ESPACIOS AFÍN Y EUCLÍDEO

Nota: Los procedimientos expuestos no son los únicos que resuelven los problemas

- **Definición**

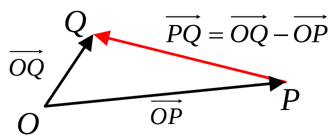
El espacio afín son los puntos coexistiendo junto al espacio vectorial V_3, con un *sistema de referencia* (un punto fijo O del espacio y una base, que siempre consideramos ortonormal). Se identifican las coordenadas de los puntos con las de sus vectores de posición (ver definición un poco más adelante).
El espacio euclídeo o métrico es lo mismo, pero disponiendo del producto escalar, con lo que se puede hablar de ángulos, perpendicularidad, distancias y áreas. Normalmente trabajamos en el espacio euclídeo, con todas las herramientas a nuestro alcance.

- **Vector de posición**

Si $P(x, y, z) \Rightarrow$ Su vector de posición es el que une el origen del sistema de referencia O con el punto P. Como se ha dicho, P y su vector de posición se identifican y tienen las mismas coordenadas: $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$

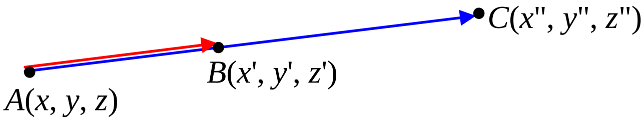
- **Coordenadas del vector que une dos puntos**

$P(x, y, z)$; $Q(x', y', z') \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (x'-x, y'-y, z'-z)$



- **Comprobar si tres puntos están alineados**

$A(x, y, z)$, $B(x', y', z')$, $C(x'', y'', z'')$ están alineados si los vectores $\overrightarrow{AB} = (x'-x, y'-y, z'-z)$ y $\overrightarrow{AC} = (x''-x, y''-y, z''-z)$ tienen la misma dirección. Esto es, si son proporcionales. Si los denominadores son no nulos, la condición es:



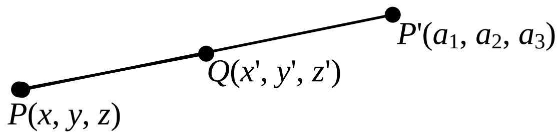
$$\frac{x''-x}{x'-x} = \frac{y''-y}{y'-y} = \frac{z''-z}{z'-z}$$

y, en general, por rangos: $rango\begin{pmatrix} x'-x & y'-y & z'-z \\ x''-x & y''-x & z''-z \end{pmatrix} = 1$

- **Punto medio de un segmento**

$A(x, y, z)$, $B(x', y', z') \Rightarrow M\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$

- **Simétrico de un punto respecto de otro**

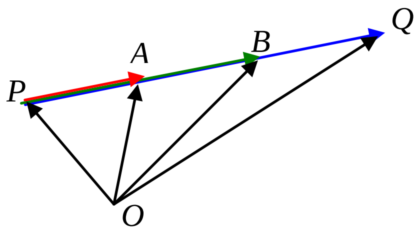


Conocidos $P(x, y, z)$ y $Q(x', y', z')$, para hallar las coordenadas de P' consideramos que Q es el punto medio del segmento PP'. Por tanto se despejan a_1, a_2 y a_3 en:

$$\frac{x+a_1}{2} = x' \quad \frac{y+a_2}{2} = y' \quad \frac{z+a_3}{2} = z'$$

- **Dividir un segmento en varios iguales**

Por ejemplo, para dividir el segmento PQ en 3 partes iguales, hallamos las coordenadas de los puntos que causan la división: A y B. Es lo mismo que calcular las coordenadas de sus vectores de posición:



$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right)$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + +\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right)$$

- **Módulo de un vector** (Espacio euclídeo)

Se calcula por medio del producto escalar. Si $\vec{u} = (x, y, z)$:

$$|\vec{u}| = +\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- **Ecuación de la recta**

- **Conocidos un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y un vector de dirección $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$**
  - Ecuación vectorial

    $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda\,(d_1, d_2, d_3)$
  - Ecuaciones paramétricas

    $$\begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \\ z = p_3 + \lambda d_3 \end{cases}$$ Es la ec. vectorial escrita componente a componente.
  - Ecuación continua

    $$\frac{x - p_1}{d_1} = \frac{y - p_2}{d_2} = \frac{z - p_3}{d_3}$$ Son tres igualdades (1ª = 2ª, 2ª = 3ª, 1ª = 3ª).

