CÁLCULO DE LÍMITES (Resumen)

- **Regla de L'Hôpital**: Si la expresión del límite es un cociente de funciones que produce la **indeterminación** $\frac{0}{0}$ **ó** $\frac{\infty}{\infty}$, cambiamos el límite por la **derivada del numerador partido por la derivada del denominador** (*no es derivada de un cociente*).
- Si la **indeterminación es** $(+\infty)-(+\infty)$ **ó** $(-\infty)-(-\infty)$, se efectúa la suma dentro del límite, buscando una de las dos indeterminaciones anteriores.
- Si la **indeterminación es** $0\cdot\infty$, escribimos el límite en forma de cociente así:

$$\lim f(x)\cdot g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

  Con lo que se transformará en una indeterminación apta para aplicar L´Hôpital.

- La mayoría de los límites habituales se resuelven fácilmente por L'Hôpital. **Si no vamos a usar L´Hôpital hay que tener en cuenta**:
  - **En el infinito**, **los valores de las funciones logarítmicas son despreciables frente a los de las potenciales** (polinomios elevados a un número, o raíces de polinomios) **y polinómicas**, por lo que *éstas últimas deciden el resultado del límite (0 ó* ∞*), salvo el signo*.
  - **En el infinito, los valores de las potenciales o polinómicas son despreciables frente a los de las exponenciales**. Por tanto, según el punto anterior, los valores de las logarítmicas son despreciables frente a los de las exponenciales.

  - Para cualquier **polinomio** $P(x)$, se tiene: $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = \infty$
  - **Cuando** $x\to\infty$, y nos surge la **indeterminación** ∞/∞, en la expresión del límite **todo el numerador puede sustituirse por su término** (sumando) **de mayor grado, y lo mismo con el denominador**. Esto es válido tanto si cada uno de ellos es un polinomio, o si aparecen polinomios elevados a un número, o **dentro de una raíz**. Al simplificar la expresión resultante, solemos tener eliminadas las indeterminaciones.
  - Si obtenemos la **indeterminación** $+\infty - \infty$ y en la expresión del límite tenemos **una resta en la que aparece alguna raíz**, multiplicamos y dividimos por el conjugado de dicha resta.
  - **Cuando** $x\to a$, y tenemos un cociente de polinomios con **indeterminación 0/0**, **descomponemos por Ruffini**, dividiendo entre $x-a$ para dicho a.
  - **Cuando** $x\to a$, y aparecen **restas de raíces con indeterminaciones 0/0**, multiplicamos por el conjugado de dichas restas y aplicamos Ruffini a los polinomios resultantes.
  - Ante la **indeterminación** $\mathbf{1^\infty}$, sustituimos el límite completo de la siguiente forma: $\lim\limits_{x} f(x)^{g(x)} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{s} g(x)[f(x)-1]}$

A continuación resumimos resultados con las 7 indeterminaciones, y otros resultados que no son indeterminados.

RESULTADOS HABITUALES DE LÍMITES EN LOS QUE INTERVIENEN ∞ ó 0

	OPERACIÓN	RESULTADO DEL LÍMITE	REGLA MNEMOTÉCNICA
SUMAS	$\pm\infty \pm a$	$\pm\infty$	Si a ∞ unidades (positivas, negativas o sin signo) le sumamos o restamos una cantidad finita de unidades a, continuamos con las ∞ unidades que teníamos
	$+\infty + \infty$	$+\infty$	Si a +∞ unidades les sumamos otras +∞, seguimos teniendo +∞
	$-\infty - \infty$	$-\infty$	Si a ∞ unidades negativas les añadimos otras ∞ unidades negativas, continuamos teniendo ∞ unidades negativas
	$+\infty - \infty$	INDETERMINADO	INDETERMINADO
PRO-DUCTOS	$\infty \cdot \infty$	∞	∞ (con o sin signo) al cuadrado sigue siendo ∞ (sin signo, o con el resultado correspondiente de la regla de los signos)
	$a \cdot \infty\ (a \neq 0)$	∞	a veces ∞ unidades siguen siendo ∞ unidades (se ha puesto ∞ sin signo, pero se puede aplicar la regla de los signos al resultado).
	$0 \cdot \infty$	INDETERMINADO	INDETERMINADO
COCIENTES	$\frac{a}{\infty}$	0	Al repartir a caramelos entre ∞ niños, caben a 0 caramelos por niño. a puede valer 0.
	$\frac{\infty}{a}$	∞	*Al repartir ∞ caramelos entre* a niños, caben a ∞ caramelos por niño. Incluso a puede ser 0 porque, aún así, no terminaría el reparto nunca.
	$\frac{a}{0}\ (a \neq 0)$	∞	Al intentar distribuir a caramelos ($a \neq 0$) entre 0 niños, por más que se intente, no termina nunca el reparto.
	$\frac{0}{0}$	INDETERMINADO	INDETERMINADO
	$\frac{\infty}{\infty}$	INDETERMINADO	INDETERMINADO
POTENCIAS	$(+\infty)^n\ (n > 0)$	$+\infty$	+∞ multiplicado por sí mismo n veces, resulta +∞
	$(+\infty)^n\ (n < 0)$	0	$(+\infty)^{-n} = \frac{1}{(+\infty)^n} = \frac{1}{\infty} = 0$
	$(+\infty)^{+\infty}$	$+\infty$	+∞ multiplicado por sí mismo +∞ veces, resulta +∞
	$(+\infty)^{-\infty}$	0	$(+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{(+\infty)^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$
	$\sqrt{+\infty}$	$+\infty$	Seguimos teniendo ∞ unidades
	$0^{+\infty}$	0	$0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0 = 0$
	$0^{-\infty}$	$+\infty$	$0^{-\infty} = 1 / (0^{+\infty}) = 1/0 = \infty$. La base debe ser positiva.
	$a^{+\infty}\ (a > 1)$	$+\infty$	$2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot \ldots = +\infty$
	$a^{-\infty}\ (a > 1)$	0	$1/a^{+\infty} = 1/\infty = 0$
	$a^{+\infty}\ (0 < a < 1)$	0	$0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot \ldots \cdot 0{,}1 \cdot \ldots = 0$
	$a^{-\infty}\ (0 < a < 1)$	$+\infty$	$1/0 = \infty$
	1^{∞}	INDETERMINADO	INDETERMINADO
	∞^0	INDETERMINADO	INDETERMINADO
	0^0	INDETERMINADO	INDETERMINADO

Cuando estamos ante una de las 7 indeterminaciones, no sabemos el resultado del límite: Hay que efectuar cambios hasta eliminar la indeterminación.