PROBLEMAS DE ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD EN EL ANTIGUO CURSO DE ORIENTACIÓN UNIVERSITARIA

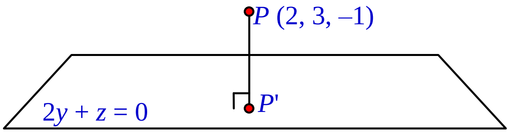
1) Hallar las coordenadas del pie de la perpendicular bajada desde el punto (2, 3, –1) al plano que pasa por los puntos (1, 2, –4), (2, 1, –2) y (3, –1, 2)

Comenzamos calculando la ecuación del plano. Dos vectores de dirección del mismo son los que van desde el primero de los tres puntos a cada uno de los otros dos:

$$(2, 1, -2) - (1, 2, -4) = (1, -1, 2)$$
$$(3, -1, 2) - (1, 2, -4) = (2, -3, 6)$$

El plano es, por tanto:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-2 & -1 & -3 \\ z+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-2)(-2) + (z+4)(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y + z = 0$$



Nos piden las coordenadas de P'.

Una recta perpendicular a dicho plano llevará la dirección de un vector normal al mismo: (0, 2, 1).

La que pasa por (2, 3, –1) será:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

El punto solicitado será la intersección de esta recta con el plano. Para calcularlo, sustituimos las coordenadas de un punto genérico de la recta (que nos proporcionan las ecuaciones paramétricas) en la ecuación del plano:

$$2(3 + 2t) - 1 + t = 0 \;\Rightarrow\; 5 + 5t = 0 \;\Rightarrow\; t = -1$$

que sustituyendo en las ecuaciones paramétricas da: $\boxed{P'(2, 1, -2).}$

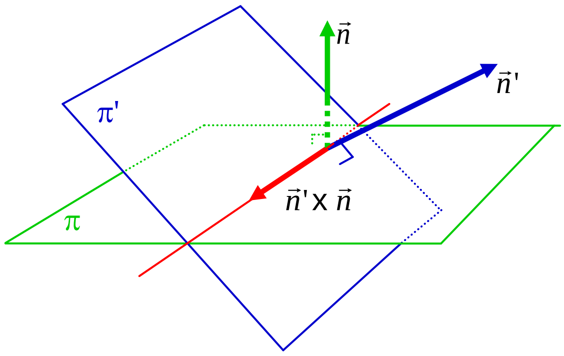
2) a) Dadas las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

obtener la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 0, 2)$ y es paralelo a r y a s.

Si es paralelo a r y a s, los vectores de dirección de dichas rectas serán paralelos al plano, es decir, serán vectores de dirección del plano solicitado.

Un vector de dirección de r podremos conseguirlo multiplicando vectorialmente los vectores normales de los dos planos que la determinan (ver figura):



$$(1, -2, 1) \times (1, -3, 1) = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \right) = (1, 0, -1)$$

Por tanto, el plano será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 3 \\ y & 0 & 1 \\ z-2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff (x-1)\cdot 1 - y\cdot(-1+3) + (z-2)\cdot 1 = 0 \iff x - 1 - 2y + z - 2 = 0$$

$$\iff \boxed{x - 2y + z - 3 = 0}$$

3) a) Hallar la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} \qquad r' \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$$

b) Calcular la ecuación del plano que contiene a r y pasa por el punto (0, 0, 1).

a) La posición relativa de dos rectas en el espacio puede calcularse con rapidez de la siguiente manera. Sean $\vec{d}$ y $\vec{d}'$ los respectivos vectores de dirección y supongamos conocidos dos puntos cualesquiera A y A' uno en cada recta. Podemos formar entonces el vector $\vec{p} = \overrightarrow{AA'}$.

Caso 1: *Los vectores de dirección son linealmente independientes*. En ese caso, las rectas se cortan o se cruzan.

Si se cortan, existe un plano que las contiene a ambas. Entonces, los vectores $\vec{d}$, $\vec{d}'$ y $\vec{p}$ están contenidos en ese plano, por lo que serán linealmente dependientes; es decir, *el determinante formado por esos tres vectores vale 0*.

Si se cruzan, los tres vectores anteriores no podrán estar en un mismo plano, por lo que *el determinante citado será $\neq 0$.*

Caso 2: Si *los vectores de dirección son linealmente dependientes*, las rectas serán paralelas o coincidentes.

Si son paralelas, los vectores $\vec{p}$ y $\vec{d}$ llevarán distinta dirección, es decir, serán linealmente independientes.

Si son coincidentes, los vectores $\vec{p}$ y $\vec{d}$ llevarán la misma dirección, por lo que uno será múltiplo del otro (es decir, serán linealmente dependientes).

En nuestro problema, $\vec{p}$ = (1, 0, 0) – (0, 0, 1) = (1, 0, –1), $\vec{d}$ = (2, 3, 2) y $\vec{d}'$ = (1, 1, 5). Como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

las dos rectas $\boxed{\textit{se cruzan}}$.

b) El plano que contiene a r y pasa por $P(0, 0, 1)$ debe tener como vectores de dirección al de r y al que va de $(1, 0, 0) \in r$ hasta $P(0, 0, 1)$, que es: (1, 0, 0) – (0, 0, 1) = (1, 0, –1). Como además pasa por P, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 0 & 3 \\ z-1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff 3x - 4y + 3(z-1) = 0 \iff \boxed{3x - 4y + 3z - 3 = 0}$$

4) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 3) y es paralela a la recta

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

La forma más corta de hacerlo será, probablemente, tomar sendos planos paralelos a los que determinan la recta del enunciado, que pasen por el punto (1, 2, 3), quedando la recta como intersección de dichos planos:

Paralelo al primero: $2x + 3y - z + d = 0$. Para que pase por (1, 2, 3) $\Rightarrow$ $2 + 6 - 3 + d = 0$ $\Rightarrow$ $d = -5$. El plano es: $2x + 3y - z - 5 = 0$.

Paralelo al segundo: Éste lo haremos de otra forma. Si $ax + by + cz + d = 0$ es un plano, otro paralelo a éste y que pase por el punto $P(p_1, p_2, p_3)$ es $a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) = 0$. Por tanto, este plano es: $(x - 1) - (y - 2) + 3(z - 3) = 0$ $\Rightarrow$ $x - y + 3z - 8 = 0$.

La recta es:

$$\boxed{\begin{cases} 2x + 3y - z - 5 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases}}$$

5) Hallar las coordenadas del punto de la recta

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3}$$

que equidista del origen de coordenadas y del punto (3, 2, 1).

Lo vamos a hacer de dos formas distintas. Veamos la *primera*:
Un punto genérico de la recta pedida es de la forma: $(-3+2t, -5+3t, -4+3t)$ (no hay más que pasar la recta a paramétricas). Tenemos que hallar el valor de t que nos da el punto o puntos solicitados.
La distancia de dicho punto genérico al punto (3, 2, 1) es:

$$\sqrt{(-3+2t-3)^2 + (-5+3t-2)^2 + (-4+3t-1)^2} = \sqrt{(-6+2t)^2 + (-7+3t)^2 + (-5+3t)^2}$$

La distancia al origen (0, 0, 0) es: $\sqrt{(-3+2t)^2 + (-5+3t)^2 + (-4+3t)^2}$

Igualando y elevando al cuadrado:

$$36 + 4t^2 - 24t + 49 + 9t^2 - 42t + 25 + 9t^2 - 30t =$$
$$= 9 + 4t^2 - 12t + 25 + 9t^2 - 30t + 16 + 9t^2 - 24t$$

de donde: $110 - 96t = 50 - 66t$ $\Rightarrow$ $30t = 60$ $\Rightarrow$ $t = 2$.
que se comprueba que en efecto es solución (al elevar al cuadrado hay que comprobar las soluciones obtenidas en la ecuación original). Por tanto, el punto es: $(-3+2\cdot2, -5+3\cdot2, -4+3\cdot2) = \boxed{(1, 1, 2)}$.