  Si **se conocen dos puntos** de la recta, $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\Rightarrow$ $\vec{d} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ es un *vector de dirección* de la misma, y se pueden construir las ecuaciones vectorial, paramétricas y continua.

- **Conocidos dos planos cuya intersección es la recta**
  - Ecuación en forma implícita o general

    $$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$ La matriz de los coeficientes tiene rango 2.
    Cada una de las dos ecuaciones es un plano.

Hay infinitas ecuaciones vectoriales, paramétricas, continuas e implícitas de una misma recta.

- **Paso entre vectorial, paramétricas y continua**

  Es trivial, por cuanto están explicitados el punto y el vector de dirección.

- **Paso de vectorial / paramétricas / continua a forma implícita (general)**

  Se escribe la ec. en forma continua. Se toman dos cualesquiera de las tres igualdades, se quitan denominadores y se despejan para igualarlas a 0.

- **Paso de forma implícita (general) a paramétricas**
  - Si en cada una de las dos ecuaciones aparecen sólo dos variables, una de ellas repetida, a la variable que se repite se le llama λ y se despeja la otra variable en cada una de las dos ecuaciones. La tercera ecuación paramétrica es la variable repetida igualada a λ.
  - En caso contrario, se busca un menor de orden 2 distinto de cero en las ecuaciones implícitas. La variable que no figura en el menor, se iguala a λ y se pasa al segundo miembro. Se resuelve el sistema, en función de λ. La tercera ecuación paramétrica es la variable que se pasó al segundo miembro igualada a λ.
    En el caso de que una de las variables no aparezca en ninguna de las dos ecuaciones, el procedimiento es el mismo; la particularidad es que las variables que sí aparecen van a proporcionar valores fijos, y la variable que no está se iguala a λ.

- **Conseguir un vector de dirección desde la forma implícita (general)**
  Se puede pasar a paramétricas. O se multiplican vectorialmente $(a, b, c) \times (a', b', c')$.

- **Conseguir coordenadas de puntos de la recta**
  En <u>paramétricas</u> o vectorial, se da a λ un valor arbitrario. Es lo más fácil.
  En <u>continua o implícita</u>, se da un valor arbitrario a una de las variables, y se despejan las otras dos.

- **Saber si un punto está en la recta**
  En <u>paramétricas</u>, se sustituyen las variables por las coordenadas del punto. El λ resultante debe ser el mismo en las tres ecuaciones que quedan; de lo contrario, el punto no está en la recta.
  En <u>continua o implícita</u>, se sustituyen las variables por las coordenadas del punto y se ve si las igualdades resultan ciertas (sí pertenece) o falsas (no está en la recta).

- **Posiciones relativas de dos rectas**
  Pueden: a) <u>Cruzarse</u> (sin cortarse); b) <u>Cortarse</u>; c) Ser <u>paralelas</u>; d) <u>Coincidentes</u>.
  En los casos a y b los vectores de dirección son lin. indep. (es decir, no son proporcionales, uno no es múltiplo del otro). Se diferencian en que tienen un punto en común, o no lo tienen.
  En los casos c y d los vectores de dirección respectivos son lin. dependientes (es decir, son proporcionales, uno es múltiplo del otro). Se diferencian en que tienen algún punto en común (tendrán infinitos, entonces) o no lo tienen.
  Para averiguarlo, lo más fácil es igualar las ecuaciones paramétricas respectivas, pero tomando letras distintas para los parámetros: por ejemplo s para el de la primera recta y t para el de la segunda. Se discute el sistema resultante de tres ecuaciones con dos incógnitas s y t:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = p_1 + sd_1 \\ y = p_2 + sd_2 \\ z = p_3 + sd_3 \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = p'_1 + td'_1 \\ y = p'_2 + td'_2 \\ z = p'_3 + td'_3 \end{cases} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} sd_1 - td'_1 = p'_1 - p_1 \\ sd_2 - td'_2 = p'_2 - p_2 \\ sd_3 - td'_3 = p'_3 - p_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$A' = \begin{pmatrix} d_1 & d'_1 & p'_1 - p_1 \\ d_2 & d'_2 & p'_2 - p_2 \\ d_3 & d'_3 & p'_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

