**PROBLEMAS CLASIFICADOS DE ESPACIOS VECTORIALES, AFIN Y EUCLIDEO PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**

# 1. VECTORES.

## COMBINACIONES LINEALES. DEPENDENCIA LINEAL. ORTOGONALIDAD.

1) *(2014-UA3 Opc. A)* Considera los vectores $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ y $\vec{w} = (\lambda, 1, 0)$.

a) **[0'75 puntos]** Calcula los valores de $\lambda$ que hacen que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean ortogonales.

Dos vectores son ortogonales (perpendiculares) si, y sólo si su producto escalar vale 0. Así:

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = (1, -1, 3)\cdot(\lambda, 1, 0) = 1\cdot\lambda - 1\cdot 1 + 3\cdot 0 = \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1}.$$

b) **[0'75 puntos]** Calcula los valores de $\lambda$ que hacen que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

Los vectores serán linealmente independientes si, y sólo si el rango de la matriz formada por ellos, distribuidos en tres filas, tiene rango 3:

$$r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda + 3 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda \neq -4}.$$

c) **[1 punto]** Para $\lambda = 1$ escribe el vector $\vec{r} = (3, 0, 2)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Según el cálculo anterior, los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes. Tres vectores l.i. en el espacio, cuya dimensión es 3, forman una base. De modo que todo vector del espacio es c.l. de ellos, y esta c.l. es única (serían las coordenadas respecto de la base). Averiguémosla. Si $x, y, z$ son los coeficientes de la c.l. buscada, se tendrá:

$$(3, 0, 2) = x(1, -1, 3) + y(1, 0, -1) + z(1, 1, 0) = (x + y + z, -x + z, 3x - y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x \quad + z = 0 \\ 3x - y \quad = 2 \end{cases}$$

porque dos vectores coinciden si, y sólo si, sus coordenadas (respecto a una base) son únicas. Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>3ª ec</u>: $5z = 5 \Rightarrow z = 1$

<u>2ª ec</u>: $-x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

<u>1ª ec</u>: $1 + y + 1 = 3 \Rightarrow y = 1$

De modo que la c.l. es: $\boxed{\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}}$.

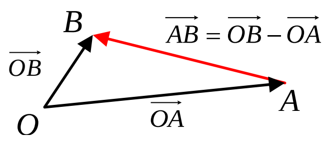
**VECTOR QUE UNE DOS PUNTOS. VECTOR DE POSICIÓN. MÓDULO DE UN VECTOR. PUNTOS COPLANARIOS. RECTÁNGULO. ÁREA DE UN RECTÁNGULO.**

2) *(Junio 2013 reserva B, Opc. B)* Considera los puntos $A(0, 5, 3)$, $B(-1, 4, 3)$, $C(1, 2, 1)$ y $D(2, 3, 1)$.

a) **[1'75 puntos]** Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que $ABCD$ es un rectángulo.

Hemos de empezar diciendo que, fijado un *sistema de referencia*, esto es, un punto fijo O y una base (ortonormal o canónica), cada punto del plano determina un único vector, y cada vector, un único punto. Identificamos, así, el punto con dicho vector, al que llamamos *vector de posición* del punto, y las coordenadas de uno y otro coinciden.

Los puntos son coplanarios si, y sólo si, están contenidos en un mismo plano. Y ello será así cuando, y sólo cuando, formando tres vectores que vayan de un punto a otro resultan ser linealmente dependientes, en cuyo caso, el tercer vector será combinación lineal de los otros dos, con lo que, forzosamente, tendrán que estar dentro de un mismo plano.




Para hallar el vector que une dos puntos, por ejemplo $A$ y $B$, restamos sus respectivos vectores de posición (ver gráfico): el que apunta al extremo menos el que lo hace al origen. *No se puede realizar ninguna operación con coordenadas de puntos*: las sumas, restas, productos externos, etc. son, exclusivamente, para sus respectivos *vectores de posición*.

Calculamos, por ejemplo, los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1, 4, 3) - (0, 5, 3) = (-1, -1, 0)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (1, 2, 1) - (0, 5, 3) = (1, -3, -2)$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (2, 3, 1) - (0, 5, 3) = (2, -2, -2)$$

Para ver si son coplanarios, formamos un determinante cuyas filas sean sus coordenadas:

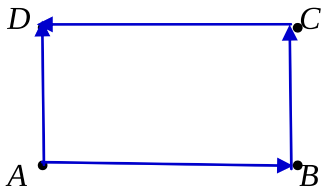
$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 2 - 4 + 6 = 0$$

lo que significa que alguna fila es combinación lineal de las otras $\Rightarrow$ los tres vectores están en un mismo plano. Es decir, los cuatro puntos son coplanarios.

El rectángulo es $ABCD$, recorridos en ese orden (nos lo dicen en el enunciado).

Buscamos los lados del rectángulo. Ya calculamos, antes, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (1, 2, 1) - (-1, 4, 3) = (2, -2, -2)$. Pues bien:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = (2, 3, 1) - (1, 2, 1) = (1, 1, 0) = -\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (2, 3, 1) - (0, 5, 3) = (2, -2, -2) = \overrightarrow{BC}$$




Como los vectores son iguales dos a dos, los lados miden lo mismo y son paralelos. Pero eso no basta para asegurar que se trata de un rectángulo, porque en un paralelogramo sucede igual: además, tiene que haber ángulos rectos. Así $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ deben ser ortogonales (con lo cual, lo serán los demás, al tratarse de vectores idénticos). Comprobémoslo: su producto escalar debe valer 0:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = (-1, -1, 0)\cdot(2, -2, -2) = -2 + 2 + 0 = 0$$

$\boxed{\text{Es un rectángulo}}$.

b) **[0'75 puntos]** Calcula el área de dicho rectángulo.

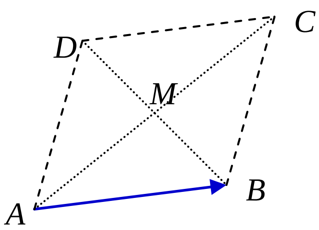
$$S = bh = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1^2+1^2+0^2}\,\sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{2}\sqrt{12} = \sqrt{24} = \boxed{2\sqrt{6}\ u^2}$$

siendo $u$ la unidad de longitud que trabajemos (lo que miden los vectores unitarios de la base).

## SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A OTRO. PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO. ÁREA DE UN PARALELOGRAMO. PRODUCTO VECTORIAL.

3) *(2012-1 Opc. A)* El punto $M(1, -1, 0)$ es el centro de un paralelogramo y $A(2, 1, -1)$ y $B(0, -2, 3)$ dos vértices consecutivos del mismo.

a) **[1'5 puntos]** Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.




Llamemos $C(x, y, z)$. Este punto es el simétrico de $A$ respecto de $M$. Como $M(1, -1, 0)$ es el punto medio entre $A(2, 1, -1)$ y $C$, se tendrá:

$$\begin{cases} \dfrac{2+x}{2} = 1 \Rightarrow x = 0 \\ \dfrac{1+y}{2} = -1 \Rightarrow y = -3 \\ \dfrac{-1+z}{2} = 0 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

Luego $\boxed{C(0, -3, 1)}$.

Por tanto:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0, -2, 3) - (2, 1, -1) = (-2, -3, 4)$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (0, -3, 1) - (0, -2, 3) = (0, -1, -2) = \overrightarrow{AD}$, siendo $D$ el cuarto punto del paralelogramo.

El área del paralelogramo será, entonces:

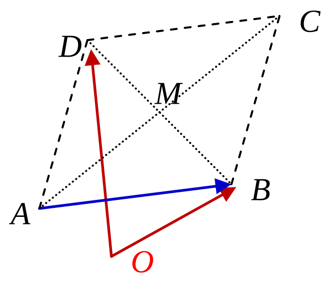
$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| = \left|\left(\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -1 & -2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}\right)\right| = |(10, -4, 2)| =$$

$$= \sqrt{10^2+4^2+2^2} = \sqrt{120} = \boxed{2\sqrt{30}\ u^2}$$

**RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO DETERMINADO POR TRES PUNTOS. PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO. PRODUCTO VECTORIAL. ÁREA DE UN PARALELOGRAMO.**

4) *(2012-4 Opc. A)* De un paralelogramo *ABCD* conocemos tres vértices consecutivos: $A(2, -1, 0)$, $B(-2, 1, 0)$ y $C(0, 1, 2)$.

a) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.




Aún no hemos empezado a ver rectas, pero haremos el problema, que tiene bastante materia de operaciones con vectores.

Una recta queda determinada conociendo un punto y un vector de dirección de la misma. El punto que necesitamos es el centro del paralelogramo, y el vector de dirección, un vector *normal* (perpendicular) al plano que contiene al paralelogramo, esto es, a los puntos $A$, $B$ y $C$ (tres puntos no alineados determinan un plano).

Comenzamos calculando el punto medio del paralelogramo $M(x, y, z)$. Será el punto medio del segmento *AB*. Por tanto:

$$x=\frac{2+0}{2}=1;\quad y=\frac{-1+1}{2}=0;\quad z=\frac{0+2}{2}=1 \Rightarrow \boxed{M(1, 0, 1)}.$$

Podemos conseguir el vector perpendicular al plano buscando uno perpendicular a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Dicho vector será el *producto vectorial* de ambos. De este modo:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} = (-2, 1, 0) - (2, -1, 0) = (-4, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA} = (0, 1, 2) - (2, -1, 0) = (-2, 2, 2).$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (-4, 2, 0) \times (-2, 2, 2) = \left(\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & -4\\ 2 & -2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-4 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix}\right) = (4, 8, -4)$$

Podemos tomar como vector de dirección éste u otro proporcional al mismo, porque tendrá la misma dirección. Así que optamos por multiplicarlo por ¼:

$$\boxed{\vec{d} = (1, 2, -1)}$$

La ecuación *continua* de la recta solicitada será:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-1}{-1} \Leftrightarrow \boxed{x-1=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}}$$

b) **[0’75 puntos]** Halla el área de dicho paralelogramo.

El área del paralelogramo será $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$. Y como $\overrightarrow{AB} = (-4, 2, 0)$ y (ver dibujo anterior):

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB} = (0, 1, 2) - (-2, 1, 0) = (2, 0, 2).$$

Se tiene:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \left(\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & -4\\ 2 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-4 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\right) = (4, 8, -4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = |(4, 8, -4)| = \sqrt{16+64+16} = \sqrt{96} = \boxed{4\sqrt{6}\ u^2}$$

c) **[0’75 puntos]** Calcula el vértice *D*.

Podemos proceder como se hizo en un problema anterior, considerando que *M* es el punto medio del segmento *BD*, es decir, hallando el simétrico de *B* respecto de *M*. Pero vamos a utilizar otro procedimiento, vectorial. Si observamos el gráfico, en el que se ha señalado el punto *O* origen del *sistema de referencia*, de donde parten todos los *vectores de posición*, las coordenadas de *D* son las de su vector de posición $\overrightarrow{OD}$, que puede obtenerse:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = (2, –1, 0) + (2, 0, 2) = (4, –1, 2).$$

Luego $\boxed{D(4, –1, 2)}$.

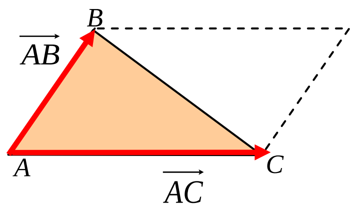
## ÁREA DE UN TRIÁNGULO. VOLUMEN DE UN TETRAEDRO. PRODUCTO VECTORIAL. PRODUCTO MIXTO.

5) *(2014-UA5 Opc. A, apart. c)* **[0’5 puntos]** Sean *A*(–3, 4, 0), *B*(3, 6, 3) y *C*(–1, 2, 1) los vértices de un triángulo. Calcula el área del triángulo *ABC*.

El área de un triángulo *ABC* es la mitad del área del paralelogramo que se forma con el simétrico de *A* respecto del segmento que une *B* con *C*:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3, 6, 3) – (–3, 4, 0) = (6, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (–1, 2, 1) – (–3, 4, 0) = (2, –2, 1).$$




$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6, 2, 3) \times (2, –2, 1) =$$

$$\left( \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right) = (8, 0, –16)$$

$$S = \frac{1}{2} \, |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \, |(8, 0, –16)| = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 0^2 + 16^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{320} = \boxed{4\sqrt{5} \; u^2}$$

6) *(Junio 2010 reserva A Opc. A)* Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $6x + 3y + 2z = 6$ con los ejes de coordenadas.