La *segunda forma* consiste en calcular el plano mediatriz del segmento que va del punto (3, 2, 1) al origen. Es decir, un plano perpendicular a dicho segmento y que pasa por su punto medio.

Pues bien. Al ser perpendicular a dicho segmento, el vector que une los extremos del segmento es normal al plano: $\vec{n}$ =(3, 2, 1) – (0, 0, 0) = (3, 2, 1).

El plano pasa por el punto medio de dicho segmento, que es: $\left(\frac{3+0}{2},\frac{2+0}{2},\frac{1+0}{2}\right)$ = $\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)$.

Por tanto, el plano es:

$$3\left(x-\frac{3}{2}\right)+2(y-1)+\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad 3x + 2y + z - 7 = 0$$

El punto que nos piden es la intersección de la recta dada con este plano. Para calcularla, ponemos la recta en paramétricas, sustituimos en el plano y hallamos el valor del parámetro:

$$r \equiv \begin{cases} x=-3+2t \\ y=-5+3t \\ z=-4+3t \end{cases} \quad\Rightarrow\quad 3(-3+2t)+2(-5+3t)+(-4+3t)-7=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 6t+6t+3t-9-10-4-7=0 \quad\Rightarrow\quad 15t=30 \quad\Rightarrow\quad t=2$$

Sustituyendo en las ecuaciones paramétricas, tenemos el punto: (–3+2·2, –5+3·2, –4+3·2) = $\boxed{(1, 1, 2)}$.

6) Dadas la recta $r \equiv \begin{cases} x=2+t \\ y=\ \ -t \\ z=\ \ \ \ t \end{cases}$ y la recta s determinada por los puntos A(2, 1, 0) y B(1, 0, –1), estudiar su posición relativa y determinar un punto C de r tal que CA y CB sean perpendiculares.

La recta s tiene de ecuaciones: $s \equiv \begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=\ \ \ \ t \end{cases}$ puesto que pasa por A y un vector de dirección es $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ = (1, 0, –1) – (2, 1, 0) = (–1, –1, –1), que es paralelo a (1, 1, 1), el cual tomamos, finalmente, como vector de dirección.

Como los vectores respectivos de dirección no son proporcionales, las rectas llevan distinta dirección. Por el método indicado en el problema 3), como:

$$\begin{vmatrix} 2-2 & 1 & 1 \\ 0-1 & -1 & 1 \\ -0-0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (adjuntos columna 1)}$$

Las dos rectas se cortan en un punto.

Para la segunda parte $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ serán perpendiculares si su producto escalar vale 0. Como, dado que es un punto de r, $C(2+t, -t, t)$, para cierto t que hay que averiguar, eso equivale a:

$$(2+t-2, -t-1, t-0)\cdot(2+t-1, -t-0, t+1)=0 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad t(1+t)+t(1+t)+t(1+t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3t(1+t)=0 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad t=0 \text{ ó } t=-1.$$

Luego hay dos puntos que verifican la condición:

para $t = 0$: $C(2, 0, 0)$ para $t = –1$: $C'(1, 1, –1)$.

7) Hallar las coordenadas del punto (o de los puntos) situado sobre la recta que une los puntos (0,1,0) y (2,3,2) y que dista 1 del punto (1,1,1).

Un punto de la recta pedida es (0, 1, 0), y un vector de dirección es el que une dicho punto con el (2, 3, 2), es decir, (2–0, 3–1, 2–0) = (2, 2, 2). Como (1, 1, 1) lleva la misma dirección (es la mitad del vector anterior) y tiene cantidades más cómodas de utilizar, es el que tomaremos como vector de dirección.
Por tanto, un punto genérico de la recta pedida es $(t, 1 + t, t)$ (no habría más que escribir las ecuaciones paramétricas). Hallemos t con la condición solicitada.

$$d[\,(t, 1+t, t), (1, 1, 1)] = 1 \;\Rightarrow\; \sqrt{(t-1)^2+(1+t-1)^2+(t-1)^2}=1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (t-1)^2 + t^2 + (t-1)^2 = 1^2 \;\Rightarrow\; 3t^2 - 4t + 1 = 0 \;\Rightarrow\; t = 1 \text{ ó } t = 1/3.$$

Los puntos solución son, entonces: (1, 1+1, 1) = $\boxed{(1, 2, 1)}$ y (1/3, 1 + 1/3, 1/3) = $\boxed{(1/3, 4/3, 1/3)}$.

8) Dadas las rectas

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{4} \qquad \frac{x}{3}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{2} \qquad \frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{2}$$

comprobar que son paralelas a un mismo plano y hallar la ecuación del plano paralelo a las tres rectas que pasa por el punto (1, 1, 1).

Si los tres vectores de dirección respectivos son linealmente dependientes, entonces, serán coplanarios, es decir, estarán contenidos en un mismo plano. Dicho plano será, entonces, paralelo a las tres rectas, puesto que contiene a sus vectores de dirección respectivos. Además, habría infinitos planos en tales condiciones, puesto que, de encontrar uno, cualquier otro plano paralelo a él será, por tanto, paralelo a las tres rectas.

Para comprobar que son linealmente dependientes, bastará ver que el determinante formado por ellos vale 0 (el rango de la matriz respectiva será, entonces, menor que 3). Y, en efecto:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Para hallar el plano que pasa por (1, 1, 1), tomamos los vectores de dirección de las dos primeras rectas (por ejemplo) y dicho punto, con lo que el plano será:

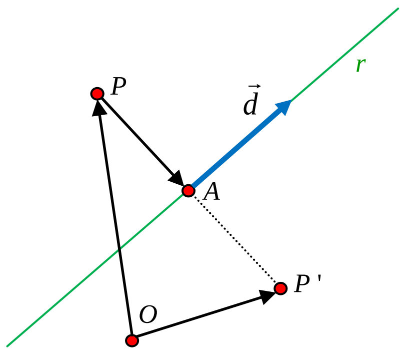
$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z-1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (x-1)(-6) + (y-1)\cdot 8 + 5(z-1) = -6x + 8y + 5z - 7 = 0$$

es decir: $\boxed{-6x + 8y + 5z - 7 = 0}$.

9) Determinar las coordenadas del punto simétrico del P(–3, 1, –7) respecto de la recta

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$$

Sea $A(-1+t,\ 3+2t,\ -1+2t)$ un punto genérico de la recta, en función del parámetro t (basta pasar la recta a paramétricas). Determinaremos A de forma que el vector $\overrightarrow{PA}$ sea perpendicular a la recta (ver gráfico). Para ello, basta con que lo sea a su vector de dirección, para lo cual debe dar 0 al multiplicarlo escalarmente por él). Entonces, si P' es el punto simétrico pedido, se tendrá que $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PA}$. Y como $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PA}$ tendremos las coordenadas de P' (que son las de su vector de posición $\overrightarrow{OP'}$).



Pues bien, $\overrightarrow{PA}\cdot\vec{d}=0 \iff$

$\iff (-1+t+3,\ 3+2t-1,\ -1+2t+7)\cdot(1,2,2)=0$

$\iff 2+t+4+4t+12+4t=0 \iff 18+9t=0 \iff t=-2$

Luego $A(-3,-1,-5) \Rightarrow \overrightarrow{PA}=(0,-2,2) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{OP'}=(-3,1,-7)+2\cdot(0,-2,2)=\boxed{(-3,-3,-3)}.$$

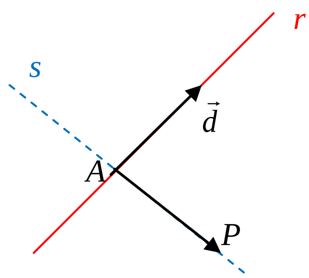
10) Hallar la recta que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r\equiv\begin{cases}x+y+z=0\\2x+y+3z-1=0\end{cases}$$

Esbozamos *un método*, pero lo resolveremos de otra forma:
Para la recta pedida, a la que llamaremos s tenemos un punto: P. Necesitamos un vector de dirección.

