NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Sea la función $f : (-\infty, 1) \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ a\sqrt{b - x} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$
   a) Determinar a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio, y escribir la forma final de f y de f' para los valores obtenidos. *(1,5 puntos)*
   b) Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$. *(1 punto)*
2) Sabiendo que $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right)$ es finito, calcular a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano). *(2,5 puntos)*
3) Sea $f : (0, +\infty) \to R$ la función definida por $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.
   a) Determinar, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación $x - 2y + 1 = 0$. *(1,5 puntos)*
   b) Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$. *(1 punto)*
4) De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto $(1, 2)$, encontrar aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Hallar el área de dicho triángulo. *(2,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sea la función $f:(-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x+2e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$

a) Determinar a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio, y escribir la forma final de f y de f' para los valores obtenidos. *(1,5 puntos)*

Primeramente, si f es derivable, entonces, es continua. Comenzamos exigiendo esto, para lo que estudiamos la continuidad de la función (conviene comprobar que el enunciado es consistente).

- $(-\infty, 0)$: f coincide con la función $y = x + 2e^{-x}$ que, al ser elemental, es continua en su dominio, que es R. Por tanto f es continua en $(-\infty, 0)$.
- $(0, 1)$: $y = a\sqrt{b-x}$ es continua en su dominio, que consiste en los valores de x para los que $b - x \ge 0$, esto es, $x \le b$. Para que en los puntos del intervalo $(0, 1)$ sea continua f, $\boxed{\text{se requiere, pues que } b \ge 1}$. (1)
- $x = 0$: 1) $\exists f(0) = 0 + 2e^0 = 2$;

  2) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x+2e^{-x}) = 2$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} a\sqrt{b-x} = a\sqrt{b}$

  Para que sea continua, como se exige, debe ser $\boxed{a\sqrt{b} = 2}$ (2)

Pasemos, ahora, al estudio de a derivada. Podemos aplicar las fórmulas de las tablas de derivadas en intervalos abiertos, por lo que, de momento:

$$f'(x) = \begin{cases} 1-2e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{-a}{2\sqrt{b-x}} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Para que, en efecto, sea derivable en su dominio, debe serlo también en $x = 0$, lo que requiere que $f'(0^-) = f'(0^+)$:

$$f'(0^-) = 1 - 2 = -1; \quad f'(0^+) = \frac{-a}{2\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{b}} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 2\sqrt{b}} \quad (3)$$

Resolvemos el sistema formado por las condiciones (2) y (3). Sustituyendo (3) en (2):

$$2\sqrt{b}\sqrt{b} = 2 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

Sustituimos en (3): $a = 2\cdot 1 = 2$

En definitiva $\boxed{a = 2 \text{ y } b = 1}$, lo que también satisface la condición (1).

Por tanto, $f'(0) = -1$. Añadimos esta información a la expresión de f' que teníamos,. Lo hacemos, por ejemplo, diciendo que $f'(x) = 1 - 2e^{-x}$ para $x = 0$, por lo que, definitivamente:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} 1-2e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}}$$

Y la función f queda así:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} x+2e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ 2\sqrt{1-x} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}}$$

b) Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$. *(1 punto)*

- Punto de tangencia: Como $f(0) = 2$, se trata de $(0, 2)$.

- Pendiente de la tangente: $m = f'(0) = 1 - 2 = -1$.
- Ecuación de la tangente: $y - 2 = -1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -x + 2}$.
- Ecuación de la normal: Pendiente de la normal: $m' = -\dfrac{1}{m} = -\dfrac{-1}{1} = 1$.

  Como pasa por el punto tangencia, la normal es: $y - 2 = 1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x + 2}$.

2) Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{a}{\ln x}\right)$ es finito, calcular a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano). *(2,5 puntos)*

Si $a > 0$:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x}\right) = (-\infty + \infty) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x}\right) = (+\infty - \infty)$$

Y si $a < 0$:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x}\right) = (-\infty - \infty) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x}\right) = (+\infty + \infty) = +\infty$$

En este caso ($a < 0$), se tiene, pues: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{a}{\ln x}\right) = \infty$. Como el límite es finito, partimos de que $\underline{a > 0}$, que es el único caso en el que esto *podría* ser cierto. Estudiemos el límite en este caso:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - a(x-1)}{(x-1)\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Como tanto el numerador como el denominador son derivables en algún entorno de $x = 1$, podemos aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x + x\frac{1}{x} - a}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + 1 - a}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \left(\frac{1-a}{0}\right)$$

La única posibilidad de que el límite sea finito es que $1 - a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$. En ese caso, seguimos adelante y podemos volver a aplicar L'Hôpital, porque numerador y denominador son derivables en algún entorno de 1:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Por tanto, $\boxed{a = 1 \text{ y } \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{a}{\ln x}\right) = \dfrac{1}{2}}$.

3) Sea $f : (0, +\infty) \to \mathrm{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

   a) Determinar, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación $x - 2y + 1 = 0$. *(1,5 puntos)*

   Dos rectas son paralelas si, y sólo si tienen la misma pendiente. La pendiente de la recta dada, que es: $x + 1 = 2y \Leftrightarrow y = \dfrac{x+1}{2}$, vale $m = \dfrac{1}{2}$. Hay que estudiar para qué valores de x la pendiente de la recta tangente a f vale 1/2. Esta pendiente, en el punto $(x, f(x))$, según la *Interpretación Geométrica de la Derivada* es:

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x + 6 = x^2 + 3x \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = -2 \\ = 3 \end{array} \right.$$

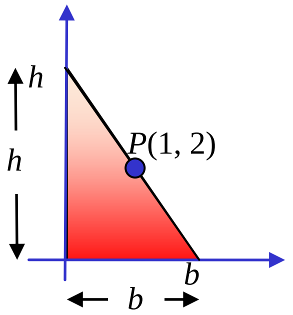
Por tanto, ocurre en dos puntos distintos en principio. Lo que pasa es que $x = -2$ no está en el dominio por lo que, en realidad, hay una única posibilidad, que es $x = 3$. Como $f(3) = \ln(18)$, el único punto es: $\boxed{(3, \ln(18))}$.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$. *(1 punto)*

- Punto de tangencia: $f(3) = \ln(18)$: $(3, \ln(18))$
- Pendiente de la tangente: $m = f'(3) = 1/2$, como ya sabíamos.
- Recta tangente: $y - \ln(18) = \frac{1}{2}(x-3) \Leftrightarrow \boxed{x - 2y - 3 + 2\ln(18) = 0}$
- Recta normal: La normal pasa por el mismo punto y su vector normal será (2, 1), para ser perpendicular a la anterior. Será, pues (en forma normal):

$$2(x - 3) + 1(y - \ln(18)) = 0 \Leftrightarrow \boxed{2x + y - 6 - \ln(18) = 0}$$

4) De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto (1, 2), encontrar aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Hallar el área de dicho triángulo. *(2,5 puntos)*



Consideremos todas las rectas que pasan por $P(1, 2)$. Estas rectas determinan el triángulo. Tienen de ecuación:

$$y - 2 = m(x - 1)$$

La base b del triángulo la obtenemos al cortar esta recta al eje OX, que lo hace en el punto

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{m} + 1 = \frac{m-2}{m} \Rightarrow \left(\frac{m-2}{m}, 0\right)$$

Y la altura h al cortar al eje OY, en:

$$x = 0 \Rightarrow y = -m + 2 \Rightarrow (2 - m, 0)$$

Como dicha recta debe ser descendente para que se forme el triángulo (o sea, con pendiente negativa) su inclinación va desde la vertical (pendiente infinita, en este caso $-\infty$, porque todas las pendientes son negativas) hasta la horizontal (pendiente 0). Por tanto, $\boxed{m \in (-\infty, 0)}$.

