# DETERMINANTES (Resumen)

- **Definición**
- El **determinante** de una matriz cuadrada $n \times n$ es un número. Se obtiene sumando todos los posibles productos que se pueden formar tomando $n$ elementos de la matriz, de manera que, en cada producto, de cada fila haya un término y sólo uno, y de cada columna, un término y sólo uno. Dichos productos van precedidos de signo $+$ ó $-$ según determinado criterio. Como trabajar con esta definición (que no hemos completado) es muy complicado, se usan determinadas propiedades, que se deducen de la definición, para calcular los determinantes.
  El determinante de una matriz $1 \times 1$ es igual al único elemento de que consta dicha matriz.

- **Determinante de orden 2**
- $\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

- **Determinante de orden 3 (Regla de Sarrus)**
- $\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

  $= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$
  $- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$

  Es decir:

  Productos a los que *no se altera el signo* (+): $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

  Productos a los que *se cambia el signo* (–): $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

- **Propiedades de los determinantes**

1) $|A| = |A^t|$
2) Si una fila o columna es de ceros, el determinante vale 0.
3) Al intercambiar dos filas (o dos columnas) el determinante cambia de signo.
4) Si dos filas (o dos columnas) son iguales, el determinante vale 0.
5) Al multiplicar toda una fila (o toda una columna) por un número, el determinante resultante es el anterior multiplicado por dicho número. A la inversa, puede extraerse *factor común* un número de una determinada fila (o columna), quedando todo el determinante multiplicado por dicho factor.
6) Si dos filas (o dos columnas) son proporcionales (una es la otra multiplicada por un número), el determinante vale 0.

7) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Igual ocurre con columnas.

8) Si a una fila le sumamos una combinación lineal de otras filas, el determinante no varía. Igual ocurre si a una columna se le suma una combinación lineal de otras columnas.

9) Si una fila es combinación lineal de otras filas, el determinante vale 0. Igual ocurre si una columna es c.l. de otras columnas. Es recíproco, es decir, si el determinante vale 0, alguna fila es c.l. de otras y alguna columna lo es de otras.

10) El determinante de un producto de matrices es el producto de los respectivos determinantes: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

## • Menores y Adjuntos

- Dada una matriz no necesariamente cuadrada, un **menor** es el determinante que resulta al quedarse sólo con los elementos que están en $n$ filas y en $n$ columnas determinadas, suprimiendo las restantes filas y columnas.
  Por ejemplo, de la matriz siguiente obtenemos un menor de orden 3 quedándonos sólo con los elementos que están en las filas 2, 3 y 5 y, a la vez, en las columnas 1, 5 y 6. Es lo mismo que suprimir las filas y columnas restantes (las hemos tachado):

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -3 & 0 & 5 & 1 & -6 \\ 4 & 3 & -5 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 4 & 7 & -6 \\ 2 & 0 & -3 & 4 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 4 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 120$$

- En una matriz cuadrada, el **menor complementario** de un elemento $a_{ij}$ es el menor resultante de suprimir la fila $i$ y la columna $j$. Se designa por $M_{ij}$.
  Por ejemplo, el menor complementario de $a_{23}$ en la siguiente matriz es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- En una matriz cuadrada, el **adjunto** de un elemento $a_{ij}$ es: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Es decir, es el menor complementario de dicho elemento, pero se le cambia el signo si la suma $i + j$ da impar (porque entonces $(-1)^{i+j}$ es negativo). Por tanto, los menores complementarios a los que se cambia el signo para obtener el adjunto son los señalados con signo menos:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

- **Cálculo de determinantes de cualquier orden**
- **TEOREMA (Propiedad 11 de los determinantes)**: El determinante de una matriz cualquiera es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila cualquiera por sus adjuntos respectivos. Igual para columnas. A esto se le llama desarrollar el determinante por adjuntos de una determinada fila (o columna).
  Este teorema permite calcular determinantes de cualquier orden, usado junto con la propiedad 8 de los determinantes:
  Buscamos, preferiblemente, un elemento que valga 1. Se hacen 0 todos los elementos de su fila salvo él, lo que se consigue sumando a las diferentes columnas combinaciones lineales de la columna en la que está dicho elemento. Después, se desarrolla el determinante por adjuntos de dicha fila.
  El procedimiento es similar para su columna.
  Ejemplo. Aunque sería, en este caso, posible por Sarrus, vamos a ilustrar cómo se procedería cuando no hay ningún 1. Se necesita saber el procedimiento para determinantes de orden 4 ó más. Podríamos hacerlo así:
  Método 1: Si la fila sustituida (la que se escribe en primera posición) se multiplica por un número, todo el determinante ha quedado multiplicado por dicho número, por lo que hay que compensarlo multiplicándolo por el inverso de dicho número. Buscamos *ceros* en $C_2$:

  $7F_2 + 5F_1$
  $7F_3 - 9F_1$

$$\begin{vmatrix} 13 & -7 & 11 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & -9 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 13 & -7 & 11 \\ 79 & 0 & 34 \\ -82 & 0 & -57 \end{vmatrix} = -\frac{1}{49}(-7)\begin{vmatrix} 79 & 34 \\ -82 & -57 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7}(-79\cdot 57 + 34\cdot 82) = -245$$