Si llamamos A al punto de corte entre ambas rectas, un vector de dirección de s será $\overrightarrow{AP}$.
Como A es un punto, también, de r, tendremos su estructura en función de cierto valor de t pasando dicha recta a paramétricas:

Llamamos $z=t$ (no forma parte del menor $\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\neq 0$). Entonces:



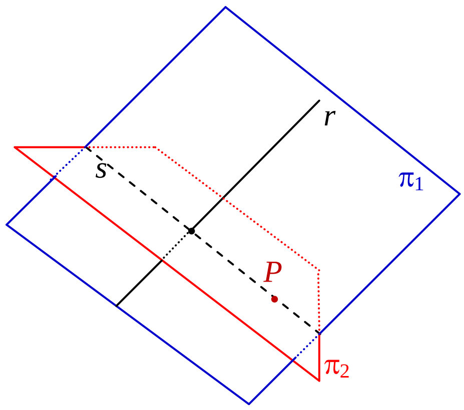
$r\equiv\begin{cases}x+y=-t\\2x+y=1-3t\end{cases} \Rightarrow$ Restando: $-x=-1+2t \Rightarrow x=1-2t$

Sustituyendo en la 1ª ec.: $1-2t+y=-t \Rightarrow y=-1+t$

Luego: $r\equiv\begin{cases}x=1-2t\\y=-1+t\\z=t\end{cases}$

Por tanto: $A(1-2t,\ -1+t,\ t)$. Obligando a que $\overrightarrow{AP}=(2t,\ 2-t,\ 1-t)$ dé cero al multiplicarlo escalarmente por el vector de dirección de r: $\vec{d}=(-2,1,1)$, hallaremos el valor del parámetro t que nos revela quién es A: $t = 1/2$. Conoceremos por tanto $\overrightarrow{AP} = (1, 3/2, 1/2)$, que es vector de dirección de s. Como tenemos puntos de s, por ejemplo P, podremos determinar la ecuación de esta recta.

Sin embargo, nosotros emplearemos <u>*otro método*</u>, con un razonamiento distinto y, posiblemente, más corto. Como r y s se cortan, existe un plano π_1 que las contiene a ambas rectas. Además, como son perpendiculares, s estará contenida en un plano π_2 perpendicular a r que contiene a P. Como s debe pasar por $P(1, 1, 1)$, ambos planos deben contener a dicho punto. La recta s será, entonces, la intersección de estos dos planos. Calculémoslos.



- Plano π_1 que contiene a r y a P: Todos los planos que contienen a r son (haz de planos):

  $$x + y + z + t\,(2x + y + 3z - 1) = 0$$

  salvo $2x + y + 3z - 1 = 0$, que no se consigue para ningún valor de t, pero que tampoco contiene a P. Veamos cuál de ellos contiene a P:

  $$1 + 1 + 1 + t\,(2 + 1 + 3 - 1) = 0 \Rightarrow 3 + 5t = 0 \Rightarrow t = -3/5.$$

  El plano es: $5x + 5y + 5z - 6x - 3y - 9z + 3 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y - 4z + 3 = 0 \equiv \pi_1$

- Plano π_2 perpendicular a r que contiene a P: Si es perpendicular a r, el vector de dirección de esta recta será normal a dicho plano. Como este vector es $\vec{n} \times \vec{n}'$ (ver problema 2)), resulta valer:

  $$(1, 1, 1) \times (2, 1, 3) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2, -1, -1)$$

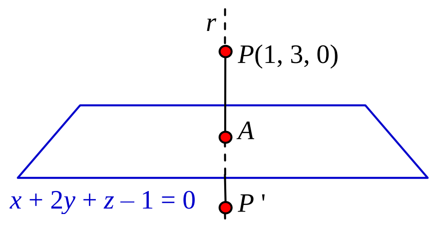
  el plano será: $2x - y - z + d = 0$. Para que pase por $(1, 1, 1)$:

  $$2 - 1 - 1 + d = 0 \;=>\; d = 0$$

  Luego el plano es: $2x - y - z = 0 \equiv \pi_2$.

Por tanto, la recta pedida es: $\boxed{\begin{cases} -x + 2y - 4z + 3 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}}$

11) Dado el punto $P(1, 3, 0)$ y el plano $x + 2y + z - 1 = 0$, hallar las coordenadas del punto simétrico de P respecto de dicho plano.



Una forma de hacerlo sería hallar la perpendicular r al plano que pasa por P; encontrar el punto A de intersección de r con el plano; por último, calcularemos P' utilizando que A es el punto medio del segmento PP'.

- Cálculo de r: Pasa por $P(1, 3, 0)$ y es ortogonal a $x + 2y + z - 1 = 0$, por lo que llevará la dirección del vector normal a este plano: (1, 2, 1). Luego es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

- Intersección de r y el plano: Veamos el valor del t de las ecuaciones paramétricas de r que nos da un punto del plano. Sustituyendo (x, y, z) de r en las ecuaciones del plano:

$$1 + t + 2(3 + 2t) + t - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 6 + 6t = 0 \;\Rightarrow\; t = -1$$

por lo que el punto es $A(1-1, 3-2, -1) = (0, 1, -1)$

- Por último suponiendo que las coordenadas de P' son (a, b, c), usando las fórmulas de cálculo del punto medio de un segmento y teniendo presente que $A(0, 1, -1)$ está en la mitad de $P(1, 3, 0)$ y $P'(a, b, c)$:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1+a}{2} \Rightarrow a = -1 \\ 1 = \dfrac{3+b}{2} \Rightarrow b = -1 \\ -1 = \dfrac{0+c}{2} \Rightarrow c = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P'(-1, -1, -2)}$$

12) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-11}{-6}$$

y es paralelo a la recta

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-3}$$

Si debe ser paralelo a la segunda recta, el vector de dirección de ésta (1, 4, –3) debe ser paralelo al plano. Como hablamos de vectores libres, que pueden situarse con origen en cualquier punto del espacio, este vector podemos situarlo dentro del plano buscado, por lo que *es un vector de dirección del plano.*

Como debe contener a la primera recta, su vector de dirección (1, 8, –6) es, también, vector de dirección del plano buscado. Además, cualquier punto de esta recta, por ejemplo, el (0, 2, 11), es un punto del plano.

Con un punto y dos vectores de dirección, tenemos al plano totalmente determinado:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-2 & 8 & 4 \\ z-11 & -6 & -3 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} + (z-11)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(y-2) - 4(z-11) = -3y + 6 - 4z + 44 = -3y - 4z + 50 = 0$$

O sea: $\boxed{-3y - 4z + 50 = 0}$

13) Sabiendo que dos lados de un cuadrado están en las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

calcular su área.

Como el menor formado por los coeficientes de x e y en las ecuaciones de s es no nulo, podemos pasar z al segundo miembro y despejar x e y. Llamando z = t, obtenemos las ecuaciones paramétricas de esta recta:

$$\begin{cases} x - y = 2 - t \\ 3x - y = -4 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \begin{cases} x - y = 2 - t \\ -3x + y = 4 - t \end{cases} \\ \hline -2x \quad = 6 - 2t \end{array} \Rightarrow x = -3 + t$$

Y también: $$\begin{array}{r} \begin{cases} -3x + 3y = -6 + 3t \\ 3x - y = -4 + t \end{cases} \\ \hline 2y = -10 + 4t \end{array} \Rightarrow y = -5 + 2t$$

De donde:

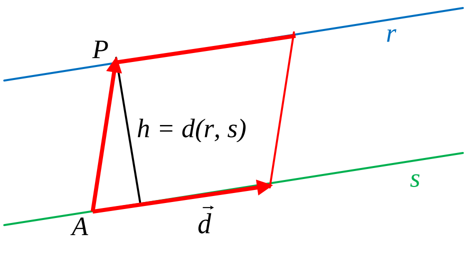
$$s \equiv \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -5 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

lo que significa que r y s son *paralelas*, puesto que no tienen puntos en común (tomamos un punto de s: (–3, –5, 0) y vemos que no verifica la ec. de r) y tienen vectores de dirección múltiplos uno del otro: en esta caso, con factor de multiplicidad 1, puesto que son el mismo vector de dirección: (1, 2, 1).