Hay que hallar minimizar el área del triángulo que se forma. Dicha área es:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{\frac{m-2}{m}(2-m)}{2} = \frac{(m-2)[-(m-2)]}{2m} = -\frac{(m-2)^2}{2m}$$

El área varía con la recta, que varía con m. Luego es función de m. El problema, finalmente, consiste en hallar el *mínimo absoluto* de:

$$f(m) = -\frac{(m-2)^2}{2m}, \text{ con } m \in (-\infty, 0)$$

La forma rigurosa de hacerlo es comparar las imágenes o límites de:

- Extremos del dominio: $-\infty$; 0.
- Discontinuidades de f: 0 (anula el denominador. Y hay que considerarlo, aunque no esté en el dominio, pues las discontinuidades nunca están en el dominio).
- Discontinuidades de f':

$$f'(m) = -\frac{2(m-2)2m-(m-2)^2 2}{4m^2} = -\frac{4m^2-8m-2m^2+8m-8}{4m^2} =$$

$$= -\frac{2m^2-8}{4m^2} = -\frac{m^2-4}{2m^2} = \frac{4-m^2}{2m^2}$$

La única discontinuidad está en $m = 0$, que anula el denominador.

- $f'(m) = 0$: $m = \pm 2$. Pero sólo está en el dominio $m = -2$.

Comparamos imágenes o límites (cuando no se pueda calcular la imagen o en los puntos de discontinuidad) de los puntos obtenidos:

- $m = 0$: $\lim\limits_{m\to 0^-} -\frac{(m-2)^2}{2m} = \left(-\frac{4}{0}\right) = +\infty$ (el numerador siempre es +, por ser un cuadrado).
- $m \to -\infty$: $\lim\limits_{m\to -\infty} -\frac{(m-2)^2}{2m} = \lim\limits_{m\to -\infty} -\frac{m^2-4m+4}{2m} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{m\to -\infty} -\frac{m^2}{2m} =$ $\lim\limits_{m\to -\infty} -\frac{m}{2} = +\infty$
- $m = -2$: $f(-2) = -\frac{(-4)^2}{-4} = 4$

De modo que la función que da el área del triángulo no tiene máximo absoluto ni supremo, puesto que crece hasta $+\infty$, y su mínimo absoluto es 4, alcanzado para $m = -2$.

La recta pedida es:

$$y - 2 = -2(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = -2x + 4}$$

y $\boxed{\text{el área correspondiente es de } 4\ u^2}$.

De otras formas

Ponemos dos nuevas formas distintas de abordar el problema, procedentes de dos alumnas.

La primera de ellas proviene de Dª **María Ramblado Valiente**:

Con el mismo dibujo anterior, procedemos como sigue. Tenemos que hallar b y h para obtener el triángulo de área mínima. Como la recta que nos piden debe pasar por los puntos $(b, 0)$ y $(0, h)$, su fórmula será:

$$\frac{x-b}{0-b} = \frac{y-0}{h-0} \Rightarrow h(x-b) = -yb \Rightarrow y = \frac{h(b-x)}{b}$$

Como esta recta pasa por el punto $(1, 2)$:

$$2 = \frac{h(b-1)}{b} \Rightarrow 2b = h(b-1) \Rightarrow h = \frac{2b}{b-1} \qquad (1)$$

Ésta es la restricción que relaciona b y h. Además, para que se forme el triángulo, la base debe oscilar desde $b = 1$, que hace que la recta sea vertical, hasta acercarse a $+\infty$. La función a minimizar es el área del triángulo que se forma, cual es:

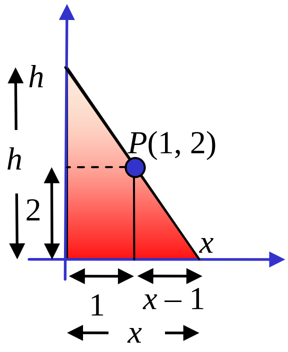
$$\acute{A}rea = \frac{bh}{2} = \frac{b\frac{2b}{b-1}}{2} = \frac{2b^2}{2(b-1)} = \frac{b^2}{b-1}$$

donde hemos utilizado la relación (1) entre b y h para reducirla a una función de una única variable, que es b con $b \in (1, +\infty)$. La función a minimizar es, pues:

$$f(b) = \frac{b^2}{b-1}, \text{ con } b \in (1, +\infty)$$

Completamos la resolución después de exponer el segundo planteamiento, que llega a la misma función pero de otra manera.

