Examen rectas tangentes y representación de funciones
1º BACH CCSS 05/04/13

1) Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{2x^2+5}{x}$ en el punto de abscisas x = 1.

Solución: ecuación punto pendiente : $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$x_0 = 1 \rightarrow y_0 = f(1) = \frac{2 \cdot 1^2 + 5}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Por tanto, $(x_0, y_0) = (1,7)$

$$m = f'(x_0)$$

Calculamos en primer lugar la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{4x \cdot x - (2x^2+5) \cdot 1}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 5}{x^2} = \frac{2x^2 - 5}{x^2}$$

$$m = f'(x_0) = f'(1) = \frac{2 \cdot 1^2 - 5}{1^2} = \frac{-3}{1} = -3$$

Tenemos $(x_0, y_0) = (1,7)$; $m = -3$

Sustituimos en la ecuación punto pendiente de la recta:

$$y - 7 = -3(x - 1) \longrightarrow y - 7 = -3x + 3 \longrightarrow y = -3x + 3 + 7$$

Por tanto la ecuación de la recta tangente es: $\boxed{y = -3x + 10}$

2) Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ y que es paralela a $y = 3x - 5$.

Solución: ecuación punto pendiente : $y - y_0 = m(x - x_0)$.

En primer lugar, sabemos que por ser paralelas deben tener la misma pendiente. Por tanto tenemos que: $m = 3$.

Por otra parte sabemos que: $m = f'(x_0)$.

De aquí vamos a calcular x_0.

$$f'(x_0) = 4x_0 + 3 = 3 = m \longrightarrow 4x_0 + 3 = 3 \longrightarrow 4x_0 = 0 \longrightarrow x_0 = 0$$

Ya que tenemos x_0 podemos calcular y_0.

$$y_0 = f(x_0) = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 \longrightarrow y_0 = 1$$

Tenemos $(x_0, y_0) = (0, 1)$; $m = 3$

Sustituimos en la ecuación punto pendiente de la recta:

$$y - 1 = 3(x - 0) \longrightarrow\; y - 1 = 3x + 0 \longrightarrow\; y = 3x + 1$$

Por tanto la ecuación de la recta tangente es: $\boxed{y = 3x + 1}$

3) Sea la función $f(x) = x^2 + ax + b$. Calcula a y b sabiendo que la función pasa por el punto (0,-5) y que en $x = 0$ la recta tangente es paralela a $y = -4x$.

Solución: Tenemos la función $f(x) = x^2 + ax + b$ y sabemos que pasa por el punto (0,-5). Esto quiere decir que $f(0) = -5$.

$f(0) = 2 \cdot 0^2 + a \cdot 0 + b = -5 \longrightarrow \boxed{b = -5}$

Por otro lado, sabemos que la recta tangente a la función dada en $x = 0$ es paralela a $y = -4x$.

Luego, $m = f'(0) = -4 \longrightarrow\; f'(0) = 2 \cdot 0 + a = -4 \longrightarrow \boxed{a = -4}$

4) Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$, se pide:

a. Calcular su dominio y los puntos de corte con los ejes, y estudiar la simetría.
b. Calcular sus asíntotas.
c. Estudiar su monotonía y los extremos.
d. Estudiar su curvatura y los puntos de inflexión.
e. Hacer su representación gráfica aproximada.

Solución:

a) Dominio: $x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 1 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$
Dom(f) = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Puntos de corte:

Eje OX: $\frac{x^3}{x^2-1} = 0 \;\rightarrow\; x^3 = 0 \;\rightarrow x = 0$ punto (0,0)

Eje OY: $\frac{0^3}{0^2-1} = 0 \;\rightarrow y = 0$ punto (0,0)

Simetría:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1}$$

$$-f(x) = -\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1}$$

$f(-x) = -f(x)$ por tanto, la función es simétrica IMPAR.

b) AH: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$

No tiene AH.

Estudiamos las asíntotas verticales en los puntos de discontinuidad.

AV: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty$ Hay AV en $x = 1$

Estudiemos los límites laterales:

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty \end{cases}$$

AV: $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{-1}{0}\right) = \infty$ Hay AV en $x = -1$

Estudiemos los límites laterales:

$$\begin{cases} \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{-1}{0^-}\right) = +\infty \\ \lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{-1}{0^+}\right) = -\infty \end{cases}$$

Estudiamos ahora las asíntotas oblicuas: AO:

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3-x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por tanto, hay AO en $y = x$.

c) Para estudiar la monotonía y los extremos, calculamos la derivada de la función.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Dom(f')= $\mathbb{R}-\{-1{,}1\}$

Puntos críticos: $f'(x)=0\ \rightarrow\ \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=0\ \rightarrow x^4-3x^2=0$

$$x^2(x^2-3)=0\ \begin{cases} x^2=0\ \rightarrow x=0 \\ x^2-3=0\ \rightarrow x^2=3\ \rightarrow x=\pm 3 \end{cases}$$

Construimos la tabla con los puntos de discontinuidad y los puntos críticos de $f'(x)$:

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1{,}0)$	0	$(0{,}1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	∄	-	0	-	∄	-	0	+
$f(x)$	↗	Máx	↘	∄	↘		↘	∄	↘	mín	↗

Máximo relativo en $x=-\sqrt{3}\ \rightarrow (-\sqrt{3},\frac{-3\sqrt{3}}{2})$

Mínimo relativo en $x=\sqrt{3}\ \rightarrow (\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2})$

d) Para estudiar la curvatura y los puntos de inflexión, calculamos la derivada segunda de la función, es decir, derivamos la primera derivada

.

$$f''(x)=\frac{(4x^3-6x)\cdot(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$
$$=\frac{(x^2-1)\cdot[(4x^3-6x)\cdot(x^2-1)-4x\cdot(x^4-3x^2)]}{(x^2-1)^4}$$
$$=\frac{(4x^3-6x)\cdot(x^2-1)-4x\cdot(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^3}$$
$$=\frac{4x^5-4x^3-6x^3+6x-4x^5+12x^3}{(x^2-1)^3}=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$$

Dom(f'')= $\mathbb{R}-\{-1{,}1\}$

Puntos críticos: $f''(x)=0\ \rightarrow\ \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=0\ \rightarrow 2x^3+6x=0$

$$x(2x^2+6)=0\ \begin{cases} x=0 \\ 2x^2+6=0\ \rightarrow x^2=-3\ \rightarrow x=\pm\sqrt{-3}\ \ \rightarrow \nexists \end{cases}$$

Construimos la tabla con los puntos de discontinuidad y los puntos críticos de $f''(x)$:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	-	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	+
$f(x)$	$\cap$	$\nexists$	$\cup$	PI	$\cap$	$\nexists$	$\cup$

Punto de inflexión en $x = 0 \ \rightarrow (0{,}0)$

e) Representación gráfica aproximada:

Utilizamos toda la información proporcionada por los apartados anteriores: ptos de corte, asíntotas, máximos y mínimos, límites laterales, ptos de inflexión…