INTEGRAL INDEFINIDA (Resumen)

- **Propiedades básicas**:
  - $\int ku\,dx = k\int u\,dx$ (una *constante multiplicativa* sale o entra en la integral. Puede estar en el denominador: $\int \frac{1}{k}u\,dx = \frac{1}{k}\int u\,dx$)
  - $\int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$ (una suma en el integrando se puede separar en suma de integrales.)

- **Integrales inmediatas** (consultar, también, la tabla de integrales):
  - $\int dx = x + C$
  - $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
  - $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
  - $\int e^x dx = e^x + C$
  - $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
  - $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$
  - $\int \log_a x\,dx = \frac{1}{\ln a}(x\ln x - x) + C$
  - $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
  - $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
  - $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$
  - $\int (1 + \operatorname{tg}^2 x)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$
  - $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen} x + C$
  - $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C$

- **Integración por cambio de variable**. Llamamos *t* a una expresión de *x* que aparece en el integrando, y cuya derivada también aparece (salvo constantes). Dicha expresión tiene que estar completamente dentro de otra función (seno de la expresión, raíz de la expresión, la expresión elevada a algo, etc), aunque no siempre es así (puede aparecer tal cual) $\Rightarrow$ $dt = t'\,dx$. Sustituimos en el integrando de manera que sólo aparezca t y dt (esto puede requerir despejar *dx* en la expresión $dt = t'\,dx$ y, a veces, despejar *x* en función de *t*). Es decir, en la integral resultante no puede aparecer x ni dx. Al final, hay que deshacer el cambio de variable para restituir *x*.

Ejemplo: $$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left[\begin{array}{l} t = 1+x^2 \to x^2 = t-1 \\ dt = 2x\,dx \to dx = \frac{dt}{2x} \end{array}\right] = \int \frac{x^3}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{t}}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{t}{\sqrt{t}}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{t}{t^{1/2}}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^{1/2}}dt = \frac{1}{2}\int t^{1-\frac{1}{2}}dt - \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{1/2}dt - \frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3} - (1+x^2)^{1/2} + k =$$

$$= \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} - \sqrt{1+x^2} + k$$

- **Integración por partes**. En el integrando aparece un producto de dos funciones (una de ellas puede ser 1). Al menos una de esas dos funciones debemos saberla integrar (con frecuencia, la otra no la sabremos integrar pero sí derivar). Llamamos u a la función que vamos a derivar y dv al resto del integrando (es decir, a la función que vamos a integrar multiplicada por dx). Derivamos u e integramos dv. La fórmula es:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

- **Integrales racionales**. El integrando es un cociente de polinomios: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$
    - Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, dividimos los polinomios:
$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array}$$
Entonces, $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$
La segunda integral ya tiene el numerador con grado estrictamente menor al del denominador.

    - Cuando el grado del numerador es estrictamente menor al del denominador, descomponemos en producto de factores irreducibles el denominador $Q(x)$, hallando las raíces de dicho polinomio (normalmente, por Ruffini). Si alguna de las raíces resultantes lo es, también, del numerador simplificaríamos el radicando.

      Si las raíces son a, b, c,… (supongamos que c es raíz múltiple, y que aparece n veces), el polinomio denominador puede escribirse:

$$Q(x) = M(x-a)(x-b)(x-c)^n\ldots$$

      Donde M es el coeficiente de la máxima potencia de $Q(x)$, que sacaríamos de la integral para que no nos estorbe (supondremos, en adelante que lo hemos hecho, por lo que trabajaremos como si no estuviera, es decir, $M = 1$).

      Cada raíz simple da lugar a una fracción, y cada raíz múltiple da lugar a n fracciones en la expresión:
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{(x-c)^2} + \ldots + \frac{J}{(x-c)^n}$$
      Sumando el segundo miembro de manera que el denominador sea $Q(x)$, que es el m.c.m. de los denominadores, $P(x)$ coincidirá con el numerador que resulte. Dando valores a x (preferiblemente $x = a$, $x = b$, $x = c$, …) encontraremos los valores de A, B, C, … Obtendremos dos tipos de integrales:

        - Las integrales de la forma: $\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + k$.
        - Y las de la forma siguiente, que son inmediatas:
$$\int \frac{1}{(x-c)^n}dx = \int 1\cdot(x-c)^{-n}dx = \frac{(x-c)^{-n+1}}{-n+1} + k$$