La ecuación *implícita* de un plano es de la forma $ax + by + cz + d = 0$. La ecuación *implícita* de una recta viene dada como la intersección de dos planos, escritos éstos, también, en su forma *implícita*.

- Eje *OX*: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Intersección con $6x + 3y + 2z = 6$: $6x + 0 + 0 = 6 \Rightarrow x = 1$ $\Rightarrow \boxed{A(1, 0, 0)}$.
- Eje *OY*: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Intersección: $0 + 3y + 0 = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \boxed{B(0, 2, 0)}$.
- Eje *OZ*: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Intersección: $0 + 0 + 2z = 6 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow \boxed{C(0, 0, 3)}$.

El área del triángulo que forman es la mitad del área del paralelogramo:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0, 2, 0) – (1, 0, 0) = (–1, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (0, 0, 3) – (1, 0, 0) = (–1, 0, 3).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (–1, 2, 0) \times (–1, 0, 3) = \left( \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (6, 3, 2)$$

$$S = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\,|(6,3,2)| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2+3^2+2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{49} = \boxed{\frac{7}{2}u^2}$$

7) *(Sept 2013 Opc. A)* Considera el plano $\pi$ de ecuación $2x + y + 3z - 6 = 0$.

a) **[1'5 puntos]** Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano $\pi$ con los ejes coordenados.

- Eje $OX$: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Intersección con $2x + y + 3z - 6 = 0$: $2x + 0 + 0 = 6 \Rightarrow$ $x = 3 \Rightarrow \boxed{A(3, 0, 0)}$.
- Eje $OY$: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Intersección: $0 + y + 0 = 6 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow \boxed{B(0, 6, 0)}$.
- Eje $OZ$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Intersección: $0 + 0 + 3z = 6 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow \boxed{C(0, 0, 2)}$.

El área del triángulo que forman es la mitad del área del paralelogramo:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0, 6, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 6, 0)$

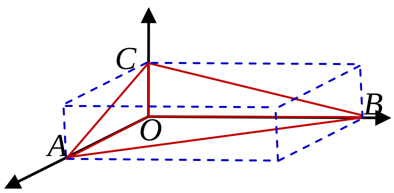
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (0, 0, 2) - (3, 0, 0) = (-3, 0, 2)$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (-3, 6, 0)\times(-3, 0, 2) = \left(\begin{vmatrix}6 & 0\\0 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & -3\\2 & -3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-3 & 6\\-3 & 0\end{vmatrix}\right) = (12, 6, 18)$$

$$S = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\,|(12, 6, 18)| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2+6^2+18^2} = \frac{1}{2}\sqrt{504} = \boxed{3\sqrt{14}\,u^2}$$

b) **[1 punto]** Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano $\pi$ y los planos coordenados.

El volumen de un tetraedro es 1/6 del volumen del paralelepípedo que se forma partiendo de sus 4 vértices. Y éste, a su vez, se calcula mediante el producto mixto de los vectores que parten de uno de los vértices hasta otros tres adyacentes (valor absoluto).




En este caso, esos tres vectores son los de posición de los puntos $A$, $B$ y $C$:

$\overrightarrow{OA} = (3, 0, 0)$ $\overrightarrow{OB} = (0, 6, 0)$ $\overrightarrow{OC} = (0, 0, 2)$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 2\end{vmatrix} = \boxed{6\,u^3}$$

- **Ver problema 36)b).**

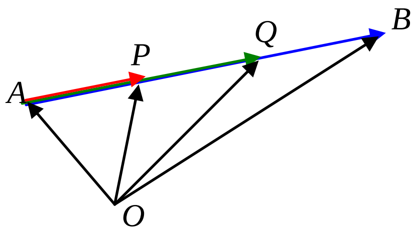
## DIVIDIR UN SEGMENTO EN VARIAS PARTES IGUALES

8) *(Septiembre 2013 reserva B, Opc. B)* Considera los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(-1, 0, 4)$.

a) **[1'25 puntos]** Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento $AB$ en tres partes iguales.

Para hallar $P$ y $Q$ tenemos en cuenta que (ver gráfico):

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) =$$




$$= (1, 2, 3) + \frac{1}{3}[(-1, 0, 4) - (1, 2, 3)] =$$

$$= (1, 2, 3) + \frac{1}{3}(-2, -2, 1) = \left(1-\frac{2}{3}, 2-\frac{2}{3}, 3+\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right) \Rightarrow \boxed{P\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) =$$

$$= (1, 2, 3) + \frac{2}{3}[(-1, 0, 4) - (1, 2, 3)] = (1, 2, 3) + \frac{2}{3}(-2, -2, 1) =$$

$$= \left(1-\frac{4}{3}, 2-\frac{4}{3}, 3+\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right) \Rightarrow \boxed{Q\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)}$$

9) *(Septiembre 2010 reserva A, Opc. A)* Considera los puntos $A(1, 2, 1)$ y $B(-1, 0, 3)$.

a) **[1'25 puntos]** Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento $AB$ en tres partes iguales.

Para hallar $P$ y $Q$ tenemos en cuenta que (ver gráfico en problema 8):

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) =$$

$$= (1, 2, 1) + \frac{1}{3}[(-1, 0, 3) - (1, 2, 1)] =$$

$$= (1, 2, 1) + \frac{1}{3}(-2, -2, 2) = \left(1-\frac{2}{3}, 2-\frac{2}{3}, 1+\frac{2}{3}\right) = = \boxed{\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) =$$

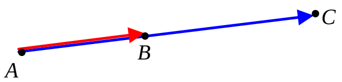
$$= (1, 2, 1) + \frac{2}{3}[(-1, 0, 3) - (1, 2, 1)] = (1, 2, 1) + \frac{2}{3}(-2, -2, 2) =$$

$$= \left(1-\frac{4}{3}, 2-\frac{4}{3}, 1+\frac{4}{3}\right) = \boxed{\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)}$$

## COMPROBAR QUE TRES PUNTOS ESTÁN ALINEADOS

10) *(Septiembre 2012 reserva B, Opc. B)* Sean los puntos $A(2, \lambda, \lambda)$, $B(-\lambda, 2, 0)$ y $C(0, \lambda, \lambda - 1)$.

a) **[1 punto]** ¿Existe algún valor de $\lambda \in R$ para el que los puntos $A$, $B$ y $C$ estén alineados? Justifica la respuesta.




Los puntos estarán alineados si, y sólo si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son múltiplos el uno del otro.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-\lambda, 2, 0) - (2, \lambda, \lambda) = (-\lambda-2, 2 - \lambda, -\lambda)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (0, \lambda, \lambda - 1) - (2, \lambda, \lambda) = (-2, 0, -1)$

El cociente de las coordenadas proporcionaría, de coincidir, el factor de multiplicidad:

$$\frac{-2}{-\lambda-2}=\frac{0}{2-\lambda}=\frac{-1}{-\lambda} \Leftrightarrow \frac{2}{\lambda+2}=0=\frac{1}{\lambda}$$

El 0 complica la resolución de este sistema. Optamos por otro método: Buscar directamente el factor de multiplicidad:

$$\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (-\lambda-2,\ 2-\lambda,\ -\lambda)=t(-2,\ 0,\ -1) \Leftrightarrow \begin{cases}-2t=-\lambda-2\\ 0=2-\lambda\\ -t=-\lambda\end{cases}$$

De la segunda ecuación obtenemos $\lambda = 2$. La tercera nos diría que $t = 2$. Y con esos dos valores, la primera es cierta.

Por tanto, $\boxed{\text{si } \lambda = 2 \text{ los puntos están alineados}}$.

## 2. RECTAS

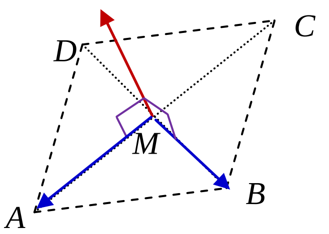
### ECUACIÓN DE UNA RECTA. PASO ENTRE IMPLÍCITAS Y PARAMÉTRICAS. PUNTO GENÉRICO DE UNA RECTA.

11) El punto $M(1, -1, 0)$ es el centro de un paralelogramo y $A(2, 1, -1)$ y $B(0, -2, 3)$ dos vértices consecutivos del mismo.

a) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

(Ver gráfico) Dos *vectores de dirección* del plano son los vectores $\overrightarrow{MA}$ y $\overrightarrow{MB}$. Su producto vectorial proporciona un vector ortogonal al mismo y, por tanto, de dirección de la recta pedida, ya que ésta es perpendicular al plano:

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=(2, 1, -1)-(1, -1, 0)=(1, 2, -1)$$




$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}=(0, -2, 3)-(1, -1, 0)=(-1, -1, 3)$$

$$\vec{d}=\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}=(1, 2, -1)\times(-1, -1, 3)=$$

$$\left(\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}\right)=$$

$$=(5, -2, 1)$$

Con un punto y un vector de dirección, podemos escribir la ecuación de la recta en *vectorial*, *implícitas* o *continua*. Optamos por esta última:

$$\boxed{\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{-2}=z}$$

12) *(Junio 2010, Opc.B)* Los puntos $P(2, 0, 0)$ y $Q(-1, 12, 4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice $S$ pertenece a la recta de ecuación

$$\begin{cases}4x+3z=33\\ y=0\end{cases}$$

a) **[1'5 puntos]** Calcula las coordenadas del punto $S$ sabiendo que $r$ es perpendicular a la recta que pasa por $P$ y $S$.

Vamos a considerar un punto *genérico* de $r$ (es decir, un punto cualquiera, al que no le exigimos ninguna condición). Para ello, pasamos la ecuación de $r$, que nos viene en *implícitas* a *paramétricas*. Llamamos $z = t$ y, despejando en la primera ecuación:

$$4x = 33 - 3t \Rightarrow x = \frac{33-3t}{4}$$

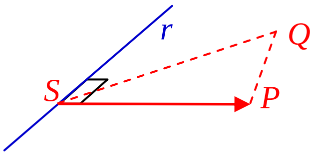
Por tanto, las ecuaciones paramétricas son ($y = 0$, según la segunda ecuación):

$$\begin{cases} x = \dfrac{33}{4} - \dfrac{3}{4}t \\ y = 0 \\ z = \qquad t \end{cases}$$

Podemos cambiar el punto por otro más cómodo: Para $t = 3$, se obtiene (6, 0, 3).

Y sustituir el *vector de dirección* $\left(-\frac{3}{4}, 0, 1\right)$ por otro más cómodo (un múltiplo suyo, multiplicándolo por 4: (–3, 0 ,4). Las ecuaciones de $r$ serán, entonces:

$$\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = 0 \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$




Entonces, como $S \in r$, tendrá la forma $(6 - 3t, 0, 3 + 4t)$, para cierto $t$. Obligamos a que $r$ sea perpendicular al vector $\overrightarrow{SP}$. Para ello, basta con que lo sea su *vector de dirección*: (–3, 0 ,4). Y la condición de *perpendicularidad entre vectores* es que su producto escalar valga 0. De este modo:

$$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OS} = (2, 0, 0) - (6 - 3t, 0, 3 + 4t) = (-4 + 3t, 0, -3 - 4t) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{SP} \cdot \vec{d} = (-4 + 3t, 0, -3 - 4t)\cdot(-3, 0, 4) = -3(-4 + 3t) + 0 + 4(-3 - 4t) =$$

$$= 12 - 9t - 12 - 16t = -25t = 0 \Rightarrow t = 0$$

Por lo que $\boxed{S(6, 0, 3)}$

b) **[1 punto]** Comprueba si el triángulo es rectángulo.