Esta idea se debe a Dª **Ana Aguilar Sánchez**:



Llamando x a la base del triángulo cuya área tenemos que minimizar, para que se pueda formar el triángulo debe ser $x \in (1, +\infty)$, el punto $P(1, 2)$ forma un nuevo triángulo, cuyos vértices son él mismo, su proyección vertical sobre el eje OX, de coordenadas $(1, 0)$ y el punto de coordenadas $(x, 0)$. Este nuevo triángulo, cuya base mide $x - 1$ y su altura 2, es semejante al triángulo principal, de base x y altura h, por lo que (también por tg α, siendo α el ángulo del vértice situado en el punto $(x, 0)$):

$$\frac{h}{x} = \frac{2}{x-1} \Rightarrow h = \frac{2x}{x-1}$$

La función a minimizar es el área del triángulo que se forma, que es:

$$\acute{A}rea = \frac{xh}{2} = \frac{x\frac{2x}{x-1}}{2} = \frac{2x^2}{2(x-1)} = \frac{x^2}{x-1}$$

que ya es función de una sola variable. Por tanto, hay que minimizar:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}, \text{ con } x \in (1, +\infty)$$

Ésta es la misma función a la que llegamos en el planteamiento anterior, solo que allí se llamaba b a lo que aquí es x. Terminamos de resolverlo.
Derivamos la función:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

En lugar de realizar el procedimiento anterior, de comparar imágenes o límites de los cuatro tipos de puntos (extremos del dominio, discontinuidades de f, de f', y puntos que anulan f'), vamos a estudiar la monotonía de f:

- Discontinuidades de f ó f': $x = 1$, que es donde comienza el dominio.
- $f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ (que no está en el dominio) ó $x = 2$.

	(1, 2)	2	(2, +∞)
f'	–	0	+
f	↘	mín	↗

Por la forma de la gráfica, el mínimo relativo también es absoluto. Por tanto, el mínimo de la función se obtiene en $x = 2$ y vale $f(2) = 4\ u^2$.
La ecuación de la recta pedida, como pasa por $(2, 0)$ y $(1, 2)$, es:

$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-0}{2-0} \Rightarrow \boxed{y = -2x + 4}$$

IES Fernando de Herrera **Curso 2015 / 16**
Primer trimestre - Primer examen – 2º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **<u>Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto</u>**.

1) Determina a y b sabiendo que $b > 0$ y que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x) + 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ a^2 \ln(x+1) + \dfrac{b}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

es derivable. Indicar, también, la expresión final de $f\,'(x)$. *(2,5 puntos)*

2) Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halla los coeficientes a, b, c y d sabiendo que f presenta un extremo local en el punto de abscisa $x = 0$, que $(1, 0)$ es punto de inflexión de la gráfica de f y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es -3. *(2,5 puntos)*

3) Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 1$, y sea F la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $P(2, \ln(2))$.
   a) Calcula la recta tangente a la gráfica de F en el punto P. *(0,5 puntos)*
   b) Determina la función F. *(2 puntos)*

4) Queremos fabricar una caja con base cuadrada, de tal manera que la altura de la caja más el perímetro de la base sumen 60 cm. Determina sus dimensiones para que contenga el mayor volumen posible. *(2,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Determina a y b sabiendo que $b > 0$ y que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x) + 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ a^2 \ln(x+1) + \dfrac{b}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

es derivable. Indicar, también, la expresión final de $f'(x)$. *(2,5 puntos)*

Para ser derivable, necesariamente ha de ser continua. Veamos qué tiene que suceder para que lo sea.

- <u>$(-\infty, 0)$</u>: f coincide con $y = a\cos(x) + 2x$, que se obtiene operando funciones elementales, por lo que es continua en su dominio. Y éste es R. Al ser continua en todo R, lo es, en particular, en $(-\infty, 0)$, independientemente de lo que valga a.
- <u>$(0, +\infty)$</u>: f está definida por funciones elementales, por lo que le ocurre lo mismo. Dichas funciones elementales son: $a^2 \ln(x+1) + \dfrac{b}{x+1}$. El dominio lo constituyen las soluciones de $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Todos los puntos de $(0, +\infty)$ verifican esta condición, luego f es continua en $(0, +\infty)$, $\forall a, b$.
- <u>$x = 0$</u>: 1) $\exists f(0) = a^2 \ln(1) + \dfrac{b}{1} = b$. 2a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(a\cos(x) + 2x) = a$.