  Método 2: Es más laborioso. Consiste en que siempre se puede conseguir un 1 extrayendo factor común por la propiedad 5 de los determinantes. La aplicación de la misma propiedad puede evitar la aparición de fracciones dentro del determinante. Buscamos *ceros* en $F_2$:

  2 factor común de $F_2$ | El 2 exterior lo multiplicamos por $C_2$ | Introducimos 2 y ½, que se compensan

$$\begin{vmatrix} 13 & -7 & 11 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & -9 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 13 & -7 & 11 \\ 1 & 5/2 & -3/2 \\ 5 & -9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -14 & 11 \\ 1 & 5 & -3/2 \\ 5 & -18 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 13 & -14 & 11 \\ 1 & 5 & -3/2 \\ 5 & -18 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 13 & -14 & 22 \\ 1 & 5 & -3 \\ 5 & -18 & 12 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 8 & -79 & 61 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -43 & 27 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -79 & 61 \\ -43 & 27 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(-79\cdot 27 + 61\cdot 43) = -245$$

  El 2 exterior lo multiplicamos por $C_3$ | $C_2-5C_1$, $C_3+3C_1$ | Por adjuntos de $F_2$

- **Consecuencia del teorema (Propiedad 12 de los determinantes)**: Si los elementos de una fila (o columna) se multiplican por los respectivos adjuntos de otra paralela, el resultado es 0.

- **Cálculo del rango de una matriz *A* mediante determinantes (*orlando* menores)**

1) Si la matriz es nula, su rango es 0 y hemos terminado. En caso contrario, seguimos.
2) Buscamos un menor fácil de orden 2 no nulo: *M*. Si esto no es posible, el r(*A*) = 1 y hemos terminado.
3) Elegimos una fila de *A* que no esté en *M*. *Orlamos M*: completamos un nuevo menor con elementos de dicha fila y una columna que no esté en *M*. Si dicho menor vale 0, elegimos otra columna, y así hasta completar todas las columnas de *A*, siempre con dicha fila.
   a) Si todos esos menores valen 0, la fila elegida es combinación lineal de las filas que están en *M*, y puede ignorarse a efectos del cálculo del rango. En ese caso, repetimos el paso 2 con otra fila, y así hasta completar todas las filas de *A*.
   b) Si alguno de esos menores es no nulo, el rango de *A* es la dimensión de dicho menor, como mínimo. Llamamos *M* a dicho nuevo menor no nulo y repetimos el paso 3 con otra fila.
4) El rango de *A* será la dimensión del máximo menor no nulo *M* encontrado con este procedimiento. Las filas y columnas de *A* que figuran en *M* son linealmente independientes. A dicho menor *M* se le llama **menor principal**. Las filas y columnas que no están en *M* son c.l. de las que sí aparecen en *M*.

- **Cálculo del rango de una matriz *A* dependiente de parámetros**

Cuando hay parámetros en *A*, es decir, valores variables, es mejor proceder a la inversa: En lugar de buscar menores cada vez de mayor dimensión, buscamos el menor de mayor dimensión posible y que contenga el mínimo de parámetros que se pueda. Vemos para qué valores de los parámetros el menor es no nulo. Para esos valores, el rango es máximo (la dimensión del menor que tenemos).
Cada uno de los valores de los parámetros que anulan el menor, es sustituido en la matriz, con lo que seguramente ya la conoceremos completamente. Estudiamos su rango, entonces, de la forma habitual.

- **Cálculo del rango de una matriz A por el método de Gauss**

Si la matriz es nula, su rango es 0. En caso contrario, la *triangularizamos*. El proceso es:
1) Paso 1. Elegimos una fila que designaremos por *F*. Elegimos una columna. A partir de la fila *F*, conseguiremos *ceros* en todas las posiciones de la columna salvo la correspondiente a *F*. Se hará mediante transformaciones lineales de filas: multiplicamos la fila a sustituir por un número, y la fila elegida anteriormente *F* por otro, de manera que sumen 0 en el cruce de la fila a sustituir con la columna elegida. Si alguno de los dos números que multiplican a estas dos filas es negativo, será el que multiplique a la fila *F*. Lo hacemos hasta que haya 0 en toda la columna salvo en *F*, como se ha dicho.
2) Paso 2. Repetimos el proceso para el resto de filas, pero ignorando la fila *F* anterior. Es decir, elegimos otra fila *F '* y hacemos 0 todas las posiciones de determinada columna salvo la correspondiente a *F '* (y a *F*, que no se toca más).
3) Se repiten tantos pasos como filas haya menos uno. Tras ello, la matriz está **triangularizada**.
4) Si alguna fila resulta completa de *ceros*, es porque es combinación lineal de las restantes: se *elimina* a efectos de calcular el rango. **El rango es el número de filas resultantes no completamente nulas**.

Cuando hay parámetros, es mejor calcular el rango *orlando menores*.

- **Cálculo de la matriz inversa de *A***
- La matriz inversa de $A$, designada por $A^{-1}$, existe si y sólo si $|A| \neq 0$.
- Recordar que sólo las matrices cuadradas pueden tener inversa.
- $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t)$. Por tanto, el procedimiento es:
  1) Hallamos $|A|$ y comprobamos que es no nulo.
  2) Hallamos $A^t$.
  3) Sustituimos cada elemento de $A^t$ por *su adjunto*. Ésa es $\text{Adj}(A^t)$.
  4) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t)$.