Una forma de comprobarlo es ver si tiene un ángulo recto. Esto es, si dos de los vectores que unen dos vértices son perpendiculares entre sí. Como ya tenemos:

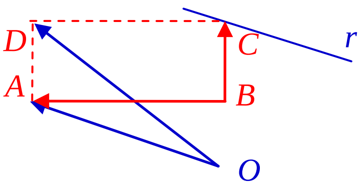
$$\overrightarrow{SP} = (-4, 0, -3)$$

probamos con $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-1, 12, 4) - (2, 0, 0) = (-3, 12, 4)$.

$\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{PQ} = (-4, 0, -3)\cdot(-3, 12, 4) = 12 + 0 - 12 = 0$

En efecto, $\boxed{\text{hay un ángulo recto en el vértice } P\text{, luego el triángulo es rectángulo}}$.

13) *(2012-2 Opc.B)* Los puntos $A(1, 1, 5)$ y $B(1, 1, 2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo *ABCD*. El vértice $C$, consecutivo a $B$, está en la recta $x = \dfrac{y-6}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$. Determina los vértices $C$ y $D$.




Pasamos $r$ a *paramétricas*, que es inmediato, pues conocemos un punto (restando en los numeradores), que es (0, 6, –1), y un vector de dirección (en los denominadores, cuál es (1, –2, 2):

$$\begin{cases} x = t \\ y = 6 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Así, $C$ se obtendrá para algún valor de $t$ que hemos de hallar: $C(t, 6–2t, –1+2t)$.

Para que haya un ángulo recto en $B$, los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ deben ser ortogonales, o que equivale a que su producto escalar valga 0. Por tanto:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (1, 1, 5) – (1, 1, 2) = (0, 0, 3)$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (t, 6 – 2t, –1 + 2t) – (1, 1, 2) = (t – 1, 5 – 2t, –3 + 2t)$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (0, 0, 3)\ (t – 1, 5 – 2t, –3 + 2t) = 0 + 0 –9 + 6t = 0 \iff t = 3/2.$$

Por ello, $\boxed{C\left(\frac{3}{2}, 3, 2\right)}$.

Las coordenadas del punto $D$, que son las de su vector de posición $\overrightarrow{OD}$, podemos obtenerlas así (ver gráfico anterior):

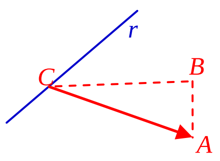
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} =$$

$$= (1, 1, 5) + \left(\frac{3}{2}, 3, 2\right) – (1, 1, 2) = \left(\frac{3}{2}, 3, 5\right)$$

De donde $D\boxed{\left(\frac{3}{2}, 3, 5\right)}$.

14) *(2011-5 Opc. A)* Considera los puntos $A(1, 0, 2)$ y $B(1, 2, –1)$.

a) **[1’25 puntos]** Halla un punto $C$ de la recta de ecuación $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z$ que verifica que el triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$ tiene un ángulo recto en $B$.




Debe ser $\overrightarrow{BA}$ ortogonal a $\overrightarrow{BC}$. O sea, su producto escalar será 0. Obtenemos la forma general de un punto de $r$ pasando su ecuación a paramétricas, lo que es fácil, porque en forma continua tenemos, directamente, un punto y el vector de dirección:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

Es decir, que la forma es: $C(1+3t, 2t, t)$. Con lo que:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (1+3t, 2t, t) – (1, 2, –1) = (3t, 2t–2, t+1)$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (1, 0, 2) – (1, 2, –1) = (0, –2, 3)$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (0, –2, 3) \cdot (3t, 2t–2, t+1) = 0 – 4t + 4 + 3t + 3 = 7 – t = 0 \iff t = 7$$

En consecuencia, $\boxed{C(22, 14, 7)}$.

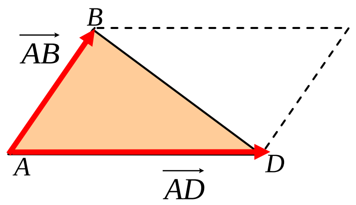
b) **[1’25 puntos]** Calcula el área del triángulo de vértices $A$, $B$ y $D$, donde $D$ es el punto de corte del plano de ecuación $2x – y + 3z = 6$ con el eje $OX$.

En realidad, la forma implícita de la ecuación de una recta en el espacio es la intersección de dos planos. La ecuación implícita de un plano es una ecuación lineal en las tres coordenadas $(x, y, z)$.

El eje $OX$ es la intersección de los planos $y = 0$ con $z = 0$. Así, todo punto de dicho eje tiene la forma $(x, 0, 0)$.
La intersección del plano dado con dicho eje será, pues, la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ \quad y = 0 \\ \quad z = 0 \end{cases}$$

que es: $2x – 0 + 0 = 6 \Rightarrow x = 3$: $\boxed{D(3, 0, 0)}$.




El área de un triángulo $ABD$ es la mitad del área del paralelogramo que se forma con el simétrico de $A$ respecto del segmento que une $B$ con $D$:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} = (0, 2, -3), \text{ calculado antes.}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (3, 0, 0) - (1, 0, 2) = (2, 0, -2)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (0, 2, -3) \times (2, 0, -2) = \left( \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-4, -6, -4)$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2} |(-4, -6, -4)| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 6^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{68} = \boxed{\sqrt{17}\ u^2}$$

15) Pasar a paramétricas la recta: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ Volver a pasar la recta obtenida a implícitas. Con las ecuaciones de las rectas inicial y final en implícitas, comprobar que son la misma recta.

Pasemos la <u>recta de implícitas a paramétricas</u>. El menor formado por las columnas de los coeficientes de $x$ y de $z$ es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2 \neq 0$$

Llamamos $y = t$ (no está en el menor) y la pasamos al segundo miembro:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3z = 1 - 2t \\ x - z = -2t \end{cases}$$

Por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-2t & -3 \\ -2t & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-1 + 2t - 6t}{2} = -\frac{1}{2} - 2t$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-2t \\ 1 & -2t \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2t - 1 + 2t}{2} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas serán:

$$\boxed{\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - 2t \\ y = \quad t \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}}$$

Para <u>poner en implícitas esta recta en paramétricas</u>, la escribimos en forma continua (conocemos un punto y un vector de dirección):

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+\frac{1}{2}}{0}$$

El denominador 0 no es posible. Rigurosamente, esta ecuación no puede escribirse: el tercer miembro de la igualdad se respeta como $z = -1/2$, por lo que debería haberse puesto de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dfrac{x+\frac{1}{2}}{-2}=\dfrac{y}{1} \\ z=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Simplificando la primera ecuación, queda:

$$x+\frac{1}{2}=-2y \;\Rightarrow\; 2x+1=-4y \;\Rightarrow\; 2x+4y+1=0$$

Por tanto, la ecuación en implícitas es:

$$\boxed{\begin{cases} 2x+4y+1=0 \\ z=-\dfrac{1}{2} \end{cases}}$$

Nos piden comprobar la posición relativa de la recta del enunciado con respecto a esta última, y que lo hagamos en implícitas. Estudiamos la solución del sistema formado por los cuatro planos que definen las dos rectas:

$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x+2y-z=0 \\ 2x+4y=-1 \\ 2z=-1 \end{cases}$$

Clasificamos el sistema por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-F_2]{F_3-3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eliminando las dos últimas filas, queda un sistema compatible indeterminado con matrices de coeficientes y ampliada de rango 2 $\Rightarrow$ Se cortan en una recta. Si las dos rectas tienen, como intersección, una única recta, es que $\boxed{\text{las dos rectas son la misma}}$.

## POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS: INTERSECCIONES Y ÁNGULOS ENTRE RECTAS

16) *(2014-UA3 Opc. B)* Sea $r$ la recta dada por $\dfrac{x+2}{2}=y+1=\dfrac{z-1}{-3}$ y sea $s$ la recta dada por $\begin{cases} x-y-3=0 \\ 3y-z+6=0 \end{cases}$

a) **[1 punto]** Estudia la posición relativa de $r$ y $s$.

Ponemos las dos rectas en *implícitas*. Con $r$ lo podemos hacer directamente, pues conocemos un punto y un vector de dirección:

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = \phantom{-}1 - 3t \end{cases}$$

Para $s$ como $y$ se repite en las dos ecuaciones, y en cada una de ellas aparece sólo con otra variable, llamamos $y = u$ y despejamos en cada plano (si no fuese así, hubiésemos resuelto el sistema, por Gauss o por Rouché-Fröbenius):

$$s \equiv \begin{cases} x = 3 + u \\ y = \phantom{3+{}} u \\ z = 6 + 3u \end{cases}$$

Hemos llamado, a propósito, de forma distinta al parámetro que, tomando valores, proporciona los puntos de $s$. Porque, para encontrar la posición relativa, buscamos puntos comunes a ambas. Y lo haremos igualando entre sí las ecuaciones, coordenada a coordenada, buscando los valores de los parámetros que, en cada recta, proporciona dichos puntos comunes:

$$\begin{cases} -2 + 2t = 3 + u \\ -1 + t = u \\ \phantom{-}1 - 3t = 6 + 3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - u = 5 \\ t - u = 1 \\ 3t + 3u = -5 \end{cases}$$

Estudiamos el sistema por Rouché-Fröbenius.

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$ (rango de la matriz de los coeficientes)

Y siendo $|A'| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 10 - 3 + 15 + 15 - 5 - 6 = -4 \neq 0 \Rightarrow r(A') = 3$ (rango de la matriz ampliada).

Por tanto, el sistema es *incompatible* y no tiene solución. Es decir, las rectas no tienen puntos en común, por lo que, al no ser sus respectivos vectores de dirección múltiplos el uno del otro (en cuyo caso serían paralelas), $\boxed{\text{se cruzan}}$.

17) *(Junio 2010 Opc. A)* Considera las rectas $r$ y $s$ de ecuaciones:

$$x - 1 = y = 1 - z \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x - 2y \phantom{{}+z} = -1 \\ \phantom{x-2}y + z = 1 \end{cases}$$

a) **[0'75 puntos]** Determina su punto de corte.

<u>Primera forma (en implícitas)</u>

Vamos a <u>pasar *r* de continua a implícitas</u> y trabajaremos así. La ecuación continua son tres igualdades. Basta tomar dos cualesquiera de ellas y tenemos la recta en implícitas:

$$\begin{cases} x - 1 = y \\ y = 1 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Ahora, consideraremos el sistema formado por las ecuaciones de los cuatro planos que definen las dos rectas:

$$\begin{cases} x-2y \quad =-1 \\ \quad y+z=1 \\ x-y \quad =1 \\ \quad y+z=1 \end{cases}$$

Vamos a clasificar el sistema. Como las ecuaciones 2ª y 4ª son coincidentes, eliminamos una de ellas (la 4ª). Triangularizamos el sistema resultante:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es un sistema compatible determinado, por lo que, al tener solución única, las rectas, en efecto, se cortan en un único punto, que pasamos a calcular:

<u>3ª ec</u>: $z=-1$

<u>2ª ec</u>: $y-1=1 \Rightarrow y=2$

<u>1ª ec</u>: $x-4=-1 \Rightarrow x=3$

$\boxed{\text{Se cortan en } (3, 2, -1)}$.

<u>Segunda forma (en paramétricas)</u>

Cuando se estudian las posiciones relativas de dos rectas en implícitas, como hemos hecho aquí y en el problema 15), si el resultado fuese un sistema incompatible es porque las rectas son paralelas o se cruzan. Habría que investigar, en ese caso, los vectores de dirección respectivos (que se obtienen multiplicando vectorialmente los vectores cuyas componentes son los coeficientes de $x, y, z$ en cada uno de los dos planos que definen cada recta), para ver si son paralelos (las rectas lo son), o no (se cruzan).

En paramétricas, como se ha hecho en el problema 16), no existe tal problema. Veamos este problema de esta manera y calculemos el punto de corte.

