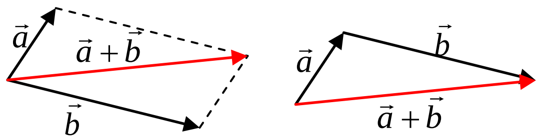
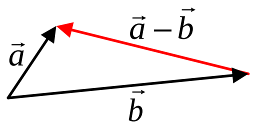
VECTORES EN EL ESPACIO

- ## Espacio vectorial
- Un **vector** es una pareja ordenada de puntos en el espacio (*origen* y *extremo*). Todos los vectores que son iguales en *módulo*, *dirección* y *sentido* se consideran el mismo vector. Por tanto, un vector dado puede dibujarse con origen en cualquier punto del espacio.
- El **vector nulo** es aquél en el que origen y extremo coinciden. No tiene dirección ni sentido.
- La **suma** de vectores se define gráficamente mediante la *regla del paralelogramo*.



- El **producto de un vector** $\vec{v}$ **por un número real** $\boldsymbol{k}$ es otro vector, cuyo módulo es $|k|$ veces el módulo de $\vec{v}$, su dirección es la misma que la de $\vec{v}$, y su sentido coincide con el de $\vec{v}$ si k es positivo, y es opuesto si k es negativo. A esta operación se la llama, también, *producto externo*. Cuando hablamos de números reales en combinación con vectores, a los números reales se les denomina, también, *escalares*. De modo que esta operación es, también, el *producto de un vector por un escalar*. Se tiene que: $k\vec{v} = \vec{v}\,k$.
- El conjunto de los vectores en el espacio V_3, dotado de las operaciones *suma* y *producto externo*, es un **espacio vectorial** sobre R, porque la operación suma es asociativa, conmutativa, existe el elemento neutro (el vector nulo) y el elemento opuesto de cada vector no nulo, y el producto externo tiene las propiedades asociativa, distributivas 1 y 2, y elemento unidad.
- La **diferencia** de vectores es la suma de un vector con el opuesto de otro. Gráficamente se puede obtener como se indica en la ilustración adjunta: Para hallar $\vec{a}-\vec{b}$ los ponemos con origen común y dibujamos el vector que va desde el extremo del segundo ($\vec{b}$) al extremo del primero ($\vec{a}$).



- **Teorema**: Dos vectores no nulos son proporcionales (uno es múltiplo del otro) si, y sólo si tienen la misma dirección.

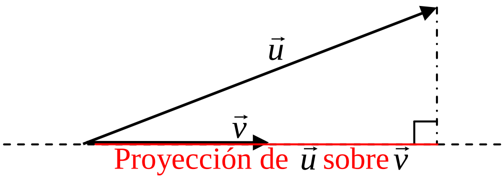
- ## Coordenadas
- **Combinación lineal** de un grupo de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, con *coeficientes* los números reales k_1, k_2, …, k_n, es el vector resultante de la operación: $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_n\vec{v}_n$. (Nótese que cada sumando es un *producto externo*, que siempre da un vector, de modo que la combinación lineal es una suma de vectores, por lo que el resultado final es un vector).
- Si en un grupo de vectores hay alguno que se puede obtener como combinación lineal del resto, el grupo de vectores se dice **linealmente dependiente**. Dicho vector *depende linealmente* de los demás. En caso contrario, el grupo es **linealmente independiente**.
- El vector nulo no puede formar parte de un conjunto de vectores linealmente independiente. O sea, dicho conjunto sería linealmente dependiente con toda seguridad.

- Dos vectores no nulos que tengan distinta dirección son siempre linealmente independientes. Dos vectores no nulos y paralelos o alineados (o sea, de igual dirección) son siempre linealmente dependientes (uno es múltiplo del otro).
- Tres vectores coplanarios (es decir, que están en un mismo plano) son siempre linealmente dependientes. Pero tres vectores no nulos y no coplanarios son siempre linealmente independientes.
- En el espacio V_3, tres vectores no nulos y no coplanarios constituyen una **base**. Si los tres vectores son perpendiculares entre sí, la base se dice **ortogonal**. Si, además, tienen el mismo módulo (que se toma como unidad), la base es **ortonormal**.
- **Teorema**: Dada una base cualquiera $B = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, todo vector $\vec{v}$ de V_3 se puede expresar como combinación lineal de los vectores de dicha base. Y los coeficientes de dicha combinación lineal son únicos, es decir, no hay otros coeficientes que den una combinación lineal cuyo resultado sea dicho $\vec{v}$:
$$\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}\text{, siendo únicos } a, b, c$$
Por tanto, fijada la base B, <u>el vector $\vec{v}$ se identifica con la terna (a, b, c)</u>. A dichos números se les llama **coordenadas** de $\vec{v}$. Por tanto:
$$\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = (a, b, c)$$
- Suponemos, a partir de ahora, que tenemos fijada una *base ortonormal* (o *canónica*) $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Todo vector queda, entonces, identificado por sus coordenadas: una terna de números reales.
- Operaciones con coordenadas. Si $\vec{u} = (a,b,c)$ y $\vec{v} = (a',b',c')$
  - <u>Suma</u>: $\vec{u} + \vec{v} = (a+a', b+b', c+c')$; $\vec{u} - \vec{v} = (a-a', b-b', c-c')$
  - <u>Producto externo</u>: $k\vec{u} = \vec{u}k = (ka, kb, kc)$
  - <u>Combinación lineal</u>: $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c')$
  - <u>Saber si dos vectores son linealmente independientes</u>: Según lo ya citado, serán linealmente dependientes si están alineados, lo que se traduce en que uno es múltiplo del otro. Si ninguna coordenada es nula, equivale a: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Si alguna coordenada es nula, tiene que existir un único número real k, tal que:
  $$k(a, b, c) = (ka, kb, kc) = (a', b', c') \Leftrightarrow ka = a' \text{ y } kb = b' \text{ y } kc = c'$$
  En general, *rango* $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \vec{u} = (a,b,c)$ y $\vec{v} = (a',b',c')$ son l.dep.
  Si no sucede nada de eso, son linealmente independientes o, lo que es lo mismo, tienen distinta dirección.