Si ran(A) = 1 $\Rightarrow$ Igual dirección $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{ran}(A') = 1 \Rightarrow \text{S. comp. ind.: Coincidentes} \\ \text{ran}(A') = 2 \Rightarrow \text{S. incompatible: Paralelas} \end{cases}$

Si ran(A) = 2 $\Rightarrow$ Distinta dirección $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{ran}(A') = 2 \Rightarrow \text{S. comp. det.: Se cortan} \\ \text{ran}(A') = 3 \Rightarrow \text{S. incompatible: Se cruzan} \end{cases}$

- **Ecuación del plano**
- **Conocidos un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y dos vectores de dirección $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ no proporcionales**
  - Ecuación vectorial

    $(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda\,(u_1, u_2, u_3) + \mu\,(v_1, v_2, v_3)$
  - Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Si **se conocen tres puntos del plano *que no estén alineados***: $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$ $\Rightarrow$

$$\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (c_1, c_2, c_3) - (a_1, a_2, a_3) = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$$

son dos *vectores de dirección* del plano, y se pueden construir las ecuaciones vectorial y paramétricas.

- **Ecuación implícita (general)**

  $ax + by + cz + d = 0$ $\vec{n} = (a, b, c)$ es un vector *normal* (perpendicular) al plano.

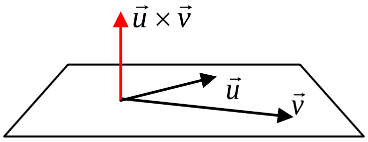
- **Obtener puntos del plano**

  En paramétricas, se dan valores arbitrarios a λ y μ. En implícita, se da un valor arbitrario a dos de las tres variables, y se despeja la otra.

- **Obtener un vector normal al plano**

  En paramétricas, multiplicamos vectorialmente los dos vectores de dirección: $\vec{u} \times \vec{v}$.

  En implícita, lo tenemos directamente: $\vec{n} = (a, b, c)$.



- **Saber si un punto está en el plano**
  - Paramétricas

    En paramétricas, al sustituir (x, y, z) por $A(a_1, a_2, a_3)$, deben existir λ y μ que proporcionen las coordenadas de A. Luego el sistema:

$$\begin{cases} a_1 = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ a_2 = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ a_3 = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda u_1 + \mu v_1 = a_1 - p_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 = a_2 - p_2 \\ \lambda u_3 + \mu v_3 = a_3 - p_3 \end{matrix}\right\}$$

debe tener solución. Por tanto, como ran(A) = 2 (la matriz de los coeficientes; y es así porque los vectores de dirección de un plano no son proporcionales, es decir, son linealmente independientes), la condición para ello es que ran(A') = 2. Esto es:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & a_1 - p_1 \\ u_2 & v_2 & a_2 - p_2 \\ u_3 & v_3 & a_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

- Implícita o general
  Al sustituir (x, y, z) por $A(a_1, a_2, a_3)$, la igualdad debe resultar cierta.

- **Ecuación del plano conocidos un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y un vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$**

$$a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) = 0$$

- **Pasar de vectorial / paramétricas a implícita (general)**
  - Método 1

  Aprovechando la condición, en paramétricas, para que un punto esté en el plano, siendo ese punto (x, y, z) (es decir, válido para todos y cada uno de los puntos del plano), queda:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - p_1 \\ u_2 & v_2 & y - p_2 \\ u_3 & v_3 & z - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

  Desarrollando el determinante obtenemos la ecuación implícita.

  - Método 2

  Como tenemos un punto del plano $P = (p_1, p_2, p_3)$, y obtenemos un vector normal multiplicando vectorialmente los vectores de dirección $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, podemos escribir la ecuación del plano cuando conocemos un punto y un vector normal.

- **Pasar de implícita (general) a vectorial / paramétricas**
  A una de las variables se le llama λ, a otra, μ, y la tercera se despeja en función de λ y μ.
  Si alguna de las variables no aparece, se le llama λ ó μ, aunque las variables que si están en la ecuación implícita no aparecerán en función de las que no aparecen.

