

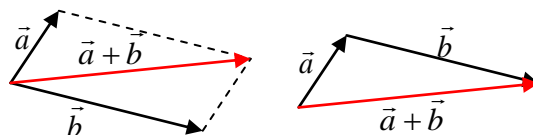
VECTORES EN EL ESPACIO

- **Espacio vectorial**

- Un **vector** es una pareja ordenada de puntos en el espacio (*origen y extremo*). Todos los vectores que son iguales en *módulo, dirección y sentido* se consideran el mismo vector. Por tanto, un vector dado puede dibujarse con origen en cualquier punto del espacio.

- El **vector nulo** es aquél en el que origen y extremo coinciden. No tiene dirección ni sentido.

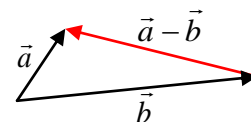
- La **suma** de vectores se define gráficamente mediante la *regla del paralelogramo*.



- El **producto de un vector \vec{v} por un número real k** es otro vector, cuyo módulo es $|k|$ veces el módulo de \vec{v} , su dirección es la misma que la de \vec{v} , y su sentido coincide con el de \vec{v} si k es positivo, y es opuesto si k es negativo. A esta operación se la llama, también, *producto externo*. Cuando hablamos de números reales en combinación con vectores, a los números reales se les denomina, también, *escalares*. De modo que esta operación es, también, el *producto de un vector por un escalar*. Se tiene que: $k\vec{v} = \vec{v}k$.

- El conjunto de los vectores en el espacio V_3 , dotado de las operaciones *suma* y *producto externo*, es un **espacio vectorial** sobre \mathbb{R} , porque la operación suma es asociativa, conmutativa, existe el elemento neutro (el vector nulo) y el elemento opuesto de cada vector no nulo, y el producto externo tiene las propiedades asociativa, distributivas 1 y 2, y elemento unidad.

- La **diferencia** de vectores es la suma de un vector con el opuesto de otro. Gráficamente se puede obtener como se indica en la ilustración adjunta: Para hallar $\vec{a} - \vec{b}$ los ponemos con origen común y dibujamos el vector que va desde el extremo del segundo (\vec{b}) al extremo del primero (\vec{a}).



- **Teorema:** Dos vectores no nulos son proporcionales (uno es múltiplo del otro) si, y sólo si tienen la misma dirección.

- **Coordenadas**

- **Combinación lineal** de un grupo de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, con *coeficientes* los números reales k_1, k_2, \dots, k_n , es el vector resultante de la operación: $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \dots + k_n\vec{v}_n$. (Nótese que cada sumando es un *producto externo*, que siempre da un vector, de modo que la combinación lineal es una suma de vectores, por lo que el resultado final es un vector).

- Si en un grupo de vectores hay alguno que se puede obtener como combinación lineal del resto, el grupo de vectores se dice **linealmente dependiente**. Dicho vector *depende linealmente* de los demás. En caso contrario, el grupo es **linealmente independiente**.

- El vector nulo no puede formar parte de un conjunto de vectores linealmente independiente. O sea, dicho conjunto sería linealmente dependiente con toda seguridad.

- Dos vectores no nulos que tengan distinta dirección son siempre linealmente independientes. Dos vectores no nulos y paralelos o alineados (o sea, de igual dirección) son siempre linealmente dependientes (uno es múltiplo del otro).
- Tres vectores coplanarios (es decir, que están en un mismo plano) son siempre linealmente dependientes. Pero tres vectores no nulos y no coplanarios son siempre linealmente independientes.
- En el espacio V_3 , tres vectores no nulos y no coplanarios constituyen una **base**. Si los tres vectores son perpendiculares entre sí, la base se dice **ortogonal**. Si, además, tienen el mismo módulo (que se toma como unidad), la base es **ortonormal**.
- **Teorema:** Dada una base cualquiera $B = \{ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \}$, todo vector \vec{v} de V_3 se puede expresar como combinación lineal de los vectores de dicha base. Y los coeficientes de dicha combinación lineal son únicos, es decir, no hay otros coeficientes que den una combinación lineal cuyo resultado sea dicho \vec{v} :

$$\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}, \text{ siendo únicos } a, b, c$$

Por tanto, fijada la base B , el vector \vec{v} se identifica con la terna (a, b, c) . A dichos números se les llama **coordenadas** de \vec{v} . Por tanto:

$$\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = (a, b, c)$$

- Suponemos, a partir de ahora, que tenemos fijada una *base ortonormal* (o *canónica*) $B = \{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$. Todo vector queda, entonces, identificado por sus coordenadas: una terna de números reales.
 - Operaciones con coordenadas. Si $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$
 - Suma: $\vec{u} + \vec{v} = (a + a', b + b', c + c')$; $\vec{u} - \vec{v} = (a - a', b - b', c - c')$
 - Producto externo: $k\vec{u} = \vec{u}k = (ka, kb, kc)$
 - Combinación lineal: $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c')$
 - Saber si dos vectores son linealmente independientes: Según lo ya citado, serán linealmente dependientes si están alineados, lo que se traduce en que uno es múltiplo del otro. Si ninguna coordenada es nula, equivale a: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Si alguna coordenada es nula, tiene que existir un único número real k , tal que:

$$k(a, b, c) = (ka, kb, kc) = (a', b', c') \Leftrightarrow ka = a' \text{ y } kb = b' \text{ y } kc = c'$$
 En general, $\text{rango} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$ son l.dep.
- Si no sucede nada de eso, son linealmente independientes o, lo que es lo mismo, tienen distinta dirección.