  2b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(a^2 \ln(x+1) + \dfrac{b}{x+1}\right) = b$.

  La continuidad nos exige la coincidencia de estos tres resultados. Por tanto, se requiere que: $\boxed{a = b}$.

Derivemos la función, lo que puede hacerse utilizando las fórmulas de derivación directamente en intervalos abiertos. Así que, de momento:

$$f'(x) = \begin{cases} -a\,\text{sen}(x) + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ a^2 \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{b}{(x+1)^2} = \dfrac{a^2(x+1) - b}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Por otra parte, al extenderse cada función de las dos que componen f' más allá de sus puntos de coincidencia con f', podemos afirmar que:

$$f'(0^-) = -a\cdot 0 + 2 = 2$$

$$f'(0^+) = \frac{a^2 - b}{1} = a^2 - b$$

Como f es derivable, estos resultados deben coincidir. Así que, teniendo en cuenta, además, que $a = b$:

$$a^2 - a = 2 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \left\langle \begin{matrix} = -1 \\ = 2 \end{matrix} \right.$$

Como $a = b > 0$, según el enunciado, la solución es: $\boxed{a = b = 2}$. Y la expresión final de f', añadiendo esto y que $\exists f'(0) = 2$, es:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -2\,\text{sen}(x) + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{4(x+1) - 2}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}}$$

2) Sea f: R → R la función dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halla los coeficientes a, b, c y d sabiendo que f presenta un extremo local en el punto de abscisa $x = 0$, que $(1, 0)$ es punto de inflexión de la gráfica de f y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es -3. *(2,5 puntos)*

- Como f es indefinidamente derivable, para que tenga un extremo relativo en $x = 0$ bastará exigirle que $f'(0) = 0$ y que $f''(0) \neq 0$:

  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
  $f''(x) = 6ax + 2b$
  $f'''(x) = 6a$

  $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{c = 0}$.
  $f''(0) \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$. (1)
- $(1, 0)$ es un punto de inflexión $\Rightarrow$ Al ser f indefinidamente derivable, bastará exigirle que $f''(1) = 0$ y que $f'''(1) \neq 0$:

  $f''(1) = 0 \Leftrightarrow 6a + 2b = 0 \Leftrightarrow 3a + b = 0$. (2)
  $f'''(1) \neq 0 \Leftrightarrow 6a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$. (3)
- La pendiente de la recta tangente en $(1, 0)$ vale $-3 \Leftrightarrow f'(1) = -3 \Leftrightarrow -3a + 2b = -3$. (4).

  De (2) y (4) obtenemos un sistema de ecuaciones que nos proporcionará a y b. Restando (4) menos (2): $\boxed{b = -3}$. Sustituyendo en (2): $3a - 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$. Estos valores verifican las condiciones (1) y (3), por lo que ya hemos usado y agotado todo lo que llevamos visto.
- Nos falta una condición, y es que la función debe pasar por $(1, 0) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow 1 - 3 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 2}$.

En definitiva: $\boxed{a = 1, b = -3, c = 0, \ d = 2}$, siendo $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 + 2}$.

3) Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 1$, y sea F la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $P(2, \ln(2))$.

a) Calcula la recta tangente a la gráfica de F en el punto P. *(0,5 puntos)*

- Punto de tangencia: $(2, \ln(2))$.
- Pendiente de la tangente: $m = F'(2) = f(2) = \dfrac{5}{4}$.
- Recta tangente: $y - \ln(2) = \dfrac{5}{4}(x-2) \Leftrightarrow \boxed{y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{5}{2} + \ln(2)}$.

b) Determina la función F. *(2 puntos)*

Todas las primitivas de f nos vienen dada por su integral indefinida:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx$$

