{4t}{3} \Rightarrow \frac{t^2+3}{3} = \frac{4t}{3} \Rightarrow t^2 + 3 = 4t \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{matrix} =1 \\ =3 \end{matrix} \right.$$

Deshacemos el cambio:

- $t = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$.
- $t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow \boxed{x = 1}$.

Tiene, pues, dos soluciones.

2) Factorizar: $2x^3 + 3x^2 - 17x + 12$ *(1 punto)*

Probamos, por Ruffini, divisores del término independiente, positivos o negativos:

	2	3	–17	12
1		2	5	–12
	2	5	–12	0

No vemos rápidamente con qué número continuar, pero como el polinomio cociente es de segundo grado, lo igualamos a cero con objeto de encontrar sus raíces resolviendo la ecuación:

$$2x^2 + 5x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4} = \left\langle \begin{matrix} = -4 \\ = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \end{matrix} \right.$$

Como conocemos las tres raíces de un polinomio que es de grado 3, aplicando el Teorema de Descomposición Factorial, el polinomio queda como el producto del coeficiente del término de mayor grado por los factores (x – *raíz*):

$$\boxed{2x^3 + 3x^2 - 17x + 12 = 2(x-1)(x+4)(x-3/2)}$$

3) Resolver: $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{6}{x^2-9}$ *(1 punto)*

Igualamos denominadores:

$$\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x^2-9} \Rightarrow \frac{2(x+3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{1(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{6}{(x-3)(x+3)}$$

Deben coincidir los numeradores, pero excluiremos las soluciones que obtengamos y que anulen, también, al denominador:

$$2(x+3) + x - 3 = 6 \Rightarrow 2x + 6 + x - 3 = 6 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

que, como no anula ningún denominador, es una solución válida.

4) Clasificar y resolver el sistema siguiente por el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método ni forma): *(0,5 puntos)*

$$\left.\begin{array}{r} -2x+3y+2z=10 \\ 3x+4y+3z=\ \ 5 \\ -9x+5y+3z=24 \end{array}\right\}$$

Triangularizamos la *matriz ampliada*:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 10 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ -9 & 5 & 3 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3-3F_1]{2F_2-3F_1} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 10 \\ 12 & -1 & 0 & -20 \\ -12 & 1 & 0 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 10 \\ 12 & -1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ya está triangularizada. Al ser la última fila completa de 0 salvo la última posición estamos ante un **sistema incompatible** (la última ecuación, reconstruida, quedaría como 0 = –2, que no es posible). Como no tiene solución, hemos terminado.

5) Representar gráficamente el recinto determinado por las siguientes inecuaciones, calculando sus vértices: *(1 punto)*

$$6x - y + 9 \geq 0,\ 2x + 5y - 13 \leq 0,\ 2x - 3y - 5 \leq 0.$$

En cada inecuación, al cambiar el signo de desigualdad por un *igual*, nos resulta la ecuación de una recta. Dibujamos cada una de ellas mediante una pequeña tabla de valores (bastan dos, suficientemente alejados el uno del otro; escogeremos $x = 0$ e $y = 0$, por ejemplo). Con todas las tablas, nos hacemos una idea de las dimensiones que hemos de escoger para los ejes de coordenadas.

Una vez dibujadas, despejamos y en cada una de las inecuaciones. Si nos queda una inecuación de la forma $y \leq recta$, de los dos semiplanos que resultan de trazar la recta escogeremos el que queda por debajo de la misma. Y en el caso de que resulte $y \geq recta$, elegimos el superior. Lo marcamos con unas flechitas.

El recinto es el común a todos esos semiplanos.

- $6x - y + 9 = 0$

x	0	3/2
y	9	0

Como al despejar queda: $6x + 9 \geq y$, es decir, $y \leq 6x + 9$, elegimos el semiplano inferior.

- $2x + 5y - 13 = 0$

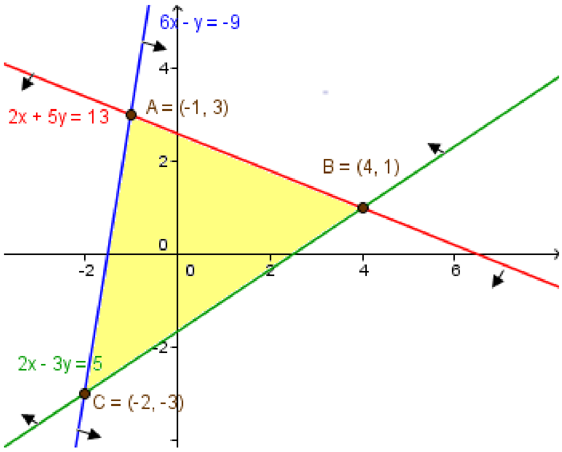
x	0	13/2
y	13/5	0

Como al despejar queda: $y \leq \dfrac{-2x+13}{5}$, elegimos el semiplano inferior.

