VALOR ABSOLUTO Y ENTORNOS

Valor absoluto

Se define el **valor absoluto** de un número real como el número dado, si éste es positivo, o su opuesto en caso de ser estrictamente negativo. Es decir:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}}$$

Ejemplos:

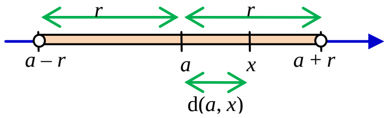
- $|13| = 13$. Aplicando la definición a $|13|$ sería $x = 13$. Como es mayor o igual que cero, la definición nos dice que $|x| = x = 13$.
- $|0| = 0$. De igual forma, $x = 0$. Al ser $x \geq 0$, se tiene que $|x| = x = 0$.
- $|-19| = 19$, porque $x = -19 < 0$, por lo que, según la definición se tendrá: $|x| = -x$ $\Rightarrow$ $|-19| = -(-19) = 19$.

Propiedades

1) $|x| \geq 0$
2) $|x| = 0 \iff x = 0$
3) $|x| = |-x|$
4) $|x| = |y| \iff x = y$ ó $x = -y$
5) $|x| = y \iff x = y$ ó $x = -y$ (debe ser $y \geq 0$)
6) $d(x, y) = |x - y| = |y - x|$ lo que quiere decir que la distancia que separa a x de y es igual que la diferencia de ambos números, tomada en valor absoluto.
7) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
8) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, siempre que $y \neq 0$
9) $|x| \leq y$ (siendo $y \geq 0$) $\iff -y \leq x \leq y$
   Las dos desigualdades $-y \leq x$, $x \leq y$, se verifican simultáneamente.
   La propiedad es cierta, también, si las desigualdades son estrictas ($<$ en lugar de $\leq$).
10) $|x| \geq y$ (siendo $y \geq 0$) $\iff x \geq y$ ó $x \leq -y$
    Análoga, si las desigualdades son estrictas.
11) $|x| = |y| \iff x^2 = y^2$
12) $|x|^2 = x^2$
13) $\sqrt{x^2} = |x|$
14) Desigualdad triangular: $|x + y| \leq |x| + |y|$
15) $|x - y| \geq |x| - |y|$
16) $|x| \leq |y| \iff x^2 \leq y^2$. Análoga si las desigualdades son estrictas.

Entornos

Se define el ***entorno de centro a y radio r > 0***, y se utiliza la notación: $E(a, r)$, como el conjunto de todos los números x que están a una distancia de a inferior a r. Es decir:



$$\boxed{E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ d(x, a) < r\}}$$

Según el gráfico, x puede estar en cualquier lugar del intervalo coloreado. Por tanto, dicha zona es el entorno de centro a y radio r.

Por las propiedades 6 de valor absoluto se tiene que: $d(x, a) < r \iff |x - a| < r$. Por tanto, una definición equivalente de *entorno* es:

$$\boxed{E(a, r) = \{x \in R \;/\; |x - a| < r\}}$$

Pero la propiedad 9 de valor absoluto nos lleva a que: $|x - a| < r \iff -r < x - a < r$
Si sumamos a en las tres posiciones de estas desigualdades, la expresión resulta ser equivalente a:

$$a - r < x < a + r$$

Por tanto, una tercera definición equivalente es:

$$\boxed{E(a, r) = \{x \in R \;/\; a - r < x < a + r\} = (a - r, a + r)}$$

Es decir, hemos encontrado que el entorno de centro a y radio r es lo mismo que el intervalo abierto $(a - r, a + r)$.

Se define el ***entorno reducido de centro a y radio r*** como $E(a, r)$ excluido el centro a. La notación que se emplea es $E^*(a, r)$. Es decir:

$$\boxed{E^*(a, r) = E(a, r) - \{a\}}$$

Podríamos expresarlo como unión de dos intervalos abiertos:

$$\boxed{E^*(a, r) = (a - r, a) \cup (a, a + r)}$$

Problemas

1) Resolver: $|3x - 1| = 2$

   Por la propiedad 5, esto sucede si, y sólo si:

$$\begin{cases} 3x - 1 = 2 \iff 3x = 3 \iff x = 1 \\ \text{ó} \\ 3x - 1 = -2 \iff 3x = -1 \iff x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

   Tiene, por tanto, dos soluciones posibles: $\boxed{1 \text{ ó } -1/3}$.

