

CÁLCULO DE LÍMITES (Resumen)

- **Regla de L'Hôpital:** Si la expresión del límite es un cociente de funciones que produce la **indeterminación** $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, cambiamos el límite por la **derivada del numerador partido por la derivada del denominador** (*no es derivada de un cociente*).
- Si la **indeterminación es** $(+\infty) - (+\infty)$ ó $(-\infty) - (-\infty)$, se efectúa la suma dentro del límite, buscando una de las dos indeterminaciones anteriores.
- Si la **indeterminación es** $0 \cdot \infty$, escribimos el límite en forma de cociente así:

$$\lim f(x) \cdot g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Con lo que se transformará en una indeterminación apta para aplicar L'Hôpital.

- La mayoría de los límites habituales se resuelven fácilmente por L'Hôpital. **Si no vamos a usar L'Hôpital hay que tener en cuenta:**
 - **En el infinito, los valores de las funciones logarítmicas son despreciables frente a los de las potenciales** (polinomios elevados a un número, o raíces de polinomios) **y polinómicas**, por lo que *éstas últimas deciden el resultado del límite* (0 ó ∞), *salvo el signo*.
 - **En el infinito, los valores de las potenciales o polinómicas son despreciables frente a los de las exponenciales.** Por tanto, según el punto anterior, los valores de las logarítmicas son despreciables frente a los de las exponenciales.
 - Para cualquier **polinomio** $P(x)$, se tiene: $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty$
 - **Cuando $x \rightarrow \infty$** , y nos surge la **indeterminación** ∞/∞ , en la expresión del límite **todo el numerador puede sustituirse por su término (sumando) de mayor grado, y lo mismo con el denominador**. Esto es válido tanto si cada uno de ellos es un polinomio, o si aparecen polinomios elevados a un número, o **dentro de una raíz**. Al simplificar la expresión resultante, solemos tener eliminadas las indeterminaciones.
 - Si obtenemos la **indeterminación** $+\infty - \infty$ y en la expresión del límite tenemos **una resta en la que aparece alguna raíz**, multiplicamos y dividimos por el conjugado de dicha resta.
 - **Cuando $x \rightarrow a$** , y tenemos un cociente de polinomios con **indeterminación 0/0**, **descomponemos por Ruffini**, dividiendo entre $x - a$ para dicho a .
 - **Cuando $x \rightarrow a$** , y aparecen **restas de raíces con indeterminaciones 0/0**, multiplicamos por el conjugado de dichas restas y aplicamos Ruffini a los polinomios resultantes.
 - Ante la **indeterminación** 1^∞ , sustituimos el límite completo de la siguiente forma: $\lim_x f(x)^{g(x)} = (1^\infty) = e^{\lim_s g(x)[f(x)-1]}$

A continuación resumimos resultados con las 7 indeterminaciones, y otros resultados que no son indeterminados.

RESULTADOS HABITUALES DE LÍMITES EN LOS QUE INTERVIENEN ∞ ó 0

	OPERACIÓN	RESULTADO DEL LÍMITE	REGLA MNEMOTÉCNICA
SUMAS	$\pm \infty \pm a$	$\pm \infty$	Si a ∞ unidades (positivas, negativas o sin signo) le sumamos o restamos una cantidad finita de unidades a , continuamos con las ∞ unidades que teníamos
	$+\infty + \infty$	$+\infty$	Si a $+\infty$ unidades les sumamos otras $+\infty$, seguimos teniendo $+\infty$
	$-\infty - \infty$	$-\infty$	Si a ∞ unidades negativas les añadimos otras ∞ unidades negativas, continuamos teniendo ∞ unidades negativas
	$+\infty - \infty$	INDETERMINADO	INDETERMINADO
PRO- DUCTOS	$\infty \cdot \infty$	∞	∞ (con o sin signo) al cuadrado sigue siendo ∞ (sin signo, o con el resultado correspondiente de la regla de los signos)
	$a \cdot \infty$ ($a \neq 0$)	∞	a veces ∞ unidades siguen siendo ∞ unidades (se ha puesto ∞ sin signo, pero se puede aplicar la regla de los signos al resultado).
	$0 \cdot \infty$	INDETERMINADO	INDETERMINADO
COCIENTES	$\frac{a}{\infty}$	0	Al repartir a caramelos entre ∞ niños, caben a 0 caramelos por niño. a puede valer 0 .
	$\frac{\infty}{a}$	∞	Al repartir ∞ caramelos entre a niños, caben a ∞ caramelos por niño. Incluso a puede ser 0 porque, aún así, no terminaría el reparto nunca.
	$\frac{a}{0}$ ($a \neq 0$)	∞	Al intentar distribuir a caramelos ($a \neq 0$) entre 0 niños, por más que se intente, no termina nunca el reparto.
	$\frac{0}{0}$	INDETERMINADO	INDETERMINADO
	$\frac{\infty}{\infty}$	INDETERMINADO	INDETERMINADO
POTENCIAS	$(+\infty)^n$ ($n > 0$)	$+\infty$	$+\infty$ multiplicado por sí mismo n veces, resulta $+\infty$
	$(+\infty)^n$ ($n < 0$)	0	$(+\infty)^{-n} = \frac{1}{(+\infty)^n} = \frac{1}{\infty} = 0$
	$(+\infty)^{+\infty}$	$+\infty$	$+\infty$ multiplicado por sí mismo $+\infty$ veces, resulta $+\infty$
	$(+\infty)^{-\infty}$	0	$(+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{(+\infty)^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$
	$\sqrt{+\infty}$	$+\infty$	Seguimos teniendo ∞ unidades
	$0^{+\infty}$	0	$0 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0 = 0$
	$0^{-\infty}$	$+\infty$	$0^{-\infty} = 1 / (0^{+\infty}) = 1/0 = \infty$. La base debe ser positiva.
	$a^{+\infty}$ ($a > 1$)	$+\infty$	$2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot \dots = +\infty$
	$a^{-\infty}$ ($a > 1$)	0	$1/a^{+\infty} = 1/\infty = 0$
	$a^{+\infty}$ ($0 < a < 1$)	0	$0,1 \cdot 0,1 \cdot \dots \cdot 0,1 \cdot \dots = 0$
	$a^{-\infty}$ ($0 < a < 1$)	$+\infty$	$1/0 = \infty$
	1^∞	INDETERMINADO	INDETERMINADO
	∞^0	INDETERMINADO	INDETERMINADO
	0^0	INDETERMINADO	INDETERMINADO

Quando estamos ante una de las 7 indeterminaciones, no sabemos el resultado del límite: Hay que efectuar cambios hasta eliminar la indeterminación.