POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS

Consideremos tres planos α, β y γ dados por sus ecuaciones generales:

$$\alpha \equiv ax + by + cz + d = 0$$
$$\beta \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0$$
$$\gamma \equiv a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

Estudiar las *posiciones relativas* de estos tres planos equivale a discutir el sistema formado por sus ecuaciones, para ver los puntos que satisfacen dos o más de sus ecuaciones. La *matriz de los coeficientes*, *M*, y la *ampliada*, *N*, son:

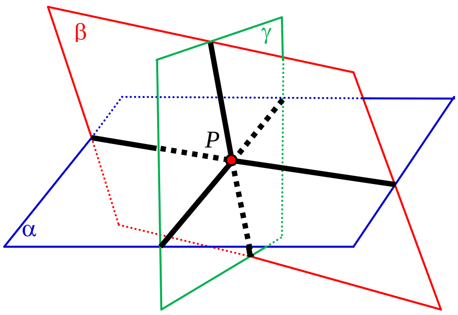
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

Según los rangos de *M* y *N*, se presentan los siguientes casos:

<u>Caso 1</u>. rango(M) = rango(N) = 3

El sistema es *compatible determinado*. Existe un único punto común a los tres planos, que se obtiene resolviendo el sistema.

$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = P$$



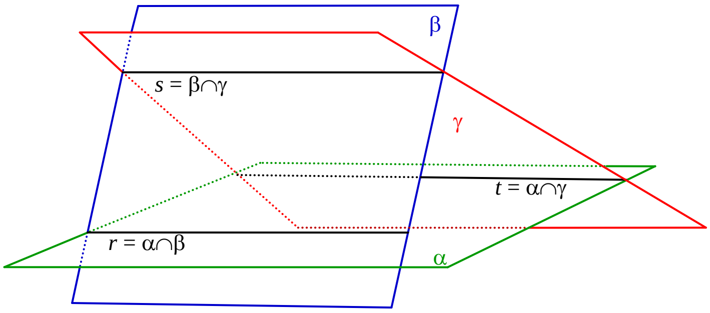
<u>Caso 2</u>. rango(M) = 2 y rango(N)=3

El sistema es *incompatible*. No existe ningún punto común a los tres planos. Pueden presentarse los subcasos siguientes:

2a) Las matrices de orden 2x3 que pueden formarse con las filas de M, tienen rango 2**; entonces los planos se cortan dos a dos según tres rectas que no tienen por qué ser paralelas (El sistema formado por dos cualesquiera de los planos es compatible indeterminado: dos ecuaciones con tres incógnitas con rango de la matriz de los coeficientes 2. Al ser de tres incógnitas, una de ellas pasaría al segundo miembro, quedando las infinitas soluciones en función de un solo parámetro: dicha incógnita. Es decir, tendríamos las ecuaciones paramétricas de una recta, puesto que se obtienen dando valores a un parámetro).**

$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \varnothing$$

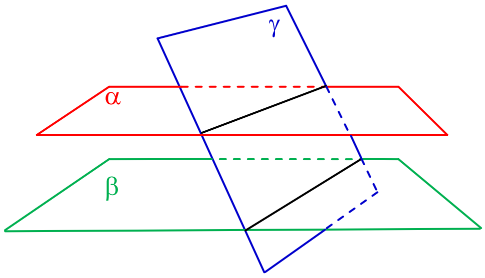
$$\alpha \cap \beta = r$$
$$\alpha \cap \gamma = t$$
$$\beta \cap \gamma = s$$



2b) Una de las matrices de orden 2x3 citadas tiene rango 1 y las otras rango 2**. En ese caso dos planos son paralelos y el tercero los corta según dos rectas paralelas. (El sistema formado por las ecuaciones con rango de la matriz de los coeficientes 1 y ampliada 2 es incompatible, por lo que no tiene solución, lo que significa que los planos correspondientes son paralelos, al no tener puntos en común. Los otros dos sistemas se cortan en sendas rectas, pues la situación es la misma que en el caso 2a).**

$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \varnothing$$

$$\beta \neq \gamma$$



<u>Caso 3</u>. rango(M) = rango(N) = 2

El sistema es *compatible indeterminado*. Existen, por tanto, dos ecuaciones independientes, y la otra es combinación lineal de ellas. Los tres planos se cortan en una recta. Pueden presentarse los subcasos siguientes:

3a) Las tres matrices de orden 2x4 que pueden formarse con las filas de N tienen rango 2**. Los tres planos son distintos y se cortan en una recta.**

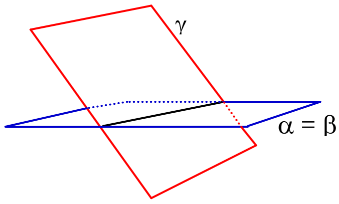
$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = r$$

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$$

3b) Una de esas matrices tiene rango 1**. Entonces, dos planos coinciden y el tercero los corta según una recta.**

$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = r$$

$$\alpha = \beta$$



<u>Caso 4.</u> rango(M) = 1 y rango(N) = 2

El sistema es *incompatible* y no existe ningún punto común a los tres planos. Por ser rango(M)=1, los tres planos son paralelos, pero no coincidentes ya que rango(N)=2. Veamos los subcasos posibles:

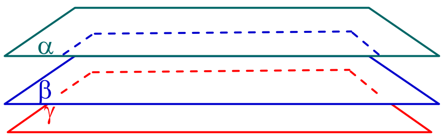
4a) Que las tres matrices de orden 2x4 que pueden formarse con las filas de N sean de rango 2**. Entonces los tres planos son paralelos y distintos dos a dos.**

$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \varnothing$$

$$\alpha \neq \beta$$

$$\alpha \neq \gamma$$

$$\beta \neq \gamma$$

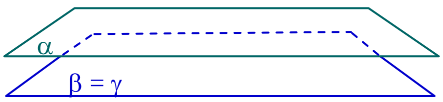


4b) Que una de esa matrices tenga rango 1**, entonces dos de los planos son coincidentes y el otro paralelo a ellos y distinto.**

$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \varnothing$$

$$\alpha \neq \beta$$

$$\beta = \gamma$$



<u>Caso 5</u>. rango(M) = rango(N) = 1

El sistema es *compatible indeterminado*. En este caso el sistema se reduce a una sola ecuación y los planos son coincidentes.

$$\alpha = \beta = \gamma$$