2) Resolver: $|3x - 1| = |x + 6|$

   Por la propiedad 4, esto equivale a:

$$\begin{cases} 3x - 1 = x + 6 \iff 2x = 7 \iff x = \dfrac{7}{2} \\ \text{ó} \\ 3x - 1 = -(x + 6) \iff 4x = -5 \iff x = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

   Dos soluciones: $\boxed{7/2 \text{ ó } -5/4}$.

3) Resolver: $|x^2 - 2x - 3| = 0$

   Por la propiedad 2, la ecuación equivale a:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix} \right.$$

   Dos soluciones: $\boxed{-1 \text{ ó } 3}$.

4) Resolver: $|x + 2| = |3 - x|$

Aplicando la propiedad 4, es equivalente a:

$$\begin{cases} x+2=3-x \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=1/2 \\ ó \\ x+2=-(3-x) \Leftrightarrow x+2=-3+x \Leftrightarrow 0=-5 \text{ Imposible} \end{cases}$$

Luego tiene una única solución: $\boxed{x = 1/2}$, porque la segunda igualdad no es cierta para ningún valor de x.

5) Resolver: $|4 - |2x - 1|| = 3$

Aplicamos reiteradamente la propiedad 5:

$|4 - |2x - 1|| = 3 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-|2x-1|=3 \Leftrightarrow 1=|2x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1 \\ ó \\ 2x-1=-1 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0 \end{cases} \\ ó \\ 4-|2x-1|=-3 \Leftrightarrow 7=|2x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=7 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4 \\ ó \\ 2x-1=-7 \Leftrightarrow 2x=-6 \Leftrightarrow x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones posibles: $\boxed{-3, 0, 1, 4}$.

6) Resolver: $|2|x - 3| - 4x| = 4$ **<u>(dificultad alta)</u>**

Procedemos de forma análoga al problema anterior:

$$|2|x-3|-4x| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2|x-3|-4x=4 \Leftrightarrow 2|x-3|=4x+4 \Leftrightarrow |x-3|=2x+2 \\ ó \\ 2|x-3|-4x=-4 \Leftrightarrow 2|x-3|=4x-4 \Leftrightarrow |x-3|=2x-2 \end{cases}$$

Resolvemos cada una de estas ecuaciones por separado. <u>Cuando nos surge una ecuación donde la incógnita aparece dentro y fuera del valor absoluto, hay que comprobar la validez de las soluciones en la ecuación original</u>.

- $|x - 3| = 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-3=2x+2 \Leftrightarrow -5=x \\ ó \\ x-3=-(2x+2) \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow x=1/3 \end{cases}$
- $|x - 3| = 2x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-3=2x-2 \Leftrightarrow -1=x \\ ó \\ x-3=-(2x-2) \Leftrightarrow 3x=5 \Leftrightarrow x=5/3 \end{cases}$

Al comprobar la validez de las distintas soluciones, obtenemos que $x = -1$ no nos sirve. Por tanto, las soluciones son: $\boxed{-5, 1/3 \text{ ó } 5/3}$.