Por tanto, si hay un cuadrado entre ambas rectas, el lado de dicho cuadrado medirá igual que la distancia entre ambas rectas. Calculemos dicha distancia.

Como son rectas paralelas, la distancia entre ambas será la distancia entre un punto $P \in r$ y la recta s. Siendo A un punto cualquiera de s, dicha distancia valdrá (ver figura adjunta):

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{AP} \text{ x } \vec{d}\,|}{|\vec{d}\,|} \qquad (1)$$



ya que el numerador es el área del paralelogramo, el denominador es la longitud de la base y $d(r, s)$ es la altura.
Tomando $P(1, 0, 2)$ y $A(-3, -5, 0)$, puntos que deducimos de las ecuaciones paramétricas, tenemos que:

$$\overrightarrow{AP} = (1, 0, 2) - (-3, -5, 0) = (4, 5, 2).$$

El producto vectorial de este vector con el vector de dirección de s: $\vec{d} = (1, 2, 1)$ vale:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{d} = \left(\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (1, -2, 3)$$

cuyo módulo es $\sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$. Este es el valor del numerador de (1). El denominador es $|\vec{d}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$. Por tanto:

$$d(r,s) = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{14}{6}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Como este es el lado del cuadrado, su área será este valor multiplicado por sí mismo:

$$\boxed{\text{Área cuadrado} = 7/3 \;\; u^2}.$$

14) Hallar la ecuación de dos rectas cualesquiera r y s paralelas al plano $x + 2y - z = 1$ tales que r y s sean perpendiculares.

Habrá infinitas parejas de rectas perpendiculares entre sí y paralelas a un plano dado. En efecto, hay infinitos planos paralelos al plano dado; tomando uno de ellos, cualquier recta contenida en él será paralela al plano inicial. Y dada dicha recta, habrá infinitas rectas perpendiculares a ella contenidas en el mismo plano. El problema tiene, pues, infinitas soluciones, pero nos piden sólo una solución.

Pues bien; hallaremos una primera recta r paralela al plano. Para serlo, su vector de dirección será paralelo al plano y, por tanto, perpendicular al vector normal al plano. Hallemos un vector cualquiera $\vec{d}$ ortogonal al vector normal al plano $\vec{n} = (1, 2, -1)$, es decir, tal que multiplicados escalarmente resulten 0. Si llamamos $\vec{d} = (x, y, z)$, se tendrá:

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z)\cdot(1, 2, -1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y - z = 0$$

Este es un sistema de una ecuación con tres incógnitas compatible indeterminado. Como sólo buscamos una solución (y no todas), tomando, por ejemplo, $y = 0$ y $z = 1$ resulta $x = 1$. Por tanto, un vector paralelo al plano es, por ejemplo $\vec{d} = (1, 0, 1)$. (Otra forma de obtenerlo podría haber sido invirtiendo el orden de dos coordenadas de $\vec{n}$, cambiándole el signo a una de ellas, y haciendo 0 la tercera coordenada). Para completar una recta paralela al plano, y no contenida en él, tomaremos un punto cualquiera que no pertenezca al plano: (0, 0, 0) (no verifica la ecuación del plano). Luego la primera recta podría ser, por ejemplo:

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}}$$

Para tomar una perpendicular a ésta que sea paralela al plano, bastará tomar un vector de dirección $\vec{d}\,'$ que sea, a la vez, perpendicular al de r: $\vec{d} = (1, 0, 1)$ y al normal al plano: $\vec{n} = (1, 2, -1)$. El producto vectorial de ambos vectores proporciona tal vector:

$$\vec{n} \times \vec{d} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2, -2, -2)$$

para vector de dirección de la segunda recta nos vale un paralelo (multiplicándolo por 1/2): $\vec{d}\,' = (1, -1, -1)$. Así que usando, también, el punto (0, 0, 0), externo al plano, la segunda recta sería:

$$\boxed{s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}}$$

15) Sabiendo que dos caras de un cubo están en los planos $2x + y + z = 1$ y $2x + y + z = 3$, calcular su volumen.

Es inmediato comprobar que los dos planos son paralelos (tienen el mismo vector normal). Por tanto, un cubo que esté entre ambos tiene como longitud de la arista la distancia que los separa. Esa distancia será la de cualquier punto del primer plano, por ejemplo, el $P(0, 0, 1)$, al segundo. No hay más que sustituir en la fórmula, y resulta:

$$d(\pi,\pi') = d(P,\pi') = \frac{|2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1 - 3|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

El volumen del cubo es la arista elevada a 3. Por tanto:

$$Volumen\ del\ cubo = \frac{8}{6\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3\cdot 6} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{9} u^3}$$

16) Determinar el valor de h para que resulten paralelas las rectas r y s, de ecuaciones:

$$r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{h} = \frac{z-2}{4} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x + 2y - z = 4 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Hallar luego la distancia entre ambas y la ecuación del plano que determinan.

Pasemos s a paramétricas. Como el menor formado por los coeficientes de x e y es no nulo, podemos despejar ambas incógnitas en función de z, quedando:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 + z \\ x - y = -2 + z \end{cases}$$

De donde:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 + z \\ 2x - 2y = -4 + 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y = 4 + z \\ -2x + 2y = 4 - 2z \end{cases}$$

$$4x = 3z \Rightarrow x = \frac{3z}{4} \qquad 4y = 8 - z \Rightarrow y = 2 - \frac{z}{4}$$

Llamando $z = 4t$ resulta:

$$s \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 4t \end{cases}$$

Las dos rectas serán paralelas si sus respectivos vectores de dirección son linealmente dependientes, o sea, si:

$$rang\begin{pmatrix} 3 & h & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{3} = \frac{h}{-1} = \frac{4}{4} \Leftrightarrow \boxed{h = -1}$$

Para hallar la **distancia entre ambas rectas** procedemos tal como en el ejercicio 13). Tomamos $P(3, 5, 2) \in r$ y $A(0, 2, 0) \in s$:

$$\overrightarrow{AP} = (3, 5, 2) - (0, 2, 0) = (3, 3, 2).$$

El producto vectorial de este vector con el vector de dirección de s: (3, –1, 4) vale:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{d} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (14, -6, -12)$$

Entonces:

$$d(r,s) = d(P,s) = \frac{|(14,-6,-12)|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{376}}{\sqrt{9+1+16}} = \sqrt{\frac{376}{26}} = \boxed{\sqrt{\frac{188}{13}}\ u}$$

El **plano que determinan** $\boldsymbol{r}$ **y** $\boldsymbol{s}$ contiene al vector de dirección de r y s (un único vector, ya que las rectas son paralelas), a saber:

$$\vec{d} = (3, -1, 4)$$

Otro vector contenido en dicho plano es el que va de un punto de r a un punto de s. Siendo $P(3, 5, 2) \in r$ y $A(0, 2, 0) \in s$:

$$\overrightarrow{AP} = (3, 3, 2).$$

Un punto del plano es $P(3, 5, 2)$, que pertenece a r. Por tanto, el plano es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 3 & 3 \\ y-5 & -1 & 3 \\ z-2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -14x + 6y + 12z - 12 = 0$$

es decir: $\boxed{-7x + 3y + 6z - 6 = 0}$.