<u>Pasamos $r \equiv x-1 = y = 1-z$ a paramétricas</u>. Como equivale a:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-1}{-1}$$

las implícitas son:

$$r \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y= \quad t \\ z=1-t \end{cases}$$

Para $s$ como $y$ aparece en las dos ecuaciones acompañada, en cada una de ellas, sólo por la otra variable, llamamos $y=v$ (para distinguirlo del parámetro $t$ de las ecuaciones de $r$) y despejamos:

$$\begin{cases} x-2y \quad =-1 \\ \quad y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} x=-1+2v \\ y= \quad v \\ z= \quad 1-v \end{cases}$$

Igualamos $x, y, z$ para ver qué tienen en común ambas rectas:

$$\begin{cases} 1+t=-1+2v \\ t=v \\ 1-t=1-v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-2v=-2 \\ t-v=0 \\ t-v=0 \end{cases}$$

Podemos eliminar la ecuación tercera, al ser idéntica a la segunda. Además al ser la segunda $t = v$, sustituyendo en la primera tenemos ya solución:

$$-t = -2 \Rightarrow t = v = 2.$$

Hemos atajado: hay solución única (sistema compatible determinado en $t$ y en $v$). Las dos rectas se cortan, pues, en un punto. Dicho punto lo obtenemos llevando el valor obtenido de $t$ a la ecuación de $r$, o el de $v$ a la de $s$:

$$r \equiv \begin{cases} x=1+2=3 \\ y=\quad 2 \\ z=1-2=-1 \end{cases} \quad \text{ó} \quad s \equiv \begin{cases} x=-1+2\cdot 2=3 \\ y=\quad 2 \\ z=\quad 1-2=-1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Se cortan en } (3, 2, -1)}$.

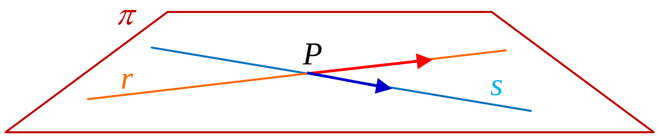
b) **[1 punto]** Halla el ángulo que forman $r$ y $s$.

Sabemos que se cortan. El ángulo que forman es el menor de los dos posibles, y lo calcularemos a través de sus respectivos vectores de dirección, que los tenemos en las paramétricas: (1, 1, –1) y (2, 1, –1). Si llamamos $\alpha$ a dicho ángulo, lo haremos despejando en la fórmula del producto escalar, pero :

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{d}\cdot\vec{d'}|}{|\vec{d}|\,|\vec{d'}|} = \frac{|(1,1,-1)(2,1,-1)|}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{4+1+1}} = \frac{|2+1+1|}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 19{,}47^{\circ} = 19^{\circ}28'16{,}39''}$$

c) **[0,75 puntos]** Determina la ecuación del plano que contiene a $r$ y $s$.




Las ecuaciones implícitas del plano vienen dadas por un punto de éste y dos vectores de dirección (deben ser linealmente independientes y estar dentro del plano). Como punto, podemos usar el de intersección: (3, 2, –1) y los vectores de dirección serán los de las rectas, pues éstas están en el plano y se cortan en un punto: (1, 1, –1) y (2, 1, –1):

$$\boxed{\pi \equiv \begin{cases} x=3+t+2s \\ y=2+t+s \\ z=-1-t-s \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} t+2s=x-3 \\ t+s=y-2 \\ -t-s=z+1 \end{cases}$$

Si queremos pasar el plano a forma implícita, lo que no es necesario, porque no se pide, usamos que las ecuaciones anteriores, consideradas como un sistema en $t$ y en $s$, debe ser compatible. Por ello, el rango debe ser 2 (el de la matriz de los coeficientes lo es, pues sus dos columnas son los dos vectores de dirección, que son linealmente independientes). Por ello, del determinante de la matriz ampliada (es cuadrada de orden 3) debe valer 0 (lo desarrollamos por adjuntos de la $C_3$):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-3 \\ 1 & 1 & y-2 \\ -1 & -1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0\cdot(x-3)-1(y-2)-1(z+1)=0 \Leftrightarrow \boxed{-y-z+1=0}$$

18) Hallar las posiciones relativas de las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} \qquad s \equiv \begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x-y-z=-4 \end{cases}$$

Pasamos $s$ a implícitas:

$$\begin{cases} x-y=2-t \\ 3x-y=-4+t \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \begin{cases} x-y=2-t \\ -3x+y=4-t \end{cases} \\ \hline -2x \quad =6-2t \end{array} \Rightarrow x=-3+t$$

Y también: $$\begin{array}{r} \begin{cases} -3x+3y=-6+3t \\ 3x-y=-4+t \end{cases} \\ \hline 2y=-10+4t \end{array} \Rightarrow y=-5+2t$$

De donde:

$$s \equiv \begin{cases} x=-3+t \\ y=-5+2t \\ z=t \end{cases}$$

Por tanto, ambas rectas tienen la misma dirección, pues (1, 2, 1) es vector de dirección de ambas. Como el punto (1, 0, 2) de $r$ no verifica la ecuación del primero de los planos de $s$, no tienen puntos en común. Luego $\boxed{\text{las dos rectas son paralelas}}$.

19) *(2008-6 Opc.A)* Se considera la recta $r$ definida por $mx = y = z + 2$, $(m \neq 0)$, y la recta $s$ definida por $\frac{x-4}{4} = y-1 = \frac{z}{2}$

a) **[1'5 puntos]** Halla el valor de $m$ para el que $r$ y $s$ son perpendiculares.

Si sus respectivos vectores de dirección son ortogonales, las rectas serán perpendiculares. Y ello ocurrirá si, y sólo si su producto escalar es nulo.

La ecuación de $r$ en forma continua es: $\frac{x-0}{1/m} = \frac{y-0}{1} = \frac{z+2}{1}$, de donde deducimos que su vector de dirección es $(1/m, 1, 1)$. El de $s$ es (4, 1, 2). Así:

$$(1/m, 1, 1)\cdot(4, 1, 2) = \frac{4}{m}+1+2 = \frac{4+3m}{m} = 0 \Leftrightarrow 4+3m=0 \text{ y } m \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m = -\frac{4}{3}}$$

b) **[1 punto]** Deduce razonadamente si existe algún valor de $m$ para el que $r$ y $s$ son paralelas.

Para que sean paralelas, exigimos que sus vectores de dirección respectivos sean proporcionales (uno múltiplo del otro):

$$\frac{4}{1/m} = \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$$

La última igualdad: 1 = 2 no es cierta para ningún valor de $m$. Por tanto, $\boxed{\text{las rectas no pueden ser paralelas}}$.

- **Ver problema 46)a)**

# 3. PLANOS

## ECUACIÓN DE UN PLANO

20) *(2012-4 Opc. B)* Sean $r$ y $s$ las rectas dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=6 \\ x \quad +z=3 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{6}=\frac{z}{2}$$

a) **[1'25 puntos]** Determina el punto de intersección de ambas rectas.

Este ejercicio es similar al 17). Lo calcularemos con ambas en paramétricas. Como el sistema que define a $r$ ya está triangularizado, llamamos $z = t$ y lo pasamos al segundo miembro:

<u>2ª ec</u>: $x = 3 - t$

<u>1ª ec</u>: $3 - t + y = 6 + t \Rightarrow y = 3 + 2t$

$$r \equiv \begin{cases} x=3-t \\ y=3+2t \\ z= \quad t \end{cases}$$

La otra, la tenemos directamente: $s \equiv \begin{cases} x=1-v \\ y=-1+6v \\ z= \quad 2v \end{cases}$

Igualamos:

$$\begin{cases} 3-t=1-v \\ 3+2t=-1+6v \\ t=2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-v=2 \\ 2t-6v=-4 \\ t-2v=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Compatible determinado. Eliminando la segunda, queda:

<u>3ª ec</u>: $v = 2$

<u>1ª ec</u>: $t - 2 = 2 \Rightarrow t = 4$

El punto lo obtenemos con $v = 2$ en $s$ o con $t = 4$ en $r$: $\boxed{(-1, 11, 4)}$

b) **[1'25 puntos]** Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

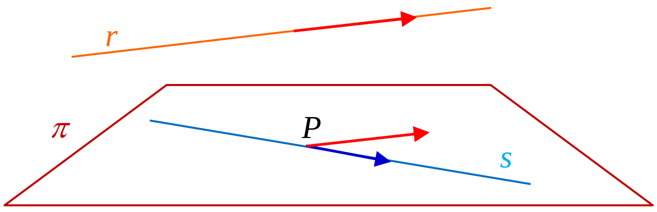
Tomamos el punto de corte y los respectivos vectores de dirección:

$$\boxed{\pi \equiv \begin{cases} x=-1-t-s \\ y=11+2t+6s \\ z=4+t+2s \end{cases}} \text{ ó } \begin{vmatrix} -1 & -1 & x+1 \\ 2 & 6 & y-11 \\ 1 & 2 & z-4 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2(x+1) + 1(y-11) - 4(z-4) = 0 \Leftrightarrow \boxed{-2x + y - 4z + 3 = 0}$$

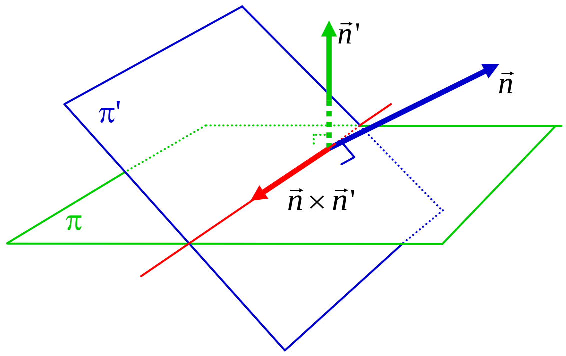
21) *(Septiembre 2010, Opc. A)* Halla la ecuación del plano que es paralelo a la recta $r$ de ecuaciones $\begin{cases} x-2y+11=0 \\ 2y+z-19=0 \end{cases}$ y contiene a la recta $s$ definida por $\begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}$

Un punto $P$ del plano es cualquier punto de $s$. Por ejemplo $P(1, –2, 2)$.




Tanto el vector de dirección de $r$ como el de $s$: (–5, 3, 2) están contenidos en el plano, es decir, son vectores de dirección del mismo. No tenemos vector de dirección de $r$ pero podemos obtenerlo multiplicando vectorialmente los respectivos vectores normales de los planos que la definen.

$$\vec{n}\times\vec{n}\,' = (1, -2, 0)\times(0, 2, 1) =$$
$$= \left( \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) =$$
$$= (-2, -1, 2)$$




Así, el plano es (en implícita):

$$\begin{vmatrix} -2 & -5 & x-1 \\ -1 & 3 & y+2 \\ 2 & 2 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \iff -8(x-1)$$
$$-6(y+2) - 11(z-2) = 0 \iff$$
$$\iff \boxed{8x + 6y + 11z - 18 = 0}$$

- Ver también el problema 6).

22) *(2012-5, Opc. A)* Sean los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, –1)$, $C(0, 1, –2)$ y $D(1, 2, 0)$.

a) **[1 punto]** Halla la ecuación del plano $\pi$ determinado por los puntos $A$, $B$ y $C$.

Siempre y cuando los tres puntos no estén alineados, si $X(x, y, z)$ es un punto general del plano, los vectores:

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = (x, y, z) - (0, 0, 1) = (x, y, z-1)$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1, 0, -1) - (0, 0, 1) = (1, 0, -2)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (0, 1, -2) - (0, 0, 1) = (0, 1, -3)$$

(los dos últimos son vectores de dirección del plano, pues están contenidos en él y no son múltiplos el uno del otro), son linealmente dependientes (necesariamente, uno es combinación lineal de los otros dos). Luego el determinante formado por sus tres columnas (o filas) debe valer 0, al ser una columna (fila) combinación lineal de las otras dos:

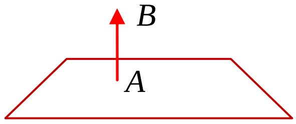
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -2 & -3 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \iff 2x + 3y + 1(z-1) = 0 \iff \pi \equiv \boxed{2x + 3y + z - 1 = 0}$$

b) **[0'5 puntos]** Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.
Este ejercicio es similar al 2)a). Pero como ahora tenemos el plano formado por los tres primeros, sólo hay que comprobar que el cuarto punto $D$ no está en el plano, o sea, no verifica su ecuación. Y, en efecto:

$$2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 0 - 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{D \text{ no está en } \pi}.$$

## ECUACIÓN DE UN PLANO CONOCIDOS UN PUNTO Y UN VECTOR NORMAL

23) *(Septiembre 2013 reserva B, Opc. B)* Considera los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(-1, 0, 4)$.
**[1'25 puntos]** Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A$ y es perpendicular al segmento $AB$.