- $2x - 3y - 5 = 0$

x	0	5/2
y	–5/3	0

Como al despejar queda: $\dfrac{2x-5}{3} \leq y$, es decir, $y \geq \dfrac{2x-5}{3}$ elegimos el semiplano superior.



Todo ello nos lleva al gráfico adjunto, en el que ya hemos señalado los vértices. Calculémoslos (nunca se puede deducir un cálculo de un gráfico):

- $\left.\begin{array}{l}2x+5y=13\\6x-y=-9\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-6x-15y=-39\\ \underline{6x-y=-9}\end{array}\right\}$ $-16y=-48\Rightarrow y=3$ *Sustituyendo*: $2x+15=13\Rightarrow 2x=-2\Rightarrow x=-1$ *Luego*: $A(-1,3)$
- $\left.\begin{array}{l}2x+5y=13\\2x-3y=5\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}2x+5y=13\\ \underline{-2x+3y=-5}\end{array}\right\}$ $8y=8\Rightarrow y=1$ *Sustituyendo*: $2x+5=13\Rightarrow 2x=8\Rightarrow x=4$ *Luego*: $B(4,1)$
- $\left.\begin{array}{l}6x-y=-9\\2x-3y=5\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}6x-y=-9\\ \underline{-6x+9y=-15}\end{array}\right\}$ $8y=-24\Rightarrow y=-3$ *Sustituyendo*: $2x+9=5\Rightarrow 2x=-4\Rightarrow x=-2$ *Luego*: $C(-2,-3)$

6) Estudiar la continuidad de la función siguiente, clasificando sus discontinuidades y hallando el valor que debe tomar a para que sea continua en $x = 2$: *(1 punto)*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-1} & si \quad x<2 \\ ax^2-2 & si \quad x\geq 2\end{cases}$$

- Zona $(-\infty, 2)$: f coincide con la función $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$ que, por ser elemental, es continua en su dominio, siendo éste $\mathbb{R} - \{1\}$, pues $x = 1$ anula el denominador. Como $1 \in (-\infty, 2)$, es también una discontinuidad de f y hay que clasificarla.
  1) $\nexists f(1)$, pues hemos visto que anula el denominador.
  2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x-1} = \infty$. Vemos qué sucede a izquierda y derecha de 1:
  $$\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{x-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{2}{x-1} = +\infty$$
  como puede comprobarse dando valores muy próximos a 1, a izquierda y derecha respectivamente, para averiguar el signo del ∞ en cada caso. En consecuencia, estamos ante una discontinuidad asintótica de salto infinito.
- Zona $(2, +\infty)$: f coincide con $h(x) = ax^2 - 2$, que, al ser elemental, es continua en su dominio. Siendo éste $\mathbb{R}$, no tiene discontinuidades, por lo que f tampoco, en la zona donde coincide con h. Luego f es continua en $(2, +\infty)$.
- $x = 2$: Veamos las tres condiciones de continuidad en un punto:
  1) $\exists\, f(2) = a\cdot 2^2 - 2 = 4a - 2$, siendo esta existencia independiente del valor de a.
  2) Para calcular $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ estamos obligados a evaluar los dos límites laterales, porque la fórmula de $f(x)$ es diferente si x está a la izquierda o a la derecha de $x = 2$:
  $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{2}{x-1} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(ax^2-2) = 4a-2$$
  El límite completo existirá si, y sólo si existen los dos laterales y coinciden. Lo que nos lleva a que:
  $$2 = 4a - 2 \iff 4 = 4a \iff \boxed{a = 1}$$
  Esto hará que, además, el límite coincida con $f(2) = 4a - 2 = 4\cdot 1 - 2 = 2$, por lo que la función será continua en $x = 2$. Para otros valores de a los límites laterales existen pero no coinciden, por lo que habría una discontinuidad de salto finito.

> En resumen:
> Si $a = 1$, f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, presentando una discontinuidad asintótica de salto infinito en $x = 1$.
> Si $a \neq 1$, además, presentará una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

7) Dada la función $y = \dfrac{x^2-9}{x+2}$, se pide:

a) Dominio. Cortes con los ejes. Asíntotas. *(0,5 puntos)*

- No se puede anular el denominador: $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Por tanto, $\boxed{D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}}$
- $x = 0 \Rightarrow y = -9/2$. Corta a OY en $\boxed{(0, -9/2)}$.
  $y = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$, válidas porque no anulan el denominador. Así que corta a OX en $\boxed{(-3, 0) \text{ y } (3, 0)}$.
- AV: Probamos en la única discontinuidad:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-9}{x+2} = \left(\frac{-5}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{\text{La recta } x = -2 \text{ es asíntota vertical}}.$$

AH: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty \Rightarrow \boxed{\text{No tiene AH}}$.