Estamos ante una integral racional. Como el grado del numerador es estrictamente menor que el del denominador, que es 3, aplicamos el *Teorema de Descomposición en suma de fracciones simples*, considerando que las raíces del denominador son 0 (doble) y 1:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}$$

Igualamos los numeradores (de la expresión inicial y de la final, que tienen denominadores iguales) y damos valores a x para obtener cuánto deben valer A, B y C:

- $x = 0$: $1 = -B \Leftrightarrow \boxed{B = -1}$.
- $x = 1$: $\boxed{2 = C}$.
- $x = 2$: $5 = 2A + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 4 = 2A + 7 \Leftrightarrow \boxed{A = -1}$.

Por todo ello, llegamos a que:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{-1}{x^2}dx + \int \frac{2}{x-1}dx =$$

$$= -\int \frac{1}{x}dx - \int x^{-2}dx + 2\int \frac{1}{x-1}dx = -\ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} + 2\ln|x-1| + C$$

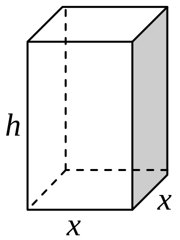
Como $F(x)$ es una de ellas, todas las cuales se diferencian en el valor de C, exigimos que $F(2) = \ln(2)$, según el enunciado, para hallar C:

$$F(2) = -\ln(2) + \frac{1}{2} + 2\ln(1) + C = \ln(2) \Leftrightarrow C = 2\ln(2) - \frac{1}{2}.$$

En consecuencia:

$$\boxed{F(x) = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + 2\ln(2) - \frac{1}{2}}$$

4) Queremos fabricar una caja con base cuadrada, de tal manera que la altura de la caja más el perímetro de la base sumen 60 cm. Determina sus dimensiones para que contenga el mayor volumen posible. *(2,5 puntos)*



Supondremos que la caja es un ortoedro. Su volumen será el producto del área de la base por la altura, esto es:

$$x^2h$$

que es una función de dos variables: x y h. Pero hay una restricción que las relaciona, y es que el perímetro de la base más la altura suman 60 cm:

$$4x + h = 60 \Leftrightarrow \boxed{h = 60 - 4x}. \quad (1)$$

Sustituyendo, la fórmula variable del volumen es:

$$V(x) = x^2(60 - 4x) = -4x^3 + 60x^2$$

Y hemos de hallar el <u>máximo absoluto de esta función</u>.

Veamos entre qué valores puede oscilar x. En primer lugar, no puede ser negativo, por lo que $x \geq 0$ (si $x = 0$, la caja tendría volumen 0, que será un mínimo absoluto de la función V, claramente). Y, por otro lado, la altura tampoco puede ser negativa, o sea: $h \geq 0$. Usando (1):

$$60 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow 4x \leq 60 \Leftrightarrow x \leq 15$$

Lo que nos lleva a que $x \in [0, 15]$.

Consiguientemente, hay que hallar el *máximo absoluto* de $V(x) = -4x^3 + 60x^2$ con $x \in [0, 15]$.

Para ello, estudiamos imágenes o límites de:

- Extremos del dominio: 0; 15.
- Discontinuidades de V: No tiene (es una polinómica).
- Discontinuidades de V': No tiene, pues: $V'(x) = -12x^2 + 120x$.

- $V'(x) = 0$: $12x(-x + 10) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = 10$.

Y dado que:

$$V(0) = 0; \quad V(15) = 0; \quad V(10) = 2000$$

El volumen máximo posible es de 2000 cm^2 (recordar que trabajamos en cm), que se consigue si el lado de la base es $x = 10$ cm con una altura de $h = 60 - 4\cdot 10 = 20$ cm.

