ESPACIOS VECTORIALES DE MATRICES (Resumen)

- **Espacio vectorial de matrices**
- Todas las matrices de la misma dimensión $m \times n$ forman un espacio vectorial sobre R con las operaciones *suma* de matrices y *producto* de una matriz por un número real, puesto que dichas operaciones tienen las 8 propiedades que requiere la definición de espacio vectorial (para la suma: asociativa, elemento neutro, elemento opuesto y conmutativa; para el producto externo: asociativa, distributivas 1 y 2, elemento unidad).
- Por tanto, las matrices son los *vectores*, y los números reales, los *escalares* (se llama así a los elementos de R, el conjunto asociado al de vectores).
- Hay infinitos espacios vectoriales de matrices: uno por cada dimensión posible $m \times n$.

- **Combinaciones lineales**
- Dado un conjunto de matrices de la misma dimensión (es decir, vectores del mismo espacio vectorial), la matriz resultante de multiplicar cada una de ellas por algún número real y sumar los resultados se dice que es una **combinación lineal** de dichas matrices (vectores) con coeficientes los números reales empleados:
  Si $B = a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots + a_nA_n \;\Rightarrow\; B$ es c.l. de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ con coefs. $a_1, \ldots, a_n$.
- Dado un conjunto de n matrices: $A_1, A_2, \ldots, A_n$, si una cualquiera de ellas se puede obtener como combinación lineal de las restantes (con ciertos coeficientes), dicha matriz se dice que **depende linealmente** de las demás. Y el conjunto es **linealmente dependiente**. Si eso ocurre, entonces, cualquiera de ellas se puede expresar como combinación lineal de las restantes.
- En caso contrario, es decir, si no es posible obtener ninguna de ellas como combinación lineal de las demás, el conjunto es **linealmente independiente**.

- **Rango de una matriz**
- Las filas de una matriz $m \times n$ también son matrices (de dimensión $1 \times n$). Por tanto, son vectores del mismo espacio vectorial, y puede hablarse de combinaciones lineales entre ellas, de dependencia e independencia lineal.
- Igual ocurre con las columnas: son matrices de dimensión $m \times 1$.
- **Rango** de una matriz es el máximo número de filas de dicha matriz que son linealmente independientes. Coincide con el máximo número de columnas que son linealmente independientes.
- El rango de una matriz, por tanto, no varía si se añaden o suprimen filas o columnas que dependan linealmente (es decir, que sean combinación lineal) de las demás. Tampoco lo hace si alguna fila es multiplicada por un número real.