- **Haz de planos de base una recta**

Todos los planos que contienen a la recta (en implícitas) $r \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ se obtienen para cada uno de los posibles valores de λ en la ecuación:

$$ax + by + cz + d + \lambda(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

salvo el plano $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, que no sale en la fórmula anterior para ningún valor de λ. A la fórmula anterior, junto con este último plano, se le llama *haz de planos de base r*.
Así, si debemos obtener un plano que contenga a r y cumpla alguna otra condición, podemos usar la fórmula anterior para averiguarlo (nos lo proporcionará cierto valor de λ). Y si ningún valor de λ nos da la respuesta, seguramente es el plano $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

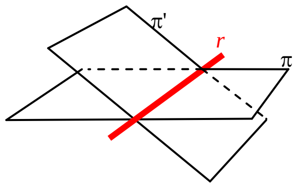
• Posiciones relativas de dos planos

Estudiamos el sistema formado por sus respectivas ecuaciones implícitas:

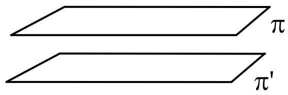
$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \Rightarrow A'=\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right)$$

(en realidad, la última columna de la matriz ampliada sería la opuesta de lo que está escrito, pero esto es indiferente para el cálculo del rango). Tres casos posibles:

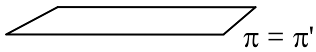
- ran(A) = ran (A') = 2 $\Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro (habría que llamar t a la incógnita que no está en el menor principal) $\Rightarrow$ las soluciones serían las ecuaciones paramétricas de una recta $\Rightarrow$ <u>Se cortan</u>.



- ran(A) = 1 y ran(A') = 2 $\Rightarrow$ Sistema incompatible $\Rightarrow$ No tienen puntos en común $\Rightarrow$ <u>Planos paralelos</u>.



- ran(A) = ran(A') = 1 $\Rightarrow$ Una fila depende linealmente de la otra (son proporcionales) $\Rightarrow$ Son la ecuación del mismo plano (una de ellas es múltiplo de la otra ecuación) $\Rightarrow$ Son <u>planos coincidentes</u>.



• Posiciones relativas de una recta y un plano

Tomamos la recta en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \\ z = p_3 + \lambda d_3 \end{cases}$$

y el plano, en implícita: $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$. Intentamos calcular su intersección, sustituyendo x, y, z en la ecuación de π por sus expresiones en r:

$$a(p_1 + \lambda d_1) + b(p_2 + \lambda d_2) + c(p_3 + \lambda d_3) + d = 0$$

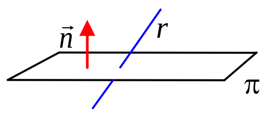
Nos queda una ecuación en λ: $ap_1 + bp_2 + cp_3 + d + \lambda(ad_1 + bd_2 + cd_3) = 0$ (1)

que, si podemos despejar, se transformará en:

$$\lambda = \frac{-(ap_1 + bp_2 + cp_3 + d)}{ad_1 + bd_2 + cd_3}$$

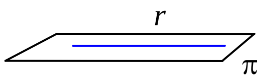
Casos:

- Si el denominador es $\neq 0$: solución única para λ. Al sustituirla en las ecuaciones de r produce un punto: <u>recta y plano se cortan en dicho punto</u>.

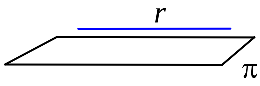


  En este caso, <u>recta y plano serán perpendiculares</u> cuando el vector de dirección de la recta $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ y el vector normal al plano $\vec{n} = (a, b, c)$ sean proporcionales.
- Si el denominador es = 0, no sería posible este último despeje, y la ecuación (1) tendría la forma $ap_1 + bp_2 + cp_3 + d + \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow ap_1 + bp_2 + cp_3 + d = 0$. Esto puede ser cierto o no ($ap_1 + bp_2 + cp_3 + d$ es un número fijo). Entonces:

- Si es cierto, la ecuación (1) es verdadera para todo $\lambda \Rightarrow$ Todos los puntos de la recta son solución $\Rightarrow$ la recta está contenida en el plano.



- Si no lo es, la ecuación (1) no se cumple para ningún valor de $\lambda \Rightarrow$ recta y plano no tienen ningún punto en común $\Rightarrow$ La recta es paralela al plano.