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Sea $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$.
   a) Estudiar la derivabilidad de f. *(0,5 puntos)*
   b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. *(1 punto)*
   c) Calcular los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). *(1 punto)*

2) Calcular (sugerencia: $\sqrt{x+2} = t$): $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$ *(2,5 puntos)*

3) Dada la función $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$, se pide:
   a) Calcular sus asíntotas. *(1 punto)*
   b) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión. *(1,5 puntos)*

4) De entre todos los rectángulos de perímetro 8 cm, determinar las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud. *(2,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$.

a) Estudiar la derivabilidad de f. *(0,5 puntos)*

Una función definida a trozos (y ésta lo es, porque para derivar el valor absoluto hay que convertirlo en una función del tipo mencionado), requiere que se estudie su continuidad antes de derivarla. Pero esta función es la diferencia de una polinómica ($y = x^2$) y el valor absoluto de x. Ambas son continuas en R, por lo que <u>f es continua en R</u>.

La transformamos en definida a trozos, según la definición de *valor absoluto*:

$$f(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2 - (-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Aplicando los resultados de las tablas de derivadas, aplicables a intervalos *abiertos*, obtenemos, de momento:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Para $x = 0$:

$$f'(0^-) = 2\cdot 0 + 1 = 1 \quad \text{y} \quad f'(0^+) = 2\cdot 0 - 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad \nexists f'(0), \text{ por diferir.}$$

Por tanto, la expresión definitiva de $f'(x)$ es la que ya teníamos:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}}$$

b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. *(1 punto)*

- Discontinuidades de f: No hay.
- Discontinuidades de f': <u>$x = 0$</u>, pues, según vimos antes, $\nexists f'(0)$, es decir, falla la primera condición de continuidad en un punto.
- $f'(x) = 0$:
  - Si $x < 0$, debe ser $2x + 1 = 0 \Rightarrow$ <u>$x = -1/2$</u>, valor válido, pues está dentro de la zona estudiada ($x < 0$).
  - Si $x > 0$: $2x - 1 = 0 \Rightarrow$ <u>$x = 1/2$</u>, también válido, de forma análoga.

Dividimos el dominio de f en intervalos por los puntos obtenidos:

	$(-\infty, -1/2)$	$-1/2$	$(-1/2, 0)$	0	$(0, 1/2)$	$1/2$	$(1/2, +\infty)$
f'	–	0	+	$\nexists$	–	0	+
f	↘	Mín	↗	Máx	↘	Mín	↗

De modo que es:

$\boxed{\text{Decreciente en } (-\infty, -1/2) \cup (0, 1/2) \text{ y Creciente en } (-1/2, 0) \cup (1/2, +\infty)}$.

c) Calcular los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). *(1 punto)*

Como:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}; \qquad f(0) = 0^2 - 0 = 0;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

Según el estudio de monotonía, sabemos que los extremos relativos son:

- Mínimos relativos en: (–1/2. –1/4) y en (1/2, –1/4).
- Máximo relativo en (0, 0), que es *punto anguloso*.

2) Calcular (sugerencia: $\sqrt{x+2}=t$): $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$ *(2,5 puntos)*

Siendo $t=\sqrt{x+2} \Rightarrow t^2 = x+2 \Rightarrow x = t^2-2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$. Por tanto:

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2tdt}{(t^2-2-2)t} = \int \frac{2dt}{t^2-4}$$

Es una integral racional. Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples, aprovechando que el denominador tiene dos raíces simples: –2 y 2:

$$\frac{2}{t^2-4} = \frac{A}{t+2}+\frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2)+B(t+2)}{t^2-4} \Leftrightarrow 2 = A(t-2)+B(t+2)$$

- $t=-2$: $2=-4A \Rightarrow A=-1/2$
- $t=2$: $2=4B \Rightarrow B=1/2$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2dt}{t^2-4} = \int \frac{-1/2}{t+2}dt + \int \frac{1/2}{t-2}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t+2| + \frac{1}{2}\ln|t-2| + C = \boxed{-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{x+2}+2| + \frac{1}{2}\ln|\sqrt{x+2}-2| + C}$$

3) Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$, se pide:

a) Calcular sus asíntotas. *(1 punto)*

- AV: Como no tiene discontinuidades, dado que el denominador no se anula nunca, $\boxed{\text{no tiene asíntotas verticales}}$.
- AH: Dado que el comportamiento de la función exponencial difiere en $+\infty$ y en $-\infty$, calculamos los límites por separado:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{e^x} = \left(\frac{-\infty}{0^+}\right) = -\infty \Rightarrow \boxed{\text{No tiene asíntota horizontal si } x\to-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}, \text{L'Hôpital}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{y=0} \text{ es asíntota}$$

si $x\to+\infty$

- AO: Sólo podemos obtener una diferente en $-\infty$, pues la horizontal que ya conocemos volvería a salir aquí:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x+1}{e^x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x+1}{x}}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{e^x} = \left(\frac{1+0}{0^+} = \frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