17) Calcular a para que los puntos $P_1(2, -1, 5)$, $P_2(7, 3, 0)$, $P_3(0, 4, 1)$, $P_4(3, 1, a)$ sean coplanarios. Dar la ecuación implícita del plano que los contiene.

Los puntos serán coplanarios si los vectores que van desde P_1 a los otros tres puntos están contenidos en el mismo plano. Esto ocurrirá si y sólo si dichos vectores son linealmente dependientes (el máximo número de vectores linealmente independientes contenidos en un plano es de 2 => si tres vectores están en un plano, son l. dependientes; recíprocamente, si tres vectores son l. dependientes, uno de ellos, al menos, es combinación lineal de los otros dos, por lo que estará contenido en el mismo plano que ellos). Esos tres vectores serán lin. dependientes si el rango de la matriz formada por sus coordenadas es menor que tres, lo que equivale a:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -5 & -4 & a-5 \end{vmatrix} = 0 \iff 25a - 125 + 20 - 16 + 25 + 40 + 8a - 40 = 0 \iff 33a - 96 = 0$$

Lo que ocurre cuando $\boxed{a = \frac{32}{11}}$.

El plano que los contiene tendrá como vectores de dirección al que une P_1 con P_2 y al que une P_1 con P_3. Un punto del mismo es P_1, por lo que su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 5 & -2 \\ y+1 & 4 & 5 \\ z-5 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0 \iff (x-2)\cdot 9 - (y+1)\cdot(-30) + (z-5)\cdot 33 = 0 \iff$$

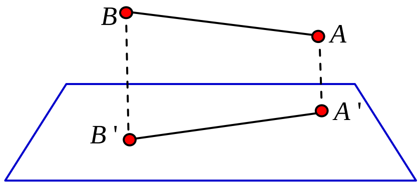
$$\iff 9x + 30y + 33z - 18 + 30 - 165 = 0 \iff 9x + 30y + 33z - 153 = 0 \iff$$

$$\iff \boxed{3x + 10y + 11z - 51 = 0}$$

18) Hallar la longitud de la proyección del segmento de extremos $A(2, 5, 3)$ y $B(3, 4, -1)$ sobre el plano $2x + y - 2z = 0$.

Necesitamos hallar los puntos A' y B' proyecciones de A y B sobre el plano, y calcular la distancia entre aquéllos. Para hallarlos, podríamos utilizar un procedimiento análogo al del problema 1) y del problema 11), es decir, calculamos las rectas perpendiculares al plano (tendrán como vector de dirección el normal al plano) que pasen por A y B respectivamente y, a continuación, calculamos las intersecciones de dichas rectas con el plano.

Por ilustrar que este tipo de problemas admite, normalmente, varios métodos de resolución, vamos a hacerlo de otras formas.



En la primera forma, comenzamos hallando la distancia entre A y el plano π:

$$d(A,\pi) = \frac{|4+5-6|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{3}{3} = 1$$

Las coordenadas de A' o, lo que es lo mismo, las de su vector de posición $\overrightarrow{OA'}$ (O es el origen del sistema de referencia, que siempre lo suponemos métrico), podrán obtenerse sumando $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'}$. Pero éste último es un vector normal al plano y de longitud 1, que es la distancia que separa A de π. Un vector normal al plano es (2, 1 ,–2), cuyo módulo vale 3. Por tanto, un vector normal al plano y unitario será 1/3 de éste:

$$\frac{1}{3}(2, 1, -2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Ahora bien; desconocemos si éste es $\overrightarrow{AA'}$ o $-\overrightarrow{AA'}$. (Hay dos vectores opuestos que son normales al plano y de módulo 1). $\overrightarrow{OA'}$ será $\overrightarrow{OA}$ sumado con ese vector o con su opuesto. Lo que haremos será calcular las dos posibilidades y ver cuál nos da un punto del plano:

$$\overrightarrow{OA} + \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = (2, 5, 3) + \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

Que se comprueba que no pertenece al plano, porque no verifica su ecuación.

$$\overrightarrow{OA} + \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = (2, 5, 3) + \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

Que sí pertenece al plano. Por tanto, éstas últimas son las coordenadas de A'.

De forma análoga:

$$d(B,\pi) = \frac{|6+4+2|}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Un vector de módulo 4 normal al plano será:

$$4\cdot\frac{1}{3}(2,\ 1,\ –2) = \left(\frac{8}{3},\frac{4}{3},-\frac{8}{3}\right)$$

Por tanto, éste o su opuesto será $\overrightarrow{BB'}$. Sumamos ambos a $\overrightarrow{OB}$:

$$\overrightarrow{OB}+\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3},-\frac{8}{3}\right) = (3,\ 4,\ –1)+\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3},-\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{17}{3},\frac{16}{3},-\frac{11}{3}\right)$$

Que no está en el plano, porque no verifica su ecuación.

$$\overrightarrow{OB}+\left(-\frac{8}{3},-\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right) = (3,\ 4,\ –1)+\left(-\frac{8}{3},-\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{1}{3},\frac{8}{3},\frac{5}{3}\right)$$

Que sí está en el plano, pues verifica su ecuación. Por tanto, ésta últimas son las coordenadas de B'. Luego:

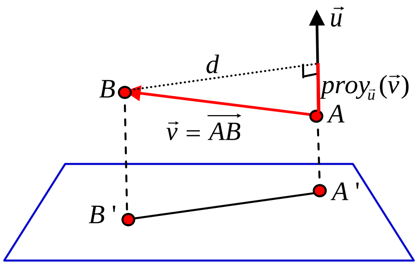
$$d(A',\ B') = \left|\ \overrightarrow{AB'}\ \right| = \left|(–1,\ –2,\ –2)\right| = \boxed{3}.$$

Sin duda, este método de resolución es más largo que el propuesto al principio.

Habría más formas de encontrar, vectorialmente, los puntos A' y B'. Por ejemplo, tomando un punto genérico (en función de parámetros) del plano y obligando a que el vector que lo une con A sea paralelo al vector normal al plano. De ahí encontraríamos los valores necesarios de los parámetros, que nos darían el punto A'. Y análogamente se calcularía B'.

Pero, probablemente, la forma más corta de resolverlo es la siguiente. La interpretación geométrica del producto escalar nos dice:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot proy_{\vec{u}}(\vec{v})$$



Si llamamos $\vec{u}$ al vector normal al plano: $\vec{u}$ = (2, 1, –2), y $\vec{v}$ = $\overrightarrow{AB}$ = (3, 4, –1) – (2, 5, 3) = (1, –1, –4), y d = d(A', B'), se tiene:

$\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 2·1 + 1·(–1) + (–2)·(–4) = 2 – 1 + 8 = 9

$|\ \vec{u}\ |$ = 3

por lo que: $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|} = \dfrac{9}{3} = 3.$

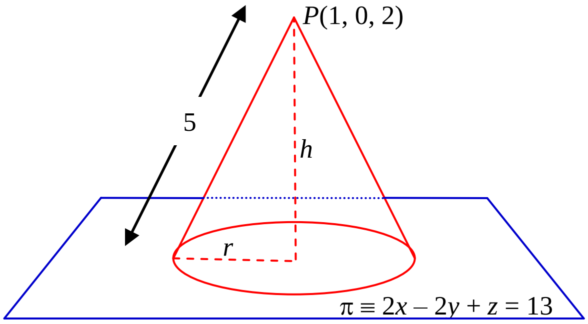
Observando la figura, se tiene que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y d constituyen un triángulo rectángulo, por lo que, según el Teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{18-9} = \sqrt{9} = \boxed{3}$$

19) Dados el punto $P(1, 0, 2,)$ y el plano $\pi \equiv 2x - 2y + z = 13$, hallar el volumen del cono cuya base es el círculo formado por los puntos de π cuya distancia a P es menor o igual que 5, y cuyo vértice es el punto P.