AO: Será, si existe, una recta de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-9}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{x^2+2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-9}{x+2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9-x(x+2)}{x+2} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9-x^2-2x}{x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{-9-2x}{x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x} = -2$$

Por tanto, $\boxed{\text{la recta } y = x - 2 \text{ es asíntota oblicua}}$.

b) Monotonía y extremos relativos. *(0,5 puntos)*

Derivamos: $y' = \dfrac{2x(x+2)-(x^2-9)1}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2+4x-x^2+9}{(x+2)^2} = \boxed{\dfrac{x^2+4x+9}{(x+2)^2}}$

- Discontinuidades de f ó de f': $x = -2$ (de ambas: anula denominadores).
- $f'(x) = 0$: $x^2 + 4x + 9 = 0$ $x = \dfrac{-4\pm\sqrt{16-36}}{2}$, sin soluciones.

Dividimos $\mathbb{R}$ en intervalos mediante el único punto obtenido:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
f'	+	∄	+
f	↗	∄	↗

$\boxed{\text{No tiene extremos relativos}}$.

c) Curvatura y puntos de inflexión. *(0,5 puntos)*

$$y'' = \frac{(2x+4)(x+2)^2-(x^2+4x+9)2(x+2)}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{(x+2)[(2x+4)(x+2)-(x^2+4x+9)2]}{(x+2)^4} = \frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x-18}{(x+2)^3} =$$

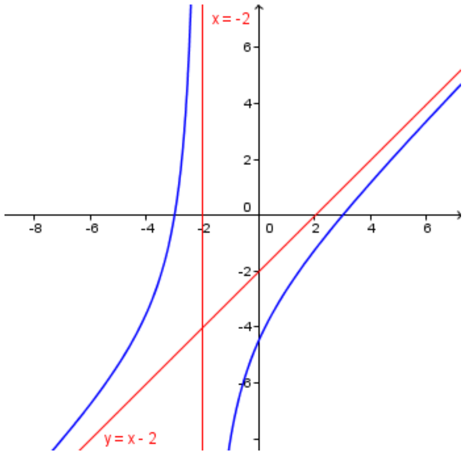
$$= \boxed{\frac{-10}{(x+2)^3}}$$

- <u>Discontinuidades de f, f' ó de f''</u>: $x = -2$ (anula denominadores de todas).
- <u>$f''(x) = 0$</u>: $-10 = 0$, sin soluciones.

Dividimos el dominio mediante los puntos obtenidos (sólo $x = 1$):

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
f''	+	$\nexists$	–
f	$\cup$ **convexa**	$\nexists$	$\cap$ **cóncava**

$\boxed{\text{No tiene puntos de inflexión}}$.



d) Gráfica, usando la información obtenida en los puntos anteriores. *(1 punto)*
En el dibujo adjunto.

8) Calcular las derivadas de: *(1 punto)*
a) $f(x) = (2x^2 - 3)^3$ b) $g(x) = e^{3x} \ln(2x^2 - 1)$

a) $f'(x) = 3(2x^2 - 3)^2 4x = \boxed{12x(2x^2 - 3)^2}$

b) $g'(x) = 3e^{3x}\ln(2x^2-1) + e^{3x}\dfrac{4x}{2x^2-1} = \boxed{e^{3x}\left(3\ln(2x^2-1) + \dfrac{4x}{2x^2-1}\right)}$

9) Una máquina fabrica rollos de cinta aislante. La proporción de rollos defectuosos es de 0.002. Si se fabrican 3000 rollos, ¿cuál es la probabilidad de obtener menos de 4 defectuosos? *(1 punto)*

Elegido un rollo al azar, puede estar defectuoso o no estarlo. Por tanto, se trata de una prueba aleatoria de Bernoulli. Como se repite la prueba 3000 veces, de forma independiente y manteniendo, entonces, la probabilidad de que un rollo sea defectuoso (a lo cual vamos a llamar *éxito*, porque es lo que contabilizamos), si:

X = nº de rollos defectuosos (*éxitos*) en una serie de 3000

tenemos que $X \in B(3000; 0.002)$.

Nos piden: $P(X < 4)$.

Al ser n muy grande, podemos aproximar la Binomial mediante la normal utilizando el resultado del *Teorema Central del Límite*, porque con $n \geq 30$ las aproximaciones pueden considerarse buenas:

$$X' \in N(np;\ \sqrt{npq}) = N(3000\cdot 0.002;\ \sqrt{3000\cdot 0.002\cdot 0.998}) = N(6;\ 2.45)$$

Pero cuando se aproxima una variable aleatoria discreta mediante una continua, debe aplicarse la corrección de *Yates*:

$$P(X < 4) \approx P(X' \leq 3.5) = P(Z \leq \frac{3.5-6}{2.45}) = P(Z \leq -1.02) = P(Z \geq 1.02) =$$

lo que es cierto por la simetría de la función de densidad de la ley Normal. Además, por el suceso contrario (y teniendo en cuenta que en una variable aleatoria continua la probabilidad de que ésta sea igual a cualquier número siempre vale 0):

$$= 1 - P(Z \leq 1.02) = 1 - 0.8461 = \boxed{0.1539}$$

valor que se ha obtenido mediante las tablas de la N(0; 1). Como no son demasiados cálculos podría haberse obtenido mediante la fórmula de la ley Binomial, y el resultado (exacto, pues) es 0.1509.