El segmento $\overrightarrow{AB}$ es normal al plano:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1, 0, 4) - (1, 2, 3) = (-2, -2, 1)$$

Conocidos un punto $A(1, 2, 3)$ y un vector normal $\vec{n}$, la ecuación del plano es:

$$-2(x-1) - 2(y-2) + 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow \boxed{-2x - 2y + z + 3 = 0}$$

24) *(Septiembre 2010 reserva A, Opc. A)* Considera los puntos $A(1, 2, 1)$ y $B(-1, 0, 3)$.
**[1'25puntos]** Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento $AB$ y que pasa por $A$.

El segmento $\overrightarrow{AB}$ es normal al plano:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1, 0, 3) - (1, 2, 1) = (-2, -2, 2)$$

Conocidos un punto $A(1, 2, 3)$ y un vector normal $\vec{n}$, la ecuación del plano es:

$$-2(x-1) - 2(y-2) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow -2x - 2y + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x + y - z - 2 = 0}$$

## POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Sólo caben tres posibilidades: se cortan en una recta, son paralelos o son coincidentes.

25) Estudiar las posiciones relativas de los dos planos siguientes, en cada caso:

a) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

Como la matriz de los coeficientes del sistema que forman tiene rango 2, ya que:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

el sistema es compatible (tiene solución) indeterminado (infinitas soluciones) dependientes de un solo parámetro (llamaríamos $z = t$, pues $z$ no está en el menor principal, y lo pasaríamos al segundo miembro). Esto es, obtendríamos las ecuaciones paramétricas de una recta $\Rightarrow$ $\boxed{\text{los planos se cortan en una recta}}$.

b) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ 6x + 2y - 4z - 1 = 0 \end{cases}$

Triangularizando por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ello, r($A$) = 1 y $r(A') = 2$ $\Rightarrow$ el sistema es incompatible. No tiene solución, luego $\boxed{\text{los planos son paralelos}}$.

c) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 4x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

La segunda ecuación es el doble de la primera: $\boxed{\text{los dos planos son coincidentes}}$ (son el mismo plano).

## HAZ DE PLANOS DE BASE UNA RECTA

26) *(2011-1 Opc. B)* Dados el punto $P(1, 1, -1)$ y la recta $r$ de ecuaciones $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$

a) **[1 punto]** Halla la ecuación del plano que contiene a $r$ y pasa por $P$.


Todos los planos que contienen a $r$ constituyen el *haz de planos de base r*, y se obtiene de las ecuaciones de los planos que definen a $r$, igualados a 0, sumando uno de ellos más el otro por un parámetro variable $\lambda$. Para diferentes valores del parámetro $\lambda$, se obtienen todos y cada uno de esos planos, menos el que está multiplicado por $\lambda$, con lo que hay que tener cuidado: el *haz de planos* se usa para buscar el plano que contiene a una recta dada (en implícitas) y que verifica otra condición adicional; si no se encuentra dicho plano, puede que sea el que está multiplicado por $\lambda$:

$$x + z - 1 + \lambda(y + z) = 0$$

De ellos, el que pasa por $P(1, 1, -1)$ es:

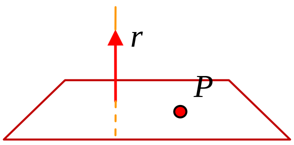
$$1 + 1 - 1 + \lambda(1 - 1) = 0 \iff 1 = 0$$

Es decir, ninguno de ellos. Pero éste es uno caso en el que la solución puede que sea el plano que se ha multiplicado por $\lambda$: $y + z = 0$. Lo comprobamos:

$$1 - 1 = 0$$

En efecto. Así, el plano solicitado es: $\boxed{y + z = 0}$.

b) **[1'5 puntos]** Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $y + z = 0$, que es perpendicular a $r$ y pasa por $P$.




Calculamos el plano que es perpendicular a $r$ y contiene a $P$. Si es perpendicular a $r$, el vector de dirección de $r$ es normal al plano. Y dicho vector se obtiene multiplicando vectorialmente los vectores ortogonales a los planos que definen $r$:

$$\vec{n} \times \vec{n}' = (1, 0, 1) \times (0, 1, 1) = \left( \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 1)$$

Dicho plano es, pues: $-(x - 1) - (y - 1) + (z + 1) = 0 \iff x + y - z - 3 = 0$.

La recta está contenida en este plano, porque es perpendicular a $r$. Como también está contenida en el del enunciado, es la intersección de ambos, es decir:

$$\boxed{\begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}}$$

27) *(2011-4, Opc. A)* Dada la recta $r$ definida por $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=-z+3$ y la recta $s$ definida por $\begin{cases} x=1 \\ 2y-z=-2 \end{cases}$

a) **[1'25 puntos]** Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a $r$.

Como en el problema 26)a), usamos el haz de planos de base $r$. Para ello, tenemos que poner $r$ en implícitas. Y lo hacemos tomando dos cualesquiera de las tres igualdades que definen la ecuación continua de $r$ (1ª = 2ª; 1ª = 3ª; 2ª = 3ª):

$$\frac{x-1}{3}=-z+3 \Rightarrow x+3z-10=0$$

$$\frac{y+1}{2}=-z+3 \Rightarrow y+2z-5=0$$

Luego $r \equiv \begin{cases} x+3z-10=0 \\ y+2z-5=0 \end{cases}$. Por tanto, todos los planos que contienen a $r$, salvo $y + 2z - 5 = 0$, se obtienen para algún valor de $\lambda$ en:

$$x+3z-10+\lambda(y+2z-5)=0$$

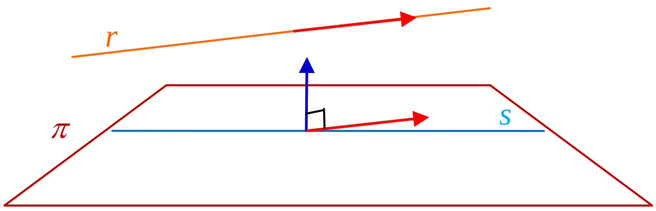
Exigimos que pase por el origen (0, 0, 0):

$$-10-5\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-2$$

Por lo que el plano pedido es:

$$x+3z-10-2(y+2z-5)=0 \Leftrightarrow \boxed{x-2y-z=0}$$

b) **[1'25 puntos]** Halla la ecuación del plano que contiene a $s$ y es paralelo a $r$.




Este problema es similar al 21), y sólo tendrá solución si las dos rectas se cruzan. Suponiendo que es así, vamos a hacerlo de otra forma que en aquel problema. Tomaremos el haz de planos de base $s$ y elegiremos aquel en el que su vector normal es ortogonal al vector de dirección de $s$:

$$x-1+\lambda(2y-z+2)=0 \Leftrightarrow x+2\lambda y-\lambda z+2\lambda-1=0 \Rightarrow \vec{n}=(1, 2\lambda, -\lambda)$$

Como la ecuación continua de $r$ es:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=-z+3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-1}$$

su vector de dirección es: $\vec{d}=(3, 2, -1)$.

Para ser ortogonales, su producto escalar debe ser 0:

$$(3, 2, -1)\,(1, 2\lambda, -\lambda) = 3+4\lambda+\lambda = 3+5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda=-3/5$$

Así que el plano es:

$$x-\frac{6}{5}y+\frac{3}{5}z-\frac{6}{5}-1=0 \Leftrightarrow \boxed{5x-6y+3z-11=0}$$

28) *(2011-5 Opc. B)* Considera los planos $\pi_1$, $\pi_3$ y $\pi_3$ dados respectivamente por las ecuaciones:

$$3x - y + z - 4 = 0, \qquad x - 2y + z - 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad x + z - 4 = 0$$

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, 1, -1)$, es paralela al plano $\pi_1$ y corta a la recta intersección de los planos $\pi_2$ y $\pi_3$.

Si la recta buscada, a la que llamaremos $r$, es paralela a $\pi_1$, debe estar contenida en un plano paralelo a él. De todos ellos, como $r$ debe contener a $P$, estará en aquél al que pertenezca $P$. Hallemos dicho plano: el paralelo a $\pi_1$ que contiene a $P$.

Para ser paralelo a $\pi_1$, usamos su mismo vector normal. Luego el plano es:

$$3(x-3) - 1(y-1) + 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow 3x - y + z - 7 = 0 \quad (1)$$

Por otro lado, si $r$ corta a $s$ (la intersección de los otros dos planos), hay un plano que contiene a ambas. De todos los planos que contienen a $s$, dicho plano será el que contenga algún punto de $r$: el $P$. De modo que, del haz de planos de base $s$, elegimos el que pase por $P$:

$$x - 2y + z - 1 + \lambda(x + z - 4) = 0$$

Si exigimos que pase por $P$: $3-2-1-1 + \lambda(3 - 1 - 4) = 0 \Rightarrow -1 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = ½$

Luego el plano es:

$$x - 2y + z - 1 + ½\,(x + z - 4) = 0 \Rightarrow 2x - 4y + 2z - 2 - x - z + 4 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - 4y + z + 2 = 0 \quad (2)$$

Como conocemos dos planos en los que está $r$: (1) y (2), ésta es su intersección:

$$\boxed{\begin{cases} 3x - y + z - 7 = 0 \\ x - 4y + z + 2 = 0 \end{cases}}$$

## POSICIONES RELATIVAS DE RECTA Y PLANO

Las posibilidades son: 1) Se cortan en un punto. 2) La recta está contenida en el plano. 3) La recta es paralela al plano.

29) *(2014-UA1 Opc. B)* Considera el plano $\pi$ de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$, y la recta $r$ de ecuación

$$\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$$

a) **[0'5 puntos]** Determina la posición relativa de $\pi$ y $r$.

Escribimos $r$ en paramétricas para obtener la forma general de un punto de la recta, en función del parámetro $t$. Sustituiremos en la ecuación del plano, para ver qué puntos de la recta están en él.

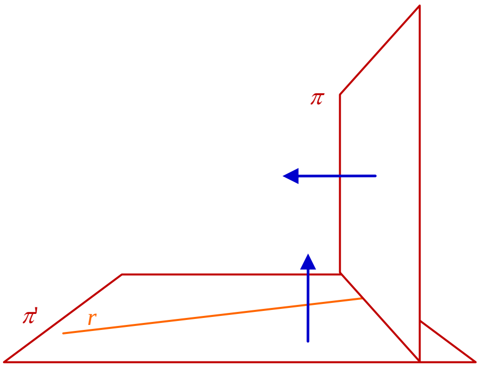
$$r \equiv \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = \phantom{5 - 2}t \\ z = 6 - 3t \end{cases}$$

Sustituimos el punto general de $r$: $(5 - 2t, t, 6 - 3t)$ en la ecuación del plano.

$$2(5 - 2t) + t - (6 - 3t) + 2 = 0 \Rightarrow 10 - 4t + t - 6 + 3t + 2 = 0 \Rightarrow 6 = 0$$

Como ningún valor de $t$ hace cierta la ecuación resultante, ningún punto de la recta (cada valor de $t$ se corresponde con un punto de $r$) verifica la ecuación del plano $\Rightarrow$ $\boxed{\text{la recta y el plano son paralelos}}$.

b) **[1 punto]** Halla la ecuación general del plano que contiene a $r$ y es perpendicular a $\pi$.




Pasamos $r$ a paramétricas. Para ello, tomamos dos cualesquiera de las 3 igualdades que se deducen de la ecuación continua:

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{-2} = y \Rightarrow x+2y-5=0 \\ y = \dfrac{z-6}{-3} \Rightarrow 3y+z-6=0 \end{cases}$$

El haz de planos de base esta recta es, entonces:

$$x + 2y - 5 + \lambda(3y + z - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + (2 + 3\lambda)y + \lambda z - 5 - 6\lambda = 0 \quad (1)$$

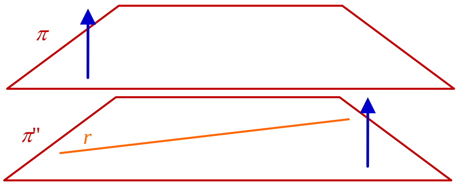
De todos estos planos, que contienen a $r$, escogeremos el que su vector normal es perpendicular al vector normal de $\pi$, con lo que ambos planos serán ortogonales. Y ello ocurre si su producto escalar es nulo:

$$(1, 2 + 3\lambda, \lambda)\cdot(2, 1, -1) = 2 + 2 + 3\lambda - \lambda = 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

Por ello, el plano pedido es, sustituyendo en (1):

$$x + (2 - 6)y - 2z - 5 - 6(-2) = 0 \Rightarrow \boxed{x - 4y - 2z + 7 = 0} \equiv \pi'$$

c) **[1 punto]** Halla las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a $\pi$ que contiene a $r$.