Tal como se aprecia en el dibujo, la altura del cono será:

$$h = d(P,\pi) = \frac{|2+2-13|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{9}{3} = 3$$



La circunferencia que delimita la base del cono estará formada por todos los puntos del plano cuya distancia a P es 5. El radio de dicha circunferencia puede considerarse uno de los catetos del triángulo rectángulo de la figura, por lo que, por el Teorema de Pitágoras:

$$r = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$$

Por tanto, el área de la base valdrá $\pi r^2 = 16\pi$.
El volumen del cono, que es 1/3 del área de la base por la altura, es:

$$V = \frac{1}{3} 16\pi \cdot 3 = \boxed{16\pi \quad u^3}$$

20) Sea π un plano que pasa por $P(1, 2, 1)$ y corta a los semiejes coordenados positivos en los puntos A, B y C. Sabiendo que el triángulo ABC es equilátero, hallar la ecuación del plano π.

Llamemos $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ y $C(0, 0, c)$ a los tres puntos de corte de π con cada uno de los tres semiejes. Las distancias entre ellos, tomados 2 a 2, son iguales, puesto que forman un triángulo equilátero, según el enunciado. Escribiendo la fórmula de dichas distancias entre cada pareja de los puntos anteriores, y elevando al cuadrado, queda:

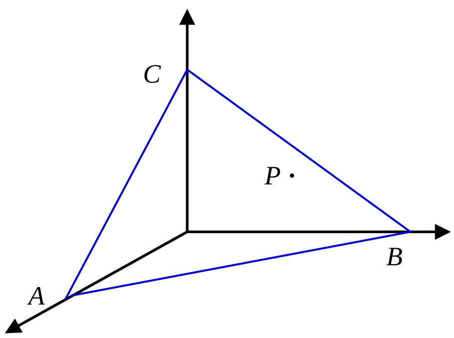
$$a^2 + c^2 = a^2 + b^2 = b^2 + c^2$$

De donde se deduce (despejando en cada una de las tres igualdades: primer miembro igual al segundo, primero igual al tercero, y segundo igual al tercero) que:

$$a^2 = b^2 = c^2$$

Como a, b y c son positivos, porque el enunciado dice que A, B y C se encuentran en el lado positivo de los ejes de coordenadas, concluimos que:

$$a = b = c.$$



Luego sabemos que π contiene a los puntos $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)$ y $P(1,2,1)$.
Vamos a calcular un vector normal al plano. Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ están contenidos en el plano. Por tanto, su producto vectorial, que es perpendicular a ambos, es normal al plano:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [(0, a, 0) - (a, 0, 0)] \times [(0, 0, a) - (a, 0, 0)] = (-a, a, 0) \times (-a, 0, a) =$$
$$= \left(\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -a & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} \right) = (a^2, a^2, a^2)$$

Que es paralelo a (1, 1, 1). Luego será éste el que tomemos como vector normal a π. Conocido dicho vector normal y el punto $P(1, 2, 1)$ del plano, éste será:

$$\pi \equiv 1\cdot(x-1) + 1\cdot(y-2) + 1\cdot(z-1) = 0 \iff \boxed{x + y + z - 4 = 0}$$

De otra forma (más larga). Una vez que hemos averiguado la forma de las coordenadas de los vértices del triángulo equilátero A, B y C, sabemos que los puntos $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)$ y $P(1,2,1)$ están en el plano π. Es decir, que esos 4 puntos son coplanarios, por lo que los vectores que une P con cada uno de los otros 3 puntos son linealmente dependientes, lo que implica que el determinante formado por sus respectivas coordenadas es igual a 0:

$$\begin{vmatrix} 1-a & 2 & 1 \\ 1 & 2-a & 1 \\ 1 & 2 & 1-a \end{vmatrix} = 0 \iff (C_1 - C_3): \begin{vmatrix} -a & 2 & 1 \\ 0 & 2-a & 1 \\ a & 2 & 1-a \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (F_1 + F_3): \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2-a \\ 0 & 2-a & 1 \\ a & 2 & 1-a \end{vmatrix} = a\,[4 - (2-a)^2] = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} a = 0, \\ 4 - (2-a)^2 = 0 \iff (2-a)^2 = 4 \iff 4 + a^2 - 4a = 4 \iff a(a-4) = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ a - 4 = 0 \iff a = 4 \end{cases} \end{cases}$$

Pero $a = 0$ hay que descartarlo, porque no se formaría triángulo. Por ello, $a = 4$.

Por tanto, el plano pasa por (4, 0, 0), (0, 4, 0) y (0, 0, 4), por lo que 2 vectores de dirección son (restando sus coordenadas): (4, –4, 0) y (4, 0, –4), o, también, multiplicándolos por ¼: (1, –1, 0) y (1, 0, –1). Luego el plano es:

$$\begin{vmatrix} x-4 & 1 & 1 \\ y & -1 & 0 \\ z & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{x + y + z - 4 = 0}$$

21) Encontrar los puntos A y B de la recta

$$r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{1}$$

que distan 3 del punto $P(1, 3, 2)$ y calcular el área del triángulo que tiene por vértices los puntos A, B y P.

Un punto genérico de r es $C(3 - t, 1 + 4t, 3 + t)$ (basta escribirla en paramétricas). Pues bien, hallemos t para que la distancia de ese punto a P sea de 3 unidades:

$$d(C, P) = 3 \Rightarrow \sqrt{(3-t-1)^2 + (1+4t-3)^2 + (3+t-2)^2} = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (3 - t - 1)^2 + (1 + 4t - 3)^2 + (3 + t - 2)^2 = 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2 - t)^2 + (4t - 2)^2 + (1 + t)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + t^2 - 4t + 16t^2 + 4 - 16t + 1 + t^2 + 2t = 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 18t^2 - 18t = 0 \Rightarrow t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ó } t = 1.$$

Sustituyendo en C se tiene:

$$\text{Si } t = 0 \Rightarrow A(3, 1, 3).$$
$$\text{Si } t = 1 \Rightarrow B(2, 5, 4).$$

El área del triángulo será:

$$S = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB} \right| = \frac{1}{2} \left| (2, -2, 1) \times (1, 2, 2) \right| = \frac{1}{2} \left| \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \right| =$$
$$= \frac{1}{2} \left| (-6, -3, 6) \right| = \boxed{\frac{9}{2} u^2}$$

22) Hallar el ángulo que forma la recta $r \equiv x = y = z$ con la recta

$$s \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

La primera recta está en forma continua:

$$r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \vec{d} = (1, 1, 1)$$

El vector de dirección de la segunda recta es el producto vectorial de los vectores normales a los planos (ver problema 2)):

$$\vec{d}\,' = (1, 0, 1) \times (0, 1, 0) = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, 0, 1)$$

Por tanto, el coseno del ángulo α que forman será:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{d} \cdot \vec{d}\,'}{\left|\vec{d}\right| \left|\vec{d}\,'\right|} = \frac{-1+1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = 0$$

por lo que <u>las rectas llevan direcciones perpendiculares</u>, es decir, sus vectores de dirección respectivos forman un ángulo de 90º (también forman un ángulo de 270º, pero, por definición, se toma el menor de los dos posibles resultados entre 0º y 360º).

23) Estudiar la posición relativa de los planos

$$\begin{cases} x + (1+p)y + z = 0 \\ (2+p)x - y - 2z = 0 \\ 3x - z = p \end{cases}$$

según los valores de p. Hallar la intersección de los tres planos para el valor de p con el cuál dicha intersección contiene más de un punto.

Estudiamos el rango de las matrices de los coeficientes A y ampliada A'. Esta última es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1+p & 1 & 0 \\ 2+p & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & p \end{pmatrix}$$

A coincide con A' salvo que carece de la última columna de ésta.