$\boxed{\text{No tiene asíntotas oblicuas}}$. Pero sabemos que la función tiende a ponerse vertical cuando $x\to-\infty$, pues la pendiente de la asíntota sería infinita.

b) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión. *(1,5 puntos)*

Comencemos por calcular su punto de inflexión.

$$f'(x) = \frac{e^x - e^x(x+1)}{(e^x)^2} = \frac{e^x[1-(x+1)]}{e^{2x}} = \frac{1-x-1}{e^x} = -\frac{x}{e^x}$$

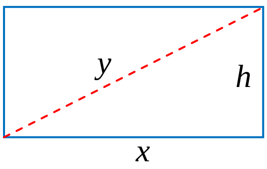
$$f''(x) = -\frac{e^x - e^x x}{e^{2x}} = -\frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{x-1}{e^x}$$

$$f'''(x) = \frac{e^x - e^x(x-1)}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x+1)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}$$

Como $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ (ya que $e^x \neq 0 \ \forall x$) $\Leftrightarrow x = 1$, y siendo $f'''(1) = 1/e \neq 0$, el único punto de inflexión lo tenemos en $x = 1$. Siendo $f(1) = 2/e$, sus coordenadas son $(1, 2/e)$.

- Punto de tangencia: $(1, 2/e)$.
- Pendiente de la tangente: $m = f'(1) = -1/e$
- Recta tangente: $y - \frac{2}{e} = -\frac{1}{e}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{-x+1+2}{e} \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{-x+3}{e}}$

4) De entre todos los rectángulos de perímetro 8 cm, determinar las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud. *(2,5 puntos)*



Hay que minimizar la diagonal, que llamaremos y. Se puede poner en función de la base x y la altura h usando el *Teorema de Pitágoras*:

$$y = \sqrt{x^2 + h^2}$$

Pero hay una restricción que afecta a x y h, que es que el perímetro vale 8:

$$2x + 2h = 8 \Rightarrow h = 4 - x \quad (1)$$

por lo que la función a minimizar es:

$$y = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{x^2 + (4-x)^2} = \sqrt{x^2 + 16 + x^2 - 8x} = \sqrt{2x^2 - 8x + 16}$$

Lo mínimo que puede valer x es 0, en cuyo caso $h = 4$, según (1). Lo mínimo que puede valer h es 0, lo que nos lleva a $x = 4$, según (1). Por tanto, $x \in [0, 4]$.

O sea, que hay que $\boxed{\text{minimizar } y = \sqrt{2x^2 - 8x + 16} \text{ con } x \in [0, 4]}$.

Veamos si $2x^2 - 8x + 16 \geq 0 \ \ \forall x \in [0, 4]$. Como $y = 2x^2 - 8x + 16$ es una parábola convexa, y no corta a OX, pues: $x^2 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2}$, sin solución, se mantiene siempre positiva. Luego dicha raíz siempre existe.

- Extremos del dominio: $x = 0$, $x = 4$.
- Discontinuidades de f: No tiene, según lo comentado antes.
- Discontinuidades de f': Como $y' = \frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2-8x+16}} = \frac{2x-4}{\sqrt{2x^2-8x+16}}$ y la raíz siempre existe y no se anula, tampoco tiene.
- $f'(x) = 0$: $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Comparamos el comportamiento de f en los tres puntos anteriores:

- $f(0) = \sqrt{16} = 4$.
- $f(4) = \sqrt{16} = 4$.
- $f(2) = \sqrt{8} \cong 2.83$

Luego el mínimo absoluto de la diagonal es $\sqrt{8}\, cm$ para un rectángulo de base $x = 2$ cm y altura $h = 4 - 2 = 2$ cm.