Del haz de planos de base $r$ : (1), escogemos aquel tal que su vector normal sea paralelo al de $\pi$ (los respectivos vectores normales son proporcionales):

$$\frac{1}{2} = \frac{2+3\lambda}{1} = \frac{\lambda}{-1} \quad \text{que se cumple si } \lambda = -\frac{1}{2}$$

Luego, sustituyendo en (1):

$$x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - 5 + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{2x + y - z - 4 = 0} \equiv \pi''$$

De otra forma:

Habrá un plano paralelo a $\pi$ que contenga a $r$, porque ambos son paralelos. Bastará con que el plano contenga a un punto de $r$. El vector normal a $\pi$ sirve como vector normal del nuevo plano $\pi''$:

$$2(x - 5) + 1(y - 0) - 1(z - 6) = 0 \Rightarrow \boxed{2x + y - z - 4 = 0} \equiv \pi''$$

Falta pasar el plano a paramétricas, que se nos pide. Simplemente llamamos $x = \lambda$, $z = \mu$ y despejamos:

$$\boxed{\pi'' \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 - 2\lambda + \mu \\ z = \mu \end{cases}}$$

30) *(2008-1 Opc. B)* Sea la recta $r$ dada por $\begin{cases} 2x + y - mz = 2 \\ x - y - \quad z = -m \end{cases}$ y el plano $\pi$ definido por $x + my - z = 1$.

a) **[1 punto]** ¿Existe algún valor de $m$ para el que $\pi$ y $r$ son paralelos?

Formamos el sistema constituido por los tres planos: los dos que definen $r$ y $\pi$. Lo discutimos en función de $m$:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -m & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -m \\ 1 & m & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -m \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 - m^2 - m + 1 + 2m = -m^2 + m + 2 = 0 \iff$$

$$\iff m^2 - m - 2 = 0 \iff m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} = -1 \\ = 2 \end{matrix} \right.$$

Consideramos los siguientes casos:

- Si <u>$m \neq -1$ y $m \neq 2$</u>: $r(A) = 3 \Rightarrow r(A') = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Solución única $\Rightarrow$ <u>Recta y plano se cortan en un punto</u>.
- Si <u>$m = -1$</u>, el sistema tiene, como matriz ampliada:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

No es necesario estudiar su rango, porque vemos que las dos últimas filas coinciden. Por tanto, se puede eliminar la tercera, y el sistema se reduce a las dos ecuaciones que definen la recta $\Rightarrow$ la intersección de la recta y el plano es la propia recta $\Rightarrow$ <u>la recta está contenida en el plano</u>.

- Si <u>$m = 2$</u>, la matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuya matriz de los coeficientes tiene, como determinante, 0, según vimos antes, y su rango es 2, ya que: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Orlamos este menor con la fila 3 y columna 4:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 4 + 2 - 1 + 8 = 9 \neq 0$$

Por tanto, $r(A) = 2$ y $r(A') = 3 \Rightarrow$ El sistema es incompatible $\Rightarrow$ No tienen intersección $\Rightarrow$ <u>La recta y el plano son paralelos</u>.

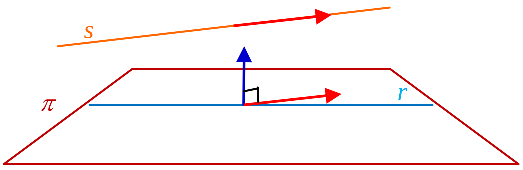
Por tanto, la respuesta a este apartado es: $\boxed{\text{si } m = 2 \text{ recta y plano son paralelos}}$.

b) **[1 punto]** ¿Para qué valor de $m$ está la recta contenida en el plano?
Según lo visto antes, $\boxed{\text{si } m = -1 \text{ la recta está contenida en el plano}}$.

c) **[0'5 puntos]** ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando $m = 0$?
Según el apartado *a)*, $\boxed{\text{la recta y el plano se cortan en un único punto}}$. No nos piden calcularlo y la puntuación que dan por el apartado corrobora que no debemos calcularlo. Con todo, no sería más que resolver el sistema.

31) *(2008-2 Opc. A)* Sea la recta $s$ dada por $\begin{cases} x - z = -1 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$

a) **[1'25 puntos]** Halla la ecuación del plano $\pi_1$ que es paralelo a la recta $s$ y que contiene a la recta $r$, dada por $x - 1 = -y + 2 = z - 3$.

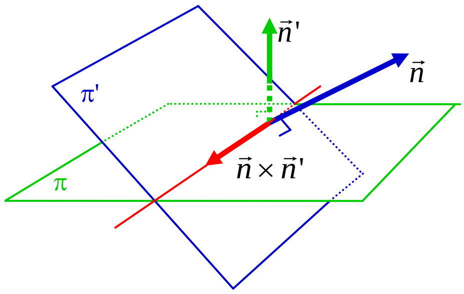



Tomaremos el haz de planos de base $r$. De entre ellos, es decir, de todos los planos que la contienen, escogemos el que su vector normal es ortogonal al de dirección de $s$.

Vector de dirección de $s$:

$$\vec{n} \times \vec{n}' = (1, 0, -1) \times (0, 2, 1) =$$

$$= \left( \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = (2, -1, 2)$$




Haz de planos de base $r$:

$$\begin{cases} x - 1 = -y + 2 \Rightarrow x + y - 3 = 0 \\ x - 1 = z - 3 \Rightarrow x - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y - 3 + \lambda(x - z + 2) = 0 \Rightarrow (1 + \lambda)x + y - \lambda z - 3 + 2\lambda = 0 \quad (1)$$

Exigimos que sean ortogonales:

$$(2, -1, 2)\cdot(1 + \lambda, 1, -\lambda) = 0 \Rightarrow 2 + 2\lambda - 1 - 2\lambda = 0 \Rightarrow 1 = 0$$

No es posible. Probamos con el único plano del haz que contiene a $r$ y que no es de la forma (1): $x - z + 2 = 0$:

$$(2, -1, 2)\cdot(1, 0, -1) = 2 - 2 = 0$$

Así que el plano que buscamos es: $\boxed{x - z + 2 = 0}$.

b) **[1'25 puntos]** Estudia la posición relativa de la recta $s$ y el plano $\pi_2$, de ecuación $x + y = 3$, y deduce la distancia entre ambos.
Ponemos $s$ en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + t \\ y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

Y sustituimos un punto general de $r$ en la ecuación del plano:

$$-1 + t + \frac{3 - t}{2} = 3 \Rightarrow -2 + 2t + 3 - t = 6 \Rightarrow t = 5$$

Por tanto, $\boxed{\text{se cortan en } (4, -1, 5)}$. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{La mínima distancia entre ambos es } 0}$.

32) *(Septiembre 2010, Opc. A)* Considera los planos $\pi_2$, $\pi_2$ y $\pi_3$ dados respectivamente por las ecuaciones

$$x + y = 1, \qquad ay + z = 0 \qquad \text{y} \qquad x + (1 + a)y + az = a + 1$$

a) **[1'5 puntos]** ¿Cuánto ha de valer $a$ para que no tengan ningún punto en común?

Escribimos el sistema formado por los tres planos, y lo clasificamos. Su matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & a & a+1 \end{pmatrix}$$

Como:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix} = a^2 + 1 - (1 + a) = a^2 - a = a(a - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ó } a = 1$$

Por tanto:

- Si $\underline{a \neq 0 \text{ y } a \neq 1}$: El sistema es compatible determinado y <u>los planos se cortarán en un punto</u>.
- Si $\underline{a = 0}$: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $|A| = 0$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ $r(A) = 2$. Como $F_3 = F_1$, se puede eliminar $F_3$, por lo que $r(A') = 2 \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, y <u>los tres planos se cortan en una única recta, que es la formada por los dos primeros planos. El tercer plano es igual al primero</u>.
- Si $\underline{a = 1}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, con $|A| = 0$, como sabemos. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$

  $r(A) = 2$. Orlando este menor con $F_3$ y $C_4$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A') = 3$

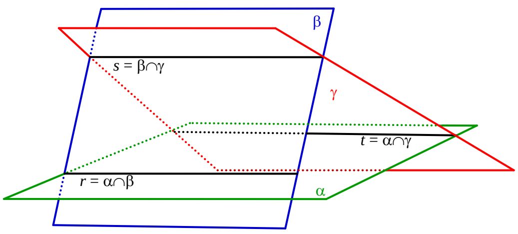
  $\Rightarrow$ El sistema es incompatible $\Rightarrow$ <u>Los planos no se cortan en ningún punto</u>.

Luego la solución es que $\boxed{\text{si } a = 1 \text{ los planos no tienen ningún punto en común}}$.

No se pide más y no se debe contestar más. Como ilustración, vamos a determinar la posición final de los tres planos en el caso $a = 1$. Al comparar los planos dos a dos, forman sistemas con $r(A) = r(A') = 2$, pues:

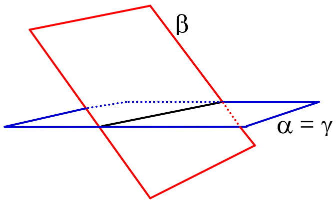
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Así que forman 3 rectas.



b) **[1 punto]** Para $a = 0$, determina la posición relativa de los planos.

Se estudió en el apartado anterior: $\boxed{\text{los tres planos se cortan en una única recta, que es la formada por los dos primeros planos, siendo el tercer plano coincidente con el primero}}$.




## ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

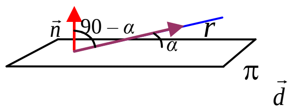
- **Ver problema 17)b).**

## ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO

33) Determinar el ángulo que forman el plano $\pi$ y la recta $r$:

$$\pi \equiv 2x - y + 3z - 1 = 0 \qquad r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{1}$$

$\vec{d} = (2, 2, 1)$; $\vec{n} = (2, -1, 3)$.




$$\operatorname{sen}\alpha = \cos(90-\alpha) = \frac{|\vec{d}\cdot\vec{n}|}{|\vec{d}\,||\,\vec{n}|} = \frac{|4-2+3|}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{4+1+9}} =$$

$$= \frac{5}{3\sqrt{14}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 26{,}45^\circ = 26^\circ\ 27'\ 4{,}32''}$$

## ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

34) Determinar el ángulo que forman los planos $\pi \equiv 3x - z = 1$ con $\pi' \equiv 4x - 2y + z = 0$

$\vec{n} = (3, 0, -1)$ y $\vec{n}\,' = (4, -2, 1)$.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}\,||\,\vec{n}'|} = \frac{|12+0-1|}{\sqrt{9+1}\sqrt{16+4+1}} = \frac{11}{\sqrt{210}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 40{,}61^\circ = 40^\circ\ 37'\ 3{,}12''}$$

## DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

35) *(2012-6, Opc. A)* Determina el punto $P$ de la recta $r \equiv \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto $A(3, 2, 1)$.

Como $r \equiv \begin{cases} x = -3+2t \\ y = -5+3t \\ z = -4+3t \end{cases}$, la forma del punto es: $P(-3 + 2t, -5 + 3t, -4 + 3t)$. Cada valor de $t$ proporciona un punto de $r$. Buscamos $t$ tal que $d(P, A) = d(P, O)$:

$$\sqrt{(-3+2t-3)^2+(-5+3t-2)^2+(-4+3t-1)^2} = \sqrt{(-3+2t-0)^2+(-5+3t-0)^2+(-4+3t-0)^2}$$

lo que equivale a:

$$(2t-6)^2+(3t-7)^2+(3t-5)^2 = (2t-3)^2+(3t-5)^2+(3t-4)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 - 24t + 36 + 9t^2 - 42t + 49 + 9t^2 - 30t + 25 =$$

$$= 4t^2 - 12t + 9 + 9t^2 - 30t + 25 + 9t^2 - 24t + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -96t + 110 = -66t + 50 \Leftrightarrow 60 = 30t \Leftrightarrow t = 2 \text{ (válida)}$$

Deducimos, pues: $\boxed{P(1, 1, 2)}$.