Como $|A| = 1 - 6 - 6p + 3 + 2 + 2p + p + p^2 = p^2 - 3p$, se tiene que $\det(A) = 0 \Leftrightarrow p = 0$ ó $p = 3$. Por tanto:

- <u>Si *p≠0 y p ≠3*</u> el sistema es compatible determinado (si rango(A) = 3, también lo es el de A', que no puede ser mayor porque sólo tiene 3 filas) ⇒ tiene solución única ⇒ <u>*la intersección de los tres planos es un único punto*</u>.
- <u>Si $p = 0$</u>:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Que verifica que $r(A) = r(A') = 2$, puesto que la tercera fila es la suma de las dos primeras, que son, a su vez, linealmente independientes porque el menor formado por la intersección de ellas con las dos primeras columnas es distinto de cero.

Por tanto, estamos ante un sistema compatible indeterminado, cuyas soluciones serán valores (x, y, z) dependientes de un parámetro (para resolverlo habría que pasar la incógnita z, que no pertenece al menor principal, al segundo miembro, y darle valores arbitrarios). Es decir, sus soluciones serán las ecuaciones paramétricas de una recta. Como los tres planos son distintos (tomándolos dos a dos, se encuentra siempre un menor no nulo de orden 2), se concluye que <u>*los tres planos se cortan según una recta*</u>, *siendo planos del mismo haz de base dicha recta*:

Como nos piden en el enunciado la ecuación de dicha recta, eliminando la tercera ecuación, que no forma parte del menor principal, el sistema queda como:

$$\boxed{\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}}$$

que es la ecuación de la recta en forma de intersección de dos planos; y esta es la recta pedida.

Aunque no es en absoluto necesario, como repaso vamos a poner esta recta en paramétricas. Pasando z al segundo miembro (no forma parte del menor no nulo) y sumando las ecuaciones, resulta:

$$3x = z \quad \Rightarrow \quad x = z/3$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$y = -z - z/3 = -4z/3.$$

Llamando $z = 3t$, las ecuaciones paramétricas de dicha recta son:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -4t \\ z = 3t \end{cases}$$

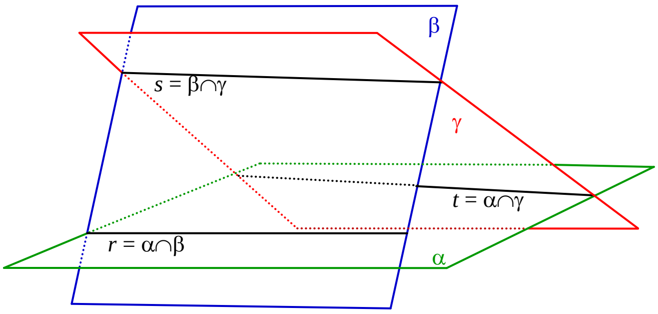
- <u>Si *p = 3*</u> entonces:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Y como $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, $|A| = 0$ ($p = 3$ era uno de los valores que anulaban $|A|$) y

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2 \text{ y } r(A') = 3$$

por lo que el sistema es incompatible, lo que significa que *los tres planos no tienen intersección en común*. Sin embargo, considerándolos 2 a 2, se comprueba que, en las respectivas matrices de coeficientes, siempre se encuentra un menor de orden 2 no nulo, lo que significan que *2 a 2 se cortan según rectas* (que no tienen por qué ser paralelas; de hecho, no lo son en este caso).



24) Sea π_1 el plano perpendicular al vector (2, 3, –1) que pasa por el origen, π_2 el plano que contiene a las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \qquad r_2 \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

y π_3 el plano $x + ay - 2z = -1$. ¿Existe algún valor de a para el cual los tres planos se cortan en una recta?

Por ser (2, 3, –1) perpendicular a π_1, su ecuación es $2x + 3y - z + d = 0$. Como pasa por $(0, 0, 0) \Rightarrow d = 0$. Luego:

$$\pi_1 \equiv 2x + 3y - z = 0$$

Como π_2 contiene a r_1 y a r_2, contendrá a sus respectivos vectores de dirección (–1, 2, –1) y (–2, 3, –1) y a cualquier punto de cualquiera de ellas, por ejemplo a $(1, 1, -1) \in r_1$. Su ecuación, entonces, es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -2 \\ y-1 & 2 & 3 \\ z+1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff (x-1)(-2+3) - (y-1)(1-2) + (z+1)(-3+4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \pi_2 \equiv x + y + z - 1 = 0$$

Observar que π_1 y π_2 se cortan según una recta, puesto que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Estudiemos la posición relativa de los 3 planos. La matriz ampliada del sistema formado por sus ecuaciones respectivas es:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 - a + 1 - 2a + 6 = -3a + 6$

Este determinante se anula si, y sólo si $a = 2$. Luego $r(A) = 2 \Leftrightarrow a = 2$.

Para este valor de a, orlando el menor anterior de orden 2 no nulo, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, con la 4ª columna de A' y su 3ª fila se tiene:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 + 4 - 3 = 0$$

Por lo que $r(A') = 2$.
Así que si $\boxed{a = 2}$, $r(A) = r(A') = 2 \Rightarrow$ los tres planos se cortan según una recta, tratándose, además, de tres planos distintos (si alguno de los menores 2 x 4 de A' tuviese rango 1, los dos planos correspondientes coincidirían).

25) Discutir la posición relativa de los planos siguientes según los valores del parámetro a:
$\pi_1 \equiv ax + y - z = 1$ $\quad \pi_2 \equiv x + (a+2)y + z = 1$ $\quad \pi_3 \equiv (2a-1)x + y + (a-2)z = a$

La matriz ampliada del sistema que forman sus tres ecuaciones es:

$$A' = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 & 1 \\ 2a-1 & 1 & a-2 & a \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes es:

$$|A| = \det\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a+2 & 1 \\ 2a-1 & 1 & a-2 \end{pmatrix} = a(a^2-4) + 2a - 1 - 1 + (a+2)(2a-1) - a - a + 2 =$$
$$= a^3 - 4a + 2a - 2 + 2a^2 + 4a - a - 2 - 2a + 2 = a^3 + 2a^2 - a - 2 = (a-1)(a+1)(a+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 1, \quad a = -1 \quad \text{ó} \quad a = -2$$

donde la descomposición factorial se ha efectuado por Ruffini:

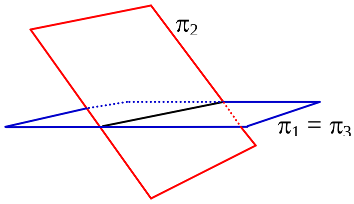
	1	2	–1	–2
1		1	3	2
	1	3	2	0
–1		–1	–2	
	1	2	0	
–2		–2		
	1	0		

Por tanto,
si $a \neq 1$ y $a \neq -1$ y $a \neq -2 \Rightarrow r(A) = r(A') = 3 \Rightarrow$
se cortan en un único punto.

Caso $a = 1$: Sabemos que es uno de los tres casos en que $r(A) < 3$. Se tiene que:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $F_1 = F_3 \Rightarrow r(A') < 3$. Como además $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, tenemos que $r(A) = r(A') = 2$. Así, las dos primeras filas corresponden a planos que se cortan según una recta. Y son las soluciones del sistema, puesto que podemos eliminar la tercera fila, al no formar parte del menor. Luego <u>los tres planos se cortan según una recta, coincidiendo, además, el primer plano y el tercero</u> ($F_1 = F_3$).