- **Producto escalar**
- **Definición**: $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$, siendo α el ángulo entre ambos vectores (da igual el ángulo del primer vector al segundo, o a la inversa). Si alguno de los dos vectores es nulo, el producto escalar vale 0. Observar que *el resultado del producto escalar es un número real* (o sea, un *escalar*).
- **Propiedades**:
  1) $\boxed{\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2}$. El primer miembro significa el producto escalar del vector por sí mismo; el segundo miembro es el cuadrado de un número real (el módulo del vector). Esta fórmula sirve para resolver <u>problemas en los que se relacionan productos escalares y módulos</u>, pidiéndonos hallar unos u otros.

2) $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$, fórmula que se obtiene despejando en la definición y que sirve para hallar el ángulo que forman dos vectores. De los dos resultados posibles (α y 360 – α), se toma el menor.
3) Dados dos vectores *no nulos*, $\boxed{\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0}$. Este teorema es indispensable como condición de perpendicularidad.
4) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ =

$$= \text{Proy}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$



5) Conmutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
6) Asociativa: $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(k\vec{v})$. Observar que en estas expresiones hay productos escalares, productos externos y un producto de números reales.
7) Distributiva: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
8) Dada una base ortonormal $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, se tiene: el producto escalar de cada uno de los tres vectores de la base ortonormal por sí mismo, vale 1; el producto de uno de ellos por cualquiera de los otros dos, vale 0.
9) Expresión analítica del producto escalar respecto de una base ortonormal: Ésta es la manera habitual de calcular el producto escalar de dos vectores conocidas sus coordenadas. Si las coordenadas de dos vectores respecto de la base ortonormal son Si $\vec{u}=(a,b,c)$ y $\vec{v}=(a',b',c')$, se tiene:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = a\cdot a' + b\cdot b' + c\cdot c'}$$

Ésta es una fórmula fundamental, puesto que siempre trabajaremos con bases ortonormales.
Aplicando esto a la propiedad 1, se tiene:

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} \;\Rightarrow\; \boxed{|\vec{u}| = +\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = +\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \text{ siendo } \vec{u}=(a,b,c).$$

Ésta es la forma de calcular el módulo de un vector a partir de sus coordenadas.

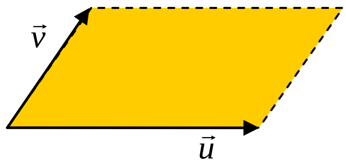
Todas estas propiedades son importantes. Pero, en especial, las 1, 2, 3 y 9.

- **Producto vectorial**
- Definición: El p.v. de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, representado por $\vec{u}\times\vec{v}$, es un *vector* definido por:
  - Si alguno de ellos es el vector nulo, el resultado es, también, el vector nulo.
  - En caso contrario,
    - Módulo: $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,|\text{sen }\alpha|$, siendo α el menor ángulo que va desde $\vec{u}$ a $\vec{v}$
    - Dirección: Perpendicular al plano que contiene a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$
    - Sentido: Según la *regla de la mano derecha* desde $\vec{u}$ hasta $\vec{v}$.
  - **Propiedades**

1) Anticonmutativa: $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$
2) Asociativa con un escalar: $(k\vec{u})\times\vec{v} = k(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}\times(k\vec{v})$. Pero no tiene la propiedad asociativa si sólo empleamos productos vectoriales: $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} \neq \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ en general.
3) Para cualquier vector $\vec{u}$: $\boxed{\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}}$.
4) Distributiva: $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$

Y las más importantes:

5) El área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el módulo del producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.
Por tanto, el área del triángulo formado por el vértice común a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y los extremos de cada uno de dichos vectores es la *mitad* del área del paralelogramo.



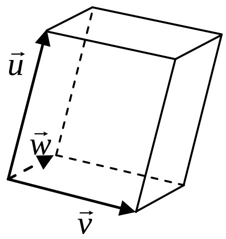
6) Para obtener un vector perpendicular a otros dos vectores dados (no nulos ni alineados) se calcula su producto vectorial.

7) Expresión analítica: $\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$, siendo $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$ respecto de una base ortonormal. Hay que tener en cuenta que la última expresión es sólo una regla mnemotécnica y no un verdadero determinante, puesto que un determinante no puede contener vectores.

• Producto mixto de tres vectores

- Definición: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
- Expresión analítica: Si $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (a', b', c')$ y $\vec{w} = (a'', b'', c'')$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

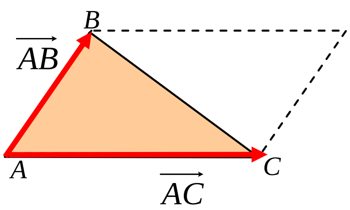


- Interpretación geométrica: Su *valor absoluto* es el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$.
- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ si y sólo si los tres vectores son coplanarios.

• Área de un triángulo

El área del triángulo delimitado por tres puntos A, B, C, es la mitad del área del paralelogramo de la figura:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$



• Volumen del tetraedro

El volumen del tetraedro delimitado por cuatro puntos conocidos A, B, C y D es (1/6 del paralelepípedo):

$$V = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right|$$