36) *(2011-1, Opc. A)* Dados los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 0, 1)$ y $P(1, –1, 1)$, y la recta $r$ definida por $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

a) **[2 puntos]** Halla los puntos de la recta $r$ cuya distancia al punto $P$ es de 3 unidades.

Pasamos $r$ a paramétricas, lo que es muy simple llamando $y = t$:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = \quad t \\ z = 0 \end{cases}$$

Un punto general de $r$ es $R(2 + t, t, 0)$. Buscamos, entonces $R$ tal que:

$$d(R, P) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(2+t-1)^2 + (t+1)^2 + (0-1)^2} = 3 \Leftrightarrow 2(t + 1)^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(t + 1)^2 = 8 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 4 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow$$

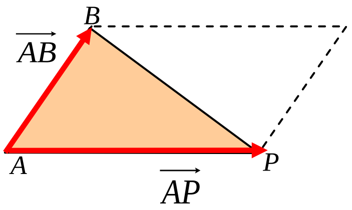
$$\Leftrightarrow t = -3 \text{ ó } t = 1 \text{ (válidas)}$$

Por tanto, hay dos soluciones (sustituyendo cada valor de $t$ en $R$):

$$\boxed{R_1(-1, -3, 0) \text{ y } R_2(3, 1, 0)}$$

b) **[0'5 puntos]** Calcula el área del triángulo $ABP$.

El área de un triángulo $ABP$ es la mitad del área del paralelogramo que se forma con el simétrico de $A$ respecto del segmento que une $B$ con $C$:




$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (1, -1, 1) - (1, 0, 0) = (0, -1, 1).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = (-1, 0, 1) \times (0, -1, 1) =$$

$$\left( \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1, 1, 1)$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}| = \frac{1}{2} |(1, 1, 1)| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} u^2}$$

## DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

37) *(2012-5, Opc. A)* Sean los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, –1)$, $C(0, 1, –2)$ y $D(1, 2, 0)$.

c) **[1 punto]** Calcula la distancia del punto $D$ al plano $\pi$.

En el problema 22)a) se halló la ecuación del plano: $\pi \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0$

$$d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{2} u}$$

38) *(2012-3, Opc. B)* Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{2-y}{2} = z - 3$ cuya distancia al plano $\pi \equiv x - 2y + 2z = 1$ vale cuatro unidades.

Ponemos $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{2-y}{2} = z - 3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$ en paramétricas:

$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \Rightarrow$ la forma general de un punto de $r$ es: $P(1 + 4t, 2 - 2t, 3 + t)$.

Nos piden, entonces:

$$d(P, \pi) = \frac{|1(1+4t) - 2(2-2t) + 2(3+t) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|1 + 4t - 4 + 4t + 6 + 2t - 1|}{\sqrt{9}} =$$

$$= \frac{|10t + 2|}{3} = 4 \Leftrightarrow |10t + 2| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 10t + 2 = 12 \Leftrightarrow 10t = 10 \Leftrightarrow t = 1 \\ \text{ó} \\ 10t + 2 = -12 \Leftrightarrow 10t = -14 \Leftrightarrow t = -\dfrac{7}{5} \end{cases}$$

Así que hay dos puntos solución:

$$P_1(1 + 4, 2 - 2, 3 + 1) = \boxed{(5, 0, 4)} \quad \text{y} \quad P_2\left(1 - \frac{28}{5}, 2 + \frac{14}{5}, 3 - \frac{7}{5}\right) = \boxed{\left(-\frac{23}{5}, \frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right)}$$

39) *(2011-3, Opc. B)* **[2'5 puntos]** Considera los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ dados respectivamente por las ecuaciones

$$(x, y, z) = (-2, 0, 7) + \lambda(1, -2, 0) + \mu(0, 1, -1) \quad \text{y} \quad 2x + y - z + 5 = 0$$

Determina los puntos de la recta $r$ definida por $x = y + 1 = \dfrac{z-1}{-3}$ que equidistan de $\pi_1$ y $\pi_2$.

Como $r \equiv \dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$, la forma general de un punto de $r$ es: $P(t, -1 + t, 1 - 3t)$.

Necesitamos pasar el plano $\pi_1$ a forma implícita:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x+2 \\ -2 & 1 & y \\ 0 & -1 & z-7 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(x+2) + y + z - 7 = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z - 3 = 0 \equiv \pi_1$$

Así:

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \Leftrightarrow \frac{|2t + 1(-1+t) + 1(1-3t) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|2t + 1(-1+t) - 1(1-3t) + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2t - 1 + t + 1 - 3t - 3| = |2t - 1 + t - 1 + 3t + 5| \Leftrightarrow |-3| = |5t + 3| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |5t + 3| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 5t + 3 = 3 \Leftrightarrow t = 0 \\ \text{ó} \\ 5t + 3 = -3 \Leftrightarrow 5t = -6 \Leftrightarrow t = -\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Tenemos dos soluciones:

$$P_1\boxed{(0, -1, 1)} \quad \text{y} \quad P_2\left(-\frac{6}{5}, -1 - \frac{6}{5}, 1 + \frac{18}{5}\right) = \boxed{\left(-\frac{6}{5}, -\frac{11}{5}, \frac{23}{5}\right)}$$

40) *(Septiembre 2012 reserva B, Opc. B)* Sean los puntos $A(2, \lambda, \lambda)$, $B(-\lambda, 2, 0)$ y $C(0, \lambda, \lambda - 1)$.

b) **[1'5 puntos]** Para $\lambda = 1$ halla la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$. Calcula la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

En el problema 10)a) se comprobó que para este valor de $\lambda$ los puntos no están alineados, por lo que determinan un plano. Los puntos son: $A(2, 1, 1)$, $B(-1, 2, 0)$ y $C(0, 1, 0)$. La ecuación del plano que pasa por ellos, es (calculamos dos vectores de dirección del plano y tomamos, como punto, el $C$):

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1, 2, 0) - (2, 1, 1) = (-3, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (0, 1, 0) - (2, 1, 1) = (-2, 0, -1)$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & x \\ 1 & 0 & y-1 \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x - (y-1) + 2z = 0 \Leftrightarrow x + y - 2z - 1 = 0 \equiv \pi$$

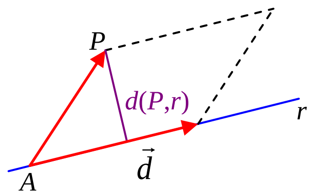
$$\mathrm{d}(O, \pi) = \frac{|0 + 0 - 2\cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ u$$

## DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

41) *(Septiembre 2014, Opc. B)* Sea $r$ la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(2, -1, 3)$.

a) **[1'25 puntos]** Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta $r$.

Para hallar la distancia de un punto a una recta, necesitamos un punto de ésta y un vector de dirección. En nuestro caso, $\vec{d} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, -1, 3) - (1, 0 -1) = (1, -1, 4)$. Siendo $P(0, 0, 0)$ el punto desde el que vamos a medir la distancia a $r$, necesitamos $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (0, 0, 0) - (1, 0 -1) = (-1, 0, 1)$.




Pues bien:

$$d(P, r) = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{base}} = \frac{|\vec{d} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{d}|}$$

$$\vec{d} \times \overrightarrow{AP} = (1, -1, 4) \times (-1, 0, 1) = \left( \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-1, -5, -1)$$

De donde:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{d} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{1^2 + 5^2 + 1^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}} = \sqrt{\frac{27}{18}} = \boxed{\sqrt{\frac{3}{2}}\ u}$$

b) **[1'25 puntos]** Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a $r$ y pasa por el origen de coordenadas.

Dos rectas que se cortan están incluidas en un plano. Uno de los planos que contiene a $r$ también contiene a la recta buscada, que llamaremos $s$. Como $s$ pasa por $(0, 0, 0)$, $s$ está en el plano que contiene a $s$ y pasa por el origen de coordenadas. Si conociésemos $r$ en implícitas, tomaríamos el haz de planos de base $r$ y obligaríamos a que pasase por el origen. Pero lo que tenemos son dos puntos. Con ellos y el origen determinamos el plano que buscamos:

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 2-0 & x-0 \\ 0-0 & -1-0 & y-0 \\ -1-0 & 3-0 & z-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y \\ -1 & 3 & z \end{vmatrix} = -x - 5y - z = 0$$

Por otra parte, si corta perpendicularmente a $r$, la recta $s$ está en un plano perpendicular a $r$ y que pasa por el origen, porque $s$ así lo hace. El vector $\overrightarrow{AB}$, de dirección de $r$, es normal a dicho plano, que es, entonces:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, -1, 3) - (1, 0 -1) = (1, -1, 4)$$
$$1(x-0) - 1(y-0) + 4(z-0) = 0 \Leftrightarrow x - y + 4z = 0$$

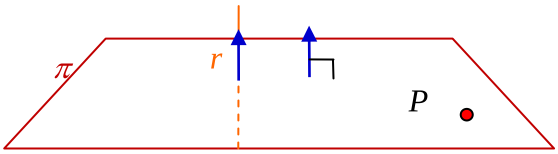
La recta buscada es intersección de dichos planos, al estar incluida en ambos:

$$\boxed{\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - y + 4z = 0 \end{cases}}$$

42) *(2014-UA4, Opc. B)* Considera el punto $P(2, -2, 0)$ y la recta $r$ dada por

$$\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

a) **[1'25 puntos]** Halla la ecuación del plano que contiene a $P$ y es perpendicular a $r$.

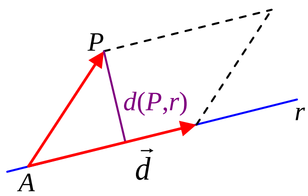



El vector de dirección de la recta debe ser normal del plano:

$$\vec{n} = (1, 0, 1) \times (0, 1, 1) =$$
$$= \left( \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 1)$$

De donde el plano es: $-1(x-2) - 1(y+2) + 1(z-0) = 0 \Rightarrow \boxed{x + y - z = 0}$

b) **[1'25 puntos]** Calcula la distancia de $P$ a $r$.




- Punto $P(2, -2, 0)$
- Vector de dirección de $r$: $\vec{d} = (-1, -1, 1)$
- Punto de $r$: Si $z = 0$ (aparece en las dos ecuaciones junto con sólo otra variable) $\Rightarrow x = 2,\ y = 1$: $A(2, 1, 0)$
- $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (2, -2, 0) - (2, 1, 0) = (0, -3, 0)$
- $\vec{d} \times \overrightarrow{AP} = (-1, -1, 1) \times (0, -3, 0) = \left( \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \right) = (3, 0, 3)$

$$d(P, r) = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{base}} = \frac{|\vec{d} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{6}\ u}$$

43) *(2011-3, Opc. A)* Sea el punto $P(2, 3, -1)$ y la recta $r$ dada por las ecuaciones $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

a) **[1 punto]** Halla la ecuación del plano perpendicular a $r$ que pasa por $P$.

El dibujo es igual al del problema 42)a).

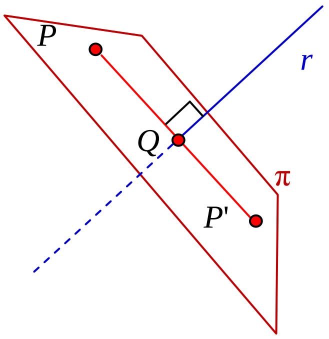
- $\vec{n} = \vec{d} = (0, -2, 1)$
- Punto del plano: $P(2, 3, -1)$
- Plano: $0(x-2) - 2(y-3) + 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{-2y + z + 7 = 0} \equiv \pi$

b) **[1'5 puntos]** Calcula la distancia del punto $P$ a la recta $r$ y determina el punto simétrico de $P$ respecto de $r$.

Para hallar la distancia, el dibujo es el del problema 42)b).