- **Ángulo entre dos rectas**

Es el *menor* de los dos ángulos que forman sus respectivos vectores de dirección $\vec{d}$ y $\vec{d'}$ (por eso se toma el producto escalar del numerador en valor absoluto):

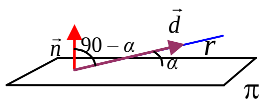
$$\cos\alpha = \frac{|\vec{d}\cdot\vec{d'}|}{|\vec{d}|\,|\vec{d'}|}$$

- **Condición de perpendicularidad de dos rectas**

$$\vec{d}\cdot\vec{d'} = 0$$

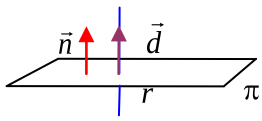
- **Ángulo entre recta y plano**

$$\operatorname{sen}\,\alpha = \cos(90-\alpha) = \frac{|\vec{d}\cdot\vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|}$$



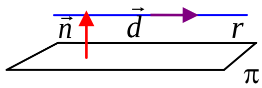
- **Condición de perpendicularidad de recta y plano**

$\vec{d}$ y $\vec{n}$ son proporcionales



- **Condición de paralelismo de recta y plano**

$\vec{d}\cdot\vec{n} = 0$ (son perpendiculares)



- **Ángulo entre dos planos**

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n'}|}{|\vec{n}|\,|\vec{n'}|}$$

- **Condición de perpendicularidad de dos planos**

$$\vec{n}\cdot\vec{n'} = 0$$

- **Distancia entre dos puntos**

Si los puntos son $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$d(P_1, P_2) = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

- **Distancia de un punto a un plano**

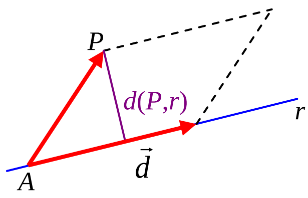
Si el punto es $P(x_1, y_1, z_1)$ y el plano es $\pi \equiv a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$:

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- **Distancia de un punto a una recta**

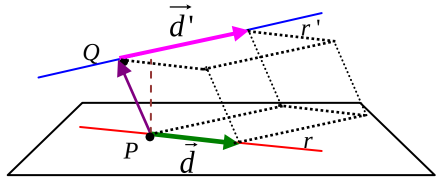
Si P es el punto, A es un punto *cualquiera* de r y $\vec{d}$ es el vector de dirección de r:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{d} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{d}|} = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{base}}$$



- **Distancia entre dos rectas**
  - **Si son coincidentes:** $d(r, r') = 0$
  - **Si son paralelas:** $d(r, r') = d(P, r')$, siendo P un punto cualquiera de r.
  - **Si se cortan:** La distancia será 0.
  - **Si se cruzan:** Sean P y Q sendos puntos cualesquiera de r y r' respectivamente, y sean $\vec{d}$ y $\vec{d}'$ los vectores de dirección de las dos rectas:

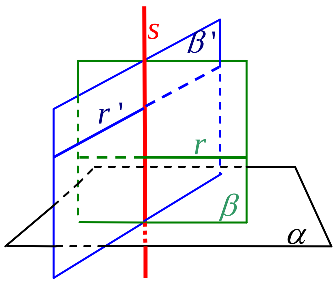
$$d(r, r') = \frac{|[\vec{d}, \vec{d}', \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$



(Es la distancia entre los planos paralelos que contienen a cada recta y al vector de dirección de la otra recta = volumen del paralelepípedo entre área de la base = altura del paralelepípedo)

- **Perpendicular común a dos rectas que se cruzan**

Para hallar la recta s perpendicular a las rectas r y r' (que se cruzan), procedemos de la siguiente forma:



1) Hallamos un plano paralelo a las dos rectas: α. Para ello, tomamos los respectivos vectores de dirección de las dos rectas, y un punto cualquiera; el más fácil es (0, 0, 0).
   El producto vectorial de los vectores de dirección de las rectas nos da un vector normal al plano α: $\vec{d} \times \vec{d}' = (n_1, n_2, n_3)$. Por tanto:

$$\alpha \equiv n_1(x-0) + n_2(y-0) + n_3(z-0) = 0$$

2) Construimos el plano β perpendicular a α y que contenga a r. Dos vectores contenidos en el plano son (n_1, n_2, n_3) y $\vec{d}$, y como punto vale cualquiera de r:

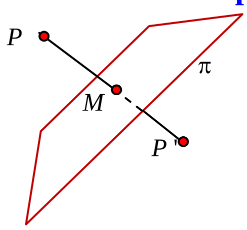
$$\beta \equiv \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0$$

3) Construimos el plano β' perpendicular a α y que contenga a r'. Dos vectores contenidos en el plano son (n_1, n_2, n_3) y $\vec{d}'$, y como punto vale cualquiera de r':

$$\beta' \equiv \begin{vmatrix} x-a'_1 & y-a'_2 & z-a'_3 \\ d'_1 & d'_2 & d'_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0$$

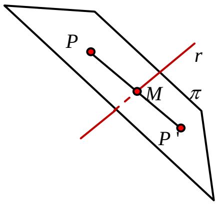
4) La perpendicular común buscada es la intersección de β y β'.

- **Simétrico de un punto respecto un plano**



1) Hallamos la recta perpendicular al plano que contiene al punto P, usando el vector *normal* al plano y el *punto* P.
2) Calculamos M, intersección de la recta anterior con el plano.
3) Calculamos el simétrico de P respecto de M.

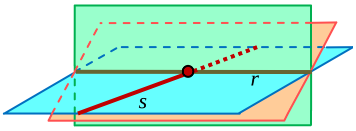
- **Simétrico de un punto respecto una recta**



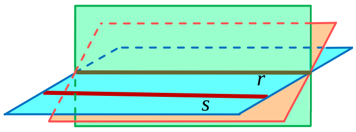
1) Hallamos el plano π perpendicular a la recta r y que contiene al punto P, usando el vector de dirección de la recta r como vector *normal* al plano.
2) Hallamos M, intersección de r y π.
3) Calculamos el simétrico de P respecto de M.

- **Plano que contiene a una recta y es paralelo a otra**

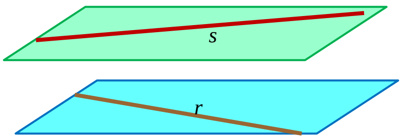
El problema tiene solución única sólo cuando las rectas se cruzan:



Si las rectas se cortan, no es posible: un plano contiene a las dos rectas. Si tomamos el haz de planos de base una de ellas (r), uno de ellos contiene a la otra recta (s) y el resto, la cortan en un punto (el común a ambas rectas).



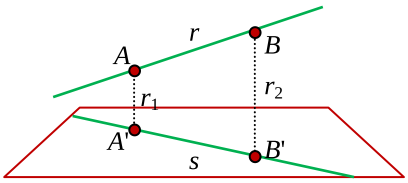
Si las rectas son paralelas, todos los planos del haz de base una de ellas (r) son paralelos a la otra, salvo uno, que la contiene también.



Si las rectas se cruzan, podemos encontrar dos planos paralelos, cada uno de los cuales contiene a una de las rectas. Luego hay un único plano que contiene a una recta (r) y es paralelo a la otra (s).

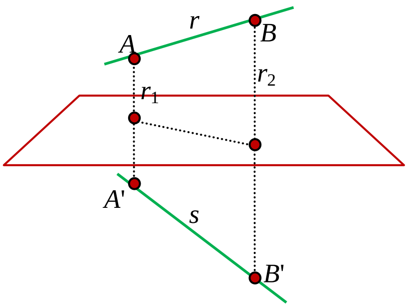
1) Se comprueba la posición relativa de ambas rectas.
2) Si se cruzan, se forma un plano con los respectivos vectores de dirección de las rectas y un punto de la recta a la que debe contener.

- **Proyección de una recta sobre un plano**



1) Se consiguen dos puntos A y B de la recta a proyectar (r).
2) Con cada uno de los puntos A y B y tomando como vector de dirección el vector normal al plano, se forman las ecuaciones de las rectas r_1 y r_2 perpendiculares al plano y que pasan por A y B.
3) Se calculan las intersecciones A' y B' de r_1 y r_2 con el plano.
4) Se forma la ecuación de la recta que pasa por A' y B'.

- **Simétrica de una recta respecto un plano**



1) Se consiguen dos puntos A y B de la recta (r).
2) Se calculan sus respectivos simétricos respecto del plano (A' y B').
3) Se forma la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos simétricos.