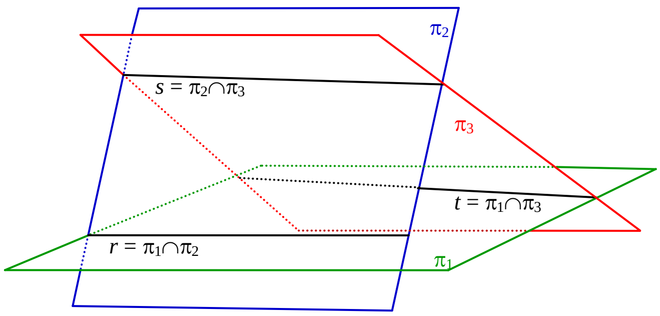


<u>Caso $a = -1$</u>: Sigue siendo $r(A) < 3$. Tenemos que:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Con: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$,

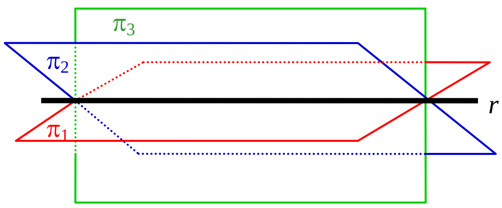
por lo que $r(A) = 2$ y $r(A') = 3 \Rightarrow$ El sistema es incompatible; es decir, no hay intersección común a los tres planos. Considerando los planos dos a dos, los rangos de las respectivas matrices de coeficientes valen 2 en los tres casos $\Rightarrow$ <u>Los tres planos se cortan 2 a 2 según rectas distintas</u>.



<u>Caso $a = -2$</u>: Sigue siendo $r(A) < 3$. Tenemos que:

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ y $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) = r(A') = 2$. El sistema es compatible determinado. Como los Como los rangos de las matrices de los coeficientes de los tres sistemas que pueden formarse tomando los planos 2 a 2 valen 2 en los tres casos $\Rightarrow$ <u>los tres planos son distintos y se cortan en una misma recta</u> (son 3 planos del haz de planos de base dicha recta).



POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS

Consideremos tres planos α, β y γ dados por sus ecuaciones generales:

$$\alpha \equiv ax + by + cz + d = 0$$
$$\beta \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0$$
$$\gamma \equiv a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

Estudiar las *posiciones relativas* de estos tres planos equivale a discutir el sistema formado por sus ecuaciones, para ver los puntos que satisfacen dos o más de sus ecuaciones. La *matriz de los coeficientes*, *M*, y la *ampliada*, *N*, son:

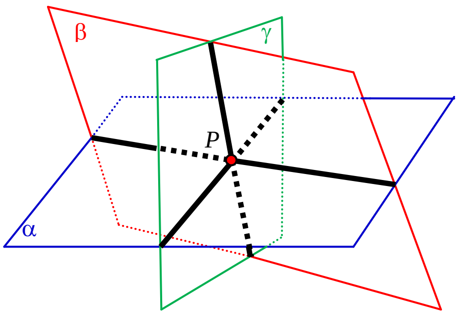
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

Según los rangos de *M* y *N*, se presentan los siguientes casos:

Caso 1. rango(M) = rango(N) = 3

El sistema es *compatible determinado*. Existe un único punto común a los tres planos, que se obtiene resolviendo el sistema.

$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = P$$



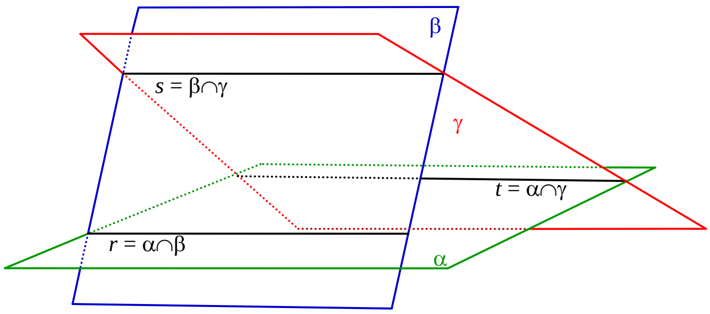
Caso 2. rango(M) = 2 y rango(N)=3

El sistema es *incompatible*. No existe ningún punto común a los tres planos. Pueden presentarse los subcasos siguientes:

2a) Las matrices de orden 2x3 que pueden formarse con las filas de M, tienen rango 2**; entonces los planos se cortan dos a dos según tres rectas que no tienen por qué ser paralelas (El sistema formado por dos cualesquiera de los planos es compatible indeterminado: dos ecuaciones con tres incógnitas con rango de la matriz de los coeficientes 2. Al ser de tres incógnitas, una de ellas pasaría al segundo miembro, quedando las infinitas soluciones en función de un solo parámetro: dicha incógnita. Es decir, tendríamos las ecuaciones paramétricas de una recta, puesto que se obtienen dando valores a un parámetro).**

$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \varnothing$$

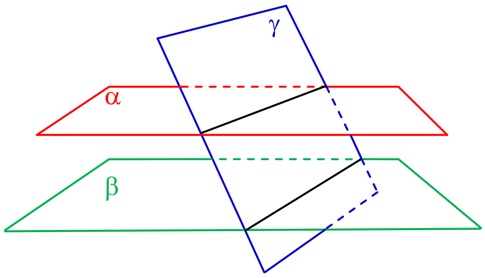
$$\alpha \cap \beta = r$$
$$\alpha \cap \gamma = t$$
$$\beta \cap \gamma = s$$



2b) Una de las matrices de orden 2x3 citadas tiene rango 1 y las otras rango 2**. En ese caso dos planos son paralelos y el tercero los corta según dos rectas paralelas. (El sistema formado por las ecuaciones con rango de la matriz de los coeficientes 1 y ampliada 2 es incompatible, por lo que no tiene solución, lo que significa que los planos correspondientes son paralelos, al no tener puntos en común. Los otros dos sistemas se cortan en sendas rectas, pues la situación es la misma que en el caso 2a).**

$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \varnothing$$

$$\beta \neq \gamma$$



<u>Caso 3</u>. rango(M) = rango(N) = 2

El sistema es *compatible indeterminado*. Existen, por tanto, dos ecuaciones independientes, y la otra es combinación lineal de ellas. Los tres planos se cortan en una recta. Pueden presentarse los subcasos siguientes:

3a) Las tres matrices de orden 2x4 que pueden formarse con las filas de N tienen rango 2**. Los tres planos son distintos y se cortan en una recta.**

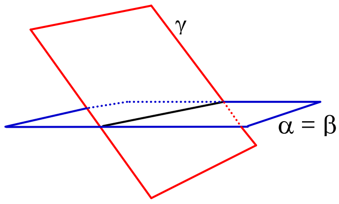
$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = r$$

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$$

3b) Una de esas matrices tiene rango 1**. Entonces, dos planos coinciden y el tercero los corta según una recta.**

$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = r$$

$$\alpha = \beta$$

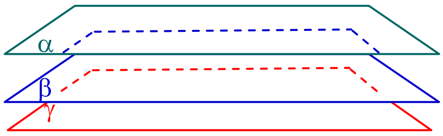


<u>Caso 4</u>. rango(M) = 1 y rango(N) = 2

El sistema es *incompatible* y no existe ningún punto común a los tres planos. Por ser rango(M)=1, los tres planos son paralelos, pero no coincidentes ya que rango(N)=2. Veamos los subcasos posibles:

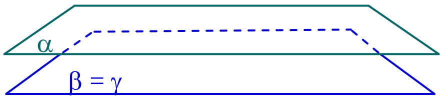
4a) Que las tres matrices de orden 2x4 que pueden formarse con las filas de N sean de rango 2**. Entonces los tres planos son paralelos y distintos dos a dos.**

$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \varnothing$$
$$\alpha \neq \beta$$
$$\alpha \neq \gamma$$
$$\beta \neq \gamma$$



4b) Que una de esa matrices tenga rango 1**, entonces dos de los planos son coincidentes y el otro paralelo a ellos y distinto.**

$$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \varnothing$$
$$\alpha \neq \beta$$
$$\beta = \gamma$$



<u>Caso 5</u>. rango(M) = rango(N) = 1

El sistema es *compatible indeterminado*. En este caso el sistema se reduce a una sola ecuación y los planos son coincidentes.

$$\alpha = \beta = \gamma$$