

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (Resumen)

- **Expresión matricial**

- El sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas siguiente:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m \end{aligned} \right\}$$

se expresa en forma matricial, así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$$

que, abreviadamente, es: $A \cdot X = C$.

- La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se llama **matriz de los coeficientes**.

- La matriz $A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right)$ se denomina **matriz ampliada**.

- Los valores c_1, c_2, \dots, c_m se llaman **términos independientes**. C es la matriz de los términos independientes.

- **Tipos de sistemas de ecuaciones lineales**

- Si el sistema tiene alguna solución, se dice **compatible**. En caso contrario, **incompatible**.
- Si el sistema tiene solución única, se dice **compatible determinado**. Si tiene infinitas soluciones, **compatible indeterminado**. No hay más posibilidades en lo que se refiere a sistemas compatibles.
- Si los términos independientes (c_1, c_2, \dots, c_m) valen todos 0, el sistema se llama **homogéneo**. *Los sistemas homogéneos son siempre compatibles*, pues todos ellos tienen como solución $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$, a la que se denomina *solución trivial*. Pueden ser compatibles determinados o indeterminados, pero no incompatibles.

- **Teorema de Rouché, o de Rouché-Frobenius**

- El sistema $A \cdot X = C$ es compatible $\Leftrightarrow r(A) = r(A')$
- Caso de que sea compatible, si el rango común es igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado. Si es menor, es compatible indeterminado.

Notas:

- 1) El rango común cuando el sistema es compatible, no puede ser mayor que el número de incógnitas (pues éste es el número de columnas de A , y el rango de una matriz es el número de columnas, y de filas, linealmente independientes).
- 2) Si $r(A) \neq r(A')$ es porque $r(A) < r(A')$, pues A' es idéntica a A pero con una columna más, que será la que no dependa linealmente del resto de columnas.

- **Regla de Cramer**

- Si:

- 1) $m = n$ (igual número de ecuaciones que de incógnitas) y
- 2) $|A| \neq 0$ (o sea, el sistema es compatible determinado, porque A' sólo tiene n filas),

entonces, las soluciones son:

$$x_1 = \frac{|A_{x_1}|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_{x_2}|}{|A|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{|A_{x_n}|}{|A|}$$

donde A_{x_i} es la matriz resultante de sustituir en la matriz A la columna de los coeficientes de x_i por la columna de los términos independientes.

- **Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales cualesquiera**

- Calculamos $r(A)$ y $r(A')$ y los comparamos.
 - Si $r(A) \neq r(A')$, el sistema es incompatible y no tiene solución.
 - Si $r(A) = r(A')$, entonces:
 - Si $r(A) = r(A') = n$, el sistema es compatible determinado y se puede resolver por Cramer.
 - $r(A) = r(A') < n$, el sistema es compatible indeterminado.
 - ❖ Las incógnitas que no forman parte del menor principal se pasan al segundo miembro (el de los términos independientes).
 - ❖ Cada una de ellas se considera un parámetro, es decir, una letra cuyo valor podemos elegir arbitrariamente, y que tratamos como si fuera un número conocido.
 - ❖ Queda un nuevo sistema con una matriz de los coeficientes cuadrada cuyo determinante es no nulo (el menor principal).
 - ❖ Por tanto, para cada valor arbitrario de los parámetros, el sistema sería compatible determinado y se puede resolver por Cramer.
 - ❖ Se obtienen infinitas soluciones, porque para cada conjunto de valores arbitrarios de los parámetros se obtiene un conjunto de soluciones diferente.
- Si en el sistema de ecuaciones inicial hay parámetros, se realiza el estudio del rango procediendo a la inversa, es decir, de mayor a menor dimensión, tal como se indicó en el documento de *Determinantes*.

- **Discusión y resolución por el método de Gauss**

- Se triangulariza la matriz ampliada como se explicó en el documento de Determinantes cuando explicamos cómo calcular el rango de una matriz por el método de

Gauss, pero teniendo en cuenta que la columna correspondiente a los términos independientes no puede ser, en ningún paso, la que se trabaje para convertir en ceros todas sus posiciones menos la de la fila usada en el paso actual y en los anteriores. Es decir, en realidad triangularizamos la parte de la matriz de los coeficientes, pero trabajando con la matriz ampliada completa.

- Tras *triangularizar*:
 - Si alguna fila está compuesta íntegramente de ceros salvo la posición correspondiente a los términos independientes, el sistema es **incompatible**: No tiene solución y hemos terminado.
 - Si alguna fila resulta estar completamente compuesta de ceros, se elimina: la ecuación correspondiente es combinación lineal del resto y no aporta información al sistema.
 - Si tras ello resulta igual número de ecuaciones que de incógnitas, el sistema es **compatible determinado**. Para resolverlo, lo volvemos a escribir completo según la matriz ampliada ya triangularizada, y vamos hallando los valores de las incógnitas, empezando por la ecuación que consta de una sola incógnita y sustituyendo en las restantes: en la que tiene esa incógnita y otra, en la que las dos incógnitas conocidas hasta ahora aparecen con una tercera, etc.
 - Si, por el contrario, el número de ecuaciones resultantes es menor que el número de incógnitas, el sistema es **compatible indeterminado**. Quedarán más incógnitas que ecuaciones, de modo que, para resolverlo, escribimos el sistema correspondiente a la matriz triangularizada y pasamos al segundo miembro las incógnitas como exceden, considerándolas *parámetros*, es decir, como si cada una tuviera un valor conocido elegido libremente por nosotros. Así, el sistema sería como si fuera compatible determinado y se resuelve como se dijo antes. Para cada valor arbitrario de las incógnitas-parámetros, sale un conjunto de soluciones, y es por ello por lo que el sistema tiene infinitos conjuntos de soluciones.