7) Expresar en forma de intervalo E(1, 2)

E(1, 2) = (1 – 2, 1 + 2) = $\boxed{(-1, 3)}$

8) Expresar en forma de intervalo o uniones de intervalos: E*(2.1, 3.3)

E*(2.1, 3.3) = (2.1 – 3.3, 2.1) ∪ (2.1, 2.1 + 3.3) = $\boxed{(-1.2, 2.1) \cup (2.1, 5.4)}$

9) Expresar en forma de entorno el intervalo abierto (– 3.17, 2.712)

El centro será el punto medio entre los extremos del intervalo, que obtenemos sumando ambos números y dividiendo entre 2:

$$\frac{-3.17+2.712}{2}=-0.229$$

El radio será la distancia desde el centro que hemos obtenido a alguno de los dos extremos. Por la propiedad 6 de valor absoluto, valdrá:

$$d(-0.229,\ 2.712) = |-0.229 - 2.712| = 2.941$$

Luego:

$$\boxed{(-3.17,\ 2.712) = E(-0.229,\ 2.941)}$$

10) Expresar en forma de intervalo y de entorno el conjunto $\{x \in R /\ |x + 2| < 3\}$

Por la propiedad 6:

$|x + 2| = d(x, -2)$

Por tanto, y recurriendo a la definición de entorno:

$$\{x \in R /\ |x + 2| < 3\} = \{x \in R /\ d(x, -2) < 3\} =$$
$$= \boxed{E(-2,\ 3)} = (-2-3,\ -2+3) = \boxed{(-5,\ 1)}$$

11) Resolver la inecuación $|x - 4| < 5$

Por la propiedad 9 de valor absoluto, esto sucede si, y sólo si:

$$-5 < x-4 < 5 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -5 < x-4 \Leftrightarrow -5+4 < x \Leftrightarrow -1 < x \\ y \\ x-4 < 5 \Leftrightarrow x < 5+4 \Leftrightarrow x < 9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 9$$

Luego las soluciones son todos y cada uno de los puntos del intervalo abierto $\boxed{(-1,\ 9)}$

12) Resolver la inecuación: $|2x - 3| \geq 5$

Según la propiedad 10 de valor absoluto, esto sucederá cuando, y solamente cuando:

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 5 \Leftrightarrow 2x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq 4 \\ ó \\ 2x-3 \leq -5 \Leftrightarrow 2x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -1 \end{cases}$$

Lo que sucede cuando $\boxed{x \in (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)}$

13) Resolver la inecuación: $|1 - 4x| > 6x - 3$ **<u>(dificultad alta)</u>**

Aplicamos, nuevamente, la propiedad 10, obteniendo:

$$\begin{cases} 1-4x > 6x-3 \Leftrightarrow 4 > 10x \Leftrightarrow x < 2/5 \\ ó \\ 1-4x < -(6x-3) \Leftrightarrow 1-4x < -6x+3 \Leftrightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow x < 1 \end{cases}$$

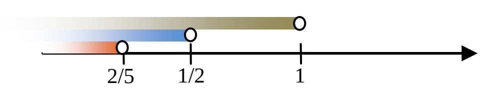
Pero en este tipo de inecuaciones hay una posibilidad adicional: Si $6x - 3 < 0$, con toda seguridad el valor absoluto de $1 - 4x$ va a ser mayor que él, puesto que el valor absoluto siempre produce resultados mayores o iguales que 0. Y eso sucede cuando:

$$6x - 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x < 3 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1/2$$

Las tres condiciones obtenidas son:

$$x < 2/5 \quad ó \quad x < 1 \quad ó \quad x < 1/2.$$

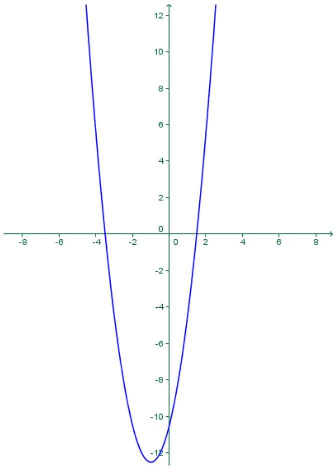
Al dibujarlas, vemos que suceden a la vez se $x < 2/5$. Pero a nosotros nos interesa que se



cumpla alguna de las tres (están relacionadas mediante "ó"). Y eso sucede si $x < 1$. Ésta es, pues, la solución final:

$$x < 1 \iff \boxed{x \in (-\infty, 1)}.$$

14) Resolver la inecuación: $|x + 2| + |x| < 5$ **(dificultad alta)**



Empleamos la propiedad 16 de valores absolutos. El segundo miembro no es un valor absoluto. Pero $5 = |5|$: puede aplicarse. Al desarrollar, también usaremos las propiedades 12 y 7:

$$(|x + 2| + |x|)^2 < 5^2 \iff$$
$$\iff (x + 2)^2 + 2\,|x|\,|x + 2| + x^2 < 25 \iff$$
$$\iff x^2 + 4x + 4 + 2\,|x(x + 2)| + x^2 < 25 \iff$$
$$\iff 2x^2 + 4x + 4 + 2\,|x^2 + 2x| < 25 \iff$$
$$\iff 2\,|x^2 + 2x| < 25 - 2x^2 - 4x - 4 \iff$$
$$\iff 2\,|x^2 + 2x| < -2x^2 - 4x + 21 \iff$$
$$\iff |x^2 + 2x| < -x^2 - 2x + 21/2$$

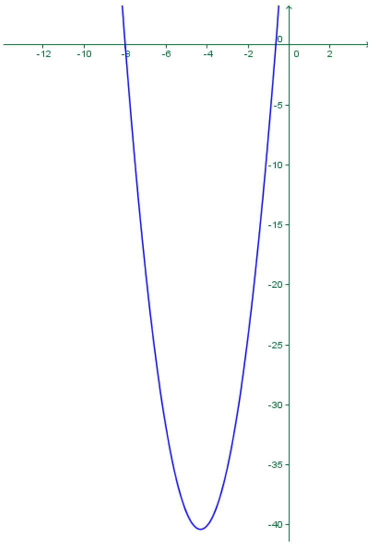
Por la propiedad 9, esto equivale a:

$$\begin{cases} x^2 + 2x < -x^2 - 2x + 21/2 \iff 2x^2 + 4x - 21/2 < 0 \\ y \\ x^2 + 2x > x^2 + 2x - 21/2 \iff 0 > -21/2, \text{ que se cumple } \forall x \end{cases}$$

Nos hemos quedado con la inecuación $2x^2 + 4x - 21/2 < 0$.

Como la ecuación $2x^2 + 4x - 21/2 = 0$ tiene como soluciones $-7/2$ y $3/2$, la parábola $y = 2x^2 + 4x - 21/2$ corta al eje OX en dichos valores. Teniendo en cuenta su forma convexa (ver gráfico), la solución de esta inecuación y, por tanto, la de la inecuación inicial, son los valores de x que hacen que $y = 2x^2 + 4x - 21/2 < 0$. Y estos son los que hacen que la curva quede bajo el eje OX, pues para ellos será y negativo: $\boxed{(-7/2,\ 3/2)}$

15) Resolver la inecuación: $|x - 3| \le |2x + 5|$ **(dificultad alta)**



La resolución es similar a la del ejercicio anterior, empleando la propiedad 16 para deshacerse de los valores absolutos:

$$|x - 3| \le |2x + 5| \iff (x - 3)^2 \le (2x + 5)^2 \iff x^2 - 6x + 9 \le 4x^2 + 20x + 25 \iff$$
$$\iff 0 \le 4x^2 + 20x + 25 - x^2 + 6x - 9 \iff 0 \le 3x^2 + 26x + 16$$

Para buscar los valores de x que hacen positivo o nulo el resultado de $3x^2 + 26x + 16$, llamamos $y = 3x^2 + 26x + 16$ y representamos gráficamente la parábola correspondiente. Teniendo sólo en cuenta que la parábola es convexa (pues el coeficiente de x^2 es positivo: 3) y que corta al eje OX en:

$$x = \frac{-26 \pm \sqrt{676 - 192}}{6} = \frac{-26 \pm 22}{6} = \begin{cases} = -8 \\ = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

la gráfica es la adjunta. Por tanto, los valores buscados, que hacen que y quede por encima del eje OX o tocando a dicho eje (para que $y \ge 0$) son: $\boxed{x \in (-\infty, -8] \cup [-2/3, +\infty)}$