MATRICES (Resumen)

- **Nomenclatura**
- $A = (a_{ij})_{m,\,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ es una matriz de **dimensión $m \times n$**. Es decir:
  m filas
  n columnas
  El elemento a_{ij} está en la *fila i* y *columna j*.
- La matriz es **cuadrada** cuando $m = n$ (igual número de filas que de columnas).
- La matriz **traspuesta** de una matriz A, designada por A^t, es la que se obtiene al poner las filas de A como columnas en A^t. Por tanto, si $\dim(A) = m \times n \Rightarrow \dim(A^t) = n \times m$.
- Una matriz es **simétrica** cuando $A = A^t$. Todas las matrices simétricas son cuadradas.
- Una matriz <u>cuadrada</u> se dice **diagonal** si todos los elementos son cero, salvo los de la **diagonal principal**. $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- Una matriz <u>cuadrada</u> se dice **triangular superior** si todos los elementos bajo la diagonal principal son cero, como la adjunta a estas líneas. (Si son *sobre* la diagonal principal los ceros, es *triangular inferior*). $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- Matriz **nula** es aquella cuyos términos son todos cero. Se designa por O_{mxn}.
- Matriz **unidad** es una matriz diagonal cuyos términos son 0 todos, salvo los de la diagonal principal, que valen todos 1. Se designa por I_n. O bien por I, si la dimensión es conocida.

- **Suma de matrices**
- Se suman **término a término** y las matrices deben **tener la misma dimensión**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ b_{21} & b_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

- **Propiedades**:
  - <u>Asociativa</u>: $A + (B + C) = (A + B) + C$ (cuando se suman tres o más matrices, dos de ellas que sean consecutivas se pueden sustituir por su resultado, sin cambiar la posición que ocupaban respecto de las demás).
  - <u>Conmutativa</u>: $A + B = B + A$ (se puede cambiar el orden).
  - <u>Existe elemento neutro</u>: $A + O = O + A$ (la matriz nula, sumada con cualquier otra, resulta ésa otra).
  - <u>Cada matriz tiene una opuesta</u>: $A + (-A) = O$ (cambiando los signos de cada uno de sus elementos se obtiene la opuesta: se designa por $-A$. Sumando la matriz A con su opuesta $-A$ resulta la matriz nula).

- **Producto de una matriz por un número real o producto externo**
- Se multiplica el número real ***k* por cada término** de la matriz, resultando una matriz de la misma dimensión:

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

- **Propiedades**:
  - Asociativa: $a(bA) = (ab)A$ (observar, por ejemplo, que el producto bA es *externo* y ab es el producto de números reales).
  - Distributiva 1: $(a + b)A = aA + bA$ (observar que $a + b$ es suma de números reales, y $aA + bA$ es suma de matrices).
  - Distributiva 2: $a(A + B) = aA + aB$.
  - Elemento unidad: $1A = A$ $(1 \in \mathbb{R})$.

Por tanto, el conjunto de matrices de dimensión $m \times n$, con las operaciones *suma de matrices* y *producto por un número real* es un espacio vectorial sobre R. (Lo es porque cumple las 8 propiedades de las dos operaciones, puesto que ésa es la definición de espacio vectorial).

- **Producto de matrices**
- Para poder multiplicar la matriz A por la B, **el número de columnas de A debe coincidir con el de filas de B**. O sea, que $\dim(A) = m \times n$ y $\dim(B) = n \times p$. La matriz resultante $C = A \cdot B$ es tal que $\dim(C) = m \times p$.
- El elemento de la fila i y columna j de la matriz resultante C proviene de multiplicar **cada elemento de la fila i de A por el correspondiente elemento de la fila j de B y sumar** los resultados:

$$\underset{m \times n}{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}} \cdot \underset{n \times p}{\begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{nj} & \dots \end{pmatrix}} = \underset{m \times p}{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}$$

- **Propiedades**:
  - Asociativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
  - Distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ y $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
  - Elemento unidad: $A \cdot I = A$ y $I \cdot A = A$ (I = matriz unidad).
  - No es conmutativo: $A \cdot B \neq B \cdot A$, en general. Hablaremos de multiplicar la matriz B por la matriz A por la izquierda o por la derecha.
  - Traspuesta del producto: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
  - Matriz inversa: Para *algunas* matrices *cuadradas* existe cierta matriz tal que multiplicada por la matriz original resulta la matriz unidad. Dicha matriz, que designamos por A^{-1}, es denominada *matriz inversa de* A:
$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$
    - Las matrices cuadradas que tienen inversa se denominan **regulares**.
    - La inversa de una matriz regular es **única**.
    - **La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que *su determinante sea distinto de cero*.**
- No existe la operación división de matrices: **No se puede dividir una matriz entre otra**.
- Por último, $(A + B)^t = A^t + B^t$