• Producto escalar

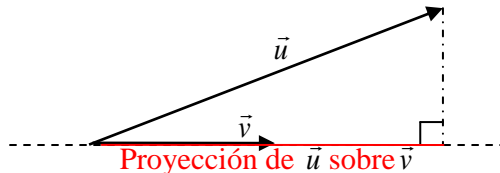
- **Definición:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$, siendo α el ángulo entre ambos vectores (da igual el ángulo del primer vector al segundo, o a la inversa). Si alguno de los dos vectores es nulo, el producto escalar vale 0. Observar que *el resultado del producto escalar es un número real* (o sea, un *escalar*).
- **Propiedades:**
 - 1) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$. El primer miembro significa el producto escalar del vector por sí mismo; el segundo miembro es el cuadrado de un número real (el módulo del vector). Esta fórmula sirve para resolver problemas en los que se relacionan productos escalares y módulos, pidiéndonos hallar unos u otros.

2) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$, fórmula que se obtiene despejando en la definición y que sirve para hallar el ángulo que forman dos vectores. De los dos resultados posibles (α y $360 - \alpha$), se toma el menor.

3) Dados dos vectores *no nulos*, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Este teorema es indispensable como condición de perpendicularidad.

4) Proyección de \vec{u} sobre \vec{v} =

$$= \text{Proy}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$



5) Conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

6) Asociativa: $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$. Observar que en estas expresiones hay productos escalares, productos externos y un producto de números reales.

7) Distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

8) Dada una base ortonormal $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, se tiene: el producto escalar de cada uno de los tres vectores de la base ortonormal por sí mismo, vale 1; el producto de uno de ellos por cualquiera de los otros dos, vale 0.

9) Expresión analítica del producto escalar respecto de una base ortonormal:

Ésta es la manera habitual de calcular el producto escalar de dos vectores conocidas sus coordenadas. Si las coordenadas de dos vectores respecto de la base ortonormal son Si $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$, se tiene:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'$$

Ésta es una fórmula fundamental, puesto que siempre trabajaremos con bases ortonormales.

Aplicando esto a la propiedad 1, se tiene:

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \text{ siendo } \vec{u} = (a, b, c).$$

Ésta es la forma de calcular el módulo de un vector a partir de sus coordenadas.

Todas estas propiedades son importantes. Pero, en especial, las 1, 2, 3 y 9.

• Producto vectorial

• Definición: El p.v. de dos vectores \vec{u} y \vec{v} , representado por $\vec{u} \times \vec{v}$, es un *vector* definido por:

◦ Si alguno de ellos es el vector nulo, el resultado es, también, el vector nulo.

◦ En caso contrario,

▪ Módulo: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| |\sin \alpha|$, siendo α el menor ángulo que va desde \vec{u} a \vec{v}

▪ Dirección: Perpendicular al plano que contiene a \vec{u} y a \vec{v}

▪ Sentido: Según la *regla de la mano derecha* desde \vec{u} hasta \vec{v} .

• Propiedades

1) Anticonmutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

2) Asociativa con un escalar: $(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (k\vec{v})$. Pero no tiene la propiedad asociativa si sólo empleamos productos vectoriales: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ en general.

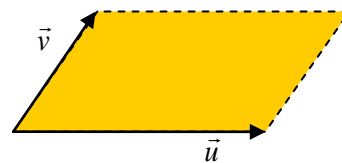
3) Para cualquier vector \vec{u} : $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$.

4) Distributiva: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

Y las más importantes:

5) El área del paralelogramo determinado por \vec{u} y \vec{v} es el módulo del producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

Por tanto, el área del triángulo formado por el vértice común a \vec{u} y \vec{v} y los extremos de cada uno de dichos vectores es la *mitad* del área del paralelogramo.



6) Para obtener un vector perpendicular a otros dos vectores dados (no nulos ni alineados) se calcula su producto vectorial.

7) Expresión analítica: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix} \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$, siendo

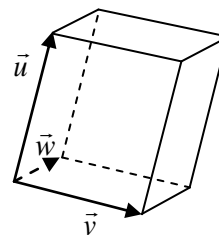
$\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$ respecto de una base ortonormal. Hay que tener en cuenta que la última expresión es sólo una regla mnemotécnica y no un verdadero determinante, puesto que un determinante no puede contener vectores.

• **Producto mixto de tres vectores**

• Definición: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

• Expresión analítica: Si $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (a', b', c')$ y $\vec{w} = (a'', b'', c'')$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$



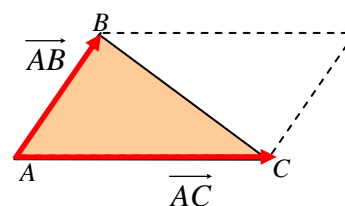
• Interpretación geométrica: Su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} .

• $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ si y sólo si los tres vectores son coplanarios.

• **Área de un triángulo**

El área del triángulo delimitado por tres puntos A, B, C , es la mitad del área del paralelogramo de la figura:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$



• **Volumen del tetraedro**

El volumen del tetraedro delimitado por cuatro puntos conocidos A, B, C y D es (1/6 del paralelepípedo):

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|$$