- Punto: $P(2, 3, -1)$
- Vector de dirección de $r$: $\vec{d} = (0, -2, 1)$
- Punto de $r$: $A(1, 0, 0)$
- $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (2, 3, -1) - (1, 0, 0) = (1, 3, -1)$
- $\vec{d} \times \overrightarrow{AP} = (0, -2, 1) \times (1, 3, -1) = \left( \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-1, 1, 2)$

$$d(P, r) = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{base}} = \frac{|\vec{d} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\ u}$$




Por otra parte, piden el simétrico de $P(2, 3, -1)$ respecto de $r$. Si $\pi$ es el plano perpendicular a $r$ que contiene a $P$, $P'$ será el simétrico de $P$ respecto del punto $Q$ intersección de $r$ con $\pi$. Y dicho plano lo tenemos del apartado $A$: $\pi \equiv -2y + z + 7 = 0$. Tomando la forma general de un punto de $r$, que lo sabemos por sus paramétricas, y obligando a que esté en $\pi$:

$$-2(-2\lambda) + \lambda + 7 = 5\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda = -7/5$$

Luego $Q\left(1, \frac{14}{5}, -\frac{7}{5}\right)$. Si $P'(x, y, z)$, como $Q$ es el punto medio del segmento $PP'$:

$$\frac{2+x}{2} = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{3+y}{2} = \frac{14}{5} \Rightarrow y = \frac{28}{5} - 3 = \frac{13}{5}$$

$$\frac{-1+z}{2} = -\frac{7}{5} \Rightarrow z = -\frac{14}{5} + 1 = -\frac{9}{5}$$

De donde: $\boxed{P'\left(0, \frac{13}{5}, -\frac{9}{5}\right)}$

## DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

44) *(Junio 2014, Opc. A)* Considera la recta $r$ que pasa por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(-1, 1, 0)$.

a) **[1 punto]** Halla la ecuación de la recta $s$ paralela a $r$ que pasa por $C(-2, 3, 2)$.

$s$ tiene el mismo vector de dirección de $r$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ = (–1, 1, 0) – (1, 0, –1) = (–2, 1, 1)

Como conocemos un punto: $C \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + t \end{cases}}$

b) **[1'5 puntos]** Calcula la distancia de $r$ a $s$.

Como las rectas son paralelas, es la distancia de un punto de $r$, por ejemplo $P(1, 0, -1)$ a $s$.

- Punto: $P(1, 0, -1)$
- Vector de dirección de $s$: $\vec{d} = (-2, 1, 1)$
- Punto de $s$: $A(-2, 3, 2)$
- $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$ = (1, 0, –1) – (–2, 3, 2) = (3, –3, –3)
- $\vec{d} \times \overrightarrow{AP} = (-2, 1, 1) \times (3, -3, -3) = \left( \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \right) = (0, -3, 3)$

$$d(P, r) = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{base}} = \frac{|\vec{d} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} = \boxed{\sqrt{3}\ u}$$

45) *(2012-2, Opc. A)* Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}$ y $s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$

a) **[1 punto]** Determina la posición relativa de las rectas $r$ y $s$.

Los vectores de dirección respectivos $\vec{d} = (-6, 4, 4)$ y $\vec{d}\,' = (3, -2, -2)$ son proporcionales, ya que $\vec{d} = -2\vec{d}\,'$. Y un punto de $s$: $P(3, 9, 8)$ no pertenece a $r$:

$$\frac{3+3}{-6} = \frac{9-9}{4} = \frac{8-8}{4} \Leftrightarrow -1 = 0 = 0 \text{ falso}$$

Luego las rectas tienen la misma dirección y un punto de una no está en la otra: $\boxed{\text{son paralelas}}$.

b) **[1'5 puntos]** Calcula la distancia entre $r$ y $s$.

Como son paralelas, d($r$, $s$) = d($P$, $r$)

- Punto: $P(3, 9, 8)$
- Vector de dirección de $r$: $\vec{d} = (3, -2, -2)$ (lo tomamos simplificado)
- Punto de $r$: $A(-3, 9, 8)$
- $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$ = (3, 9, 8) – (–3, 9, 8) = (6, 0, 0)
- $\vec{d} \times \overrightarrow{AP} = (3, -2, -2) \times (6, 0, 0) = \left( \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0, -12, 12)$

$$d(P, r) = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{base}} = \frac{|\vec{d} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{0^2 + 12^2 + 12^2}}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2}} = \boxed{\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\ u}$$

46) *(Septiembre 2013 reserva A, Opc. B)* Considera las rectas $r$ y $s$ dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \quad \lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$$

a) **[1 punto]** Determina la posición relativa de $r$ y $s$.

Si escribimos $s$ en paramétricas:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \quad \mu \\ z = 5 \end{cases}$$

igualando, buscaremos los puntos comunes a $r$ y $s$:

$$\begin{cases} 2 - 3\lambda = 1 - \mu \\ 3 + 5\lambda = \mu \\ \lambda = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda - \mu = 1 \\ 5\lambda - \mu = -3 \\ \lambda = 5 \end{cases}$$

Sustituyendo λ en las dos primeras:

$15 - 1 = \mu \Leftrightarrow \mu = 14$

$25 + 3 = \mu \Leftrightarrow \mu = 28$

Es decir, el sistema no tiene solución (no hay una única pareja de valores de λ y μ que resuelvan las tres ecuaciones a la vez) $\Rightarrow$ las rectas son paralelas o se cruzan. Como los respectivos vectores de dirección (–3, 5, 1) y (–1, 1, 0) no son múltiplos el uno del otro, ya que *no es cierto* que:

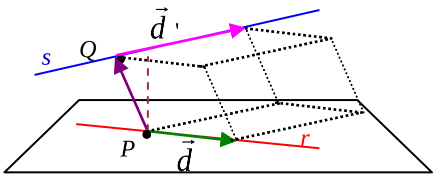
$$\frac{-1}{-3} = \frac{1}{5} = \frac{0}{1}$$

$\boxed{\text{las rectas se cruzan}}$.

b) **[1'5 puntos]** Calcula la distancia entre $r$ y $s$.

La distancia entre las dos rectas que se cruzan es la que hay entre $s$ y el plano paralelo a $s$ que contiene a $r$. Y es la altura del paralelepípedo, que es el volumen del mismo entre el área de la base:

$$d(r, r') = \frac{|[\vec{d}, \vec{d}', \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$




- $\vec{d}$ = (–3, 5, 1)
- $\vec{d}'$ = (–1, 1, 0)
- Punto de $r$: $P(2, 3, 0)$
- Punto de $s$: $Q(1, 0, 5)$
- Vector $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ = (1, 0, 5) – (2, 3, 0) = (–1, –3, 5)
- $[\vec{d}, \vec{d}', \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ = –15 + 3 + 1 + 25 = 14 (se toma en valor absoluto)

- $\vec{d}\times\vec{d}\,'$=(–3, 5, 1)×(–1, 1, 0) = $\left(\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-3 & 5\\ -1 & 1\end{vmatrix}\right)$ = (–1, –1, 2)
- $|\vec{d}\times\vec{d}\,'| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$

Por tanto:

$$d(r, r') = \boxed{\frac{14}{\sqrt{6}}\ u}$$

- **Ver problema 47)b)**

## PERPENDICULAR COMÚN A DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

47) *(2011-4, Opc. B)* Dada la recta $r$ definida por $\frac{x+7}{2}=\frac{y-7}{-1}=z$ y la recta $s$ definida por $\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=\lambda \end{cases}$

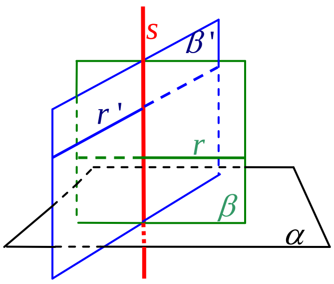
a) **[1'75 puntos]** Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas.

Como las rectas tienen distinta dirección, pues sus vectores de dirección no son proporcionales, o se cortan o se cruzan. Como ningún punto de $s$, todos los cuales tienen la forma (2, –5, λ), está en $r$, porque no verifica su ecuación:

$$\frac{2+7}{2}=\frac{-5-7}{-1}=\lambda \Leftrightarrow \frac{29}{2}=12=\lambda \text{ (no cierto para ningún valor de } \lambda)$$

las rectas <u>se cruzan</u>.

- Hallamos un plano paralelo a las dos rectas: $\alpha$. Para ello, tomamos los respectivos vectores de dirección de las dos rectas, y un punto cualquiera; el más fácil es (0, 0, 0). El producto vectorial de los vectores de dirección de las rectas nos da un vector normal al plano $\alpha$:




$$\vec{n} = \vec{d}\times\vec{d}\,' = (2, -1, 1)\times(0, 0, 1) =$$
$$= \left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\right) = (-1, -2, 0)$$

Por tanto:

$$\alpha \equiv -(x-0)-2(y-0)+0(z-0)=0 \Leftrightarrow x+2y=0$$

- Construimos el plano $\beta$ perpendicular a $\alpha$ y que contenga a $r$. Dos vectores contenidos en el plano son $\vec{n}$ y $\vec{d}$, y como punto vale cualquiera de $r$, por ejemplo $P(-7, 7, 0)$:

$$\beta \equiv \begin{vmatrix}-1 & 2 & x+7\\ -2 & -1 & y-7\\ 0 & 1 & z\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(x+7)+1(y-7)+5z=0 \Leftrightarrow -2x+y+5z-21=0$$

- Construimos el plano $\beta'$ perpendicular a $\alpha$ y que contenga a $r'$. Dos vectores contenidos en el plano son $\vec{n}$ y $\vec{d}\,'$, y como punto vale cualquiera de $r'$, por ejemplo $Q(2, -5, 0)$:

$$\beta' \equiv \begin{vmatrix} -1 & 0 & x-2 \\ -2 & 0 & y+5 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(x-2) + 1(y+5) + 0 = 0 \Leftrightarrow -2x + y + 9 = 0$$

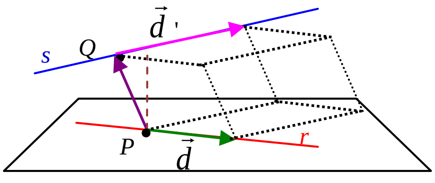
- La perpendicular común buscada es la intersección de $\beta$ y $\beta'$.

$$\boxed{\begin{cases} 2x - y - 5z + 21 = 0 \\ 2x - y - 9 = 0 \end{cases}}$$

b) **[0'75 puntos]** Calcula la distancia entre $r$ y $s$.

La distancia entre las dos rectas que se cruzan es la que hay entre $s$ y el plano paralelo a $s$ que contiene a $r$. Y es la altura del paralelepípedo, que es el volumen del mismo entre el área de la base:

$$d(r, r') = \frac{|[\vec{d}, \vec{d}', \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$



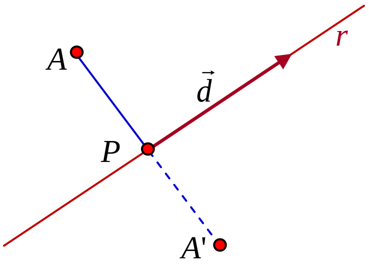

- $\vec{d} = (2, -1, 1)$
- $\vec{d}' = (0, 0, 1)$
- Punto de $r$: $P(-7, 7, 0)$
- Punto de $s$: $Q(2, -5, 0)$
- Vector $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2, -5, 0) - (-7, 7, 0) = (9, -12, 0)$
- $[\vec{d}, \vec{d}', \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & -12 & 0 \end{vmatrix} = 15$ (se toma en valor absoluto)
- $\vec{d} \times \vec{d}' = (2, -1, 1) \times (0, 0, 1) = \left( \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-1, -2, 0)$
- $|\vec{d} \times \vec{d}'| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

Por tanto:

$$d(r, r') = \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = \boxed{3\sqrt{5}\ u}$$

## SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A UNA RECTA

48) *(Junio 2011, Opc. A)* **[2'5 puntos]** Determina el punto simétrico del punto $A(-3, 1, 6)$ respecto de la recta $r$ de ecuaciones $x - 1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2}$




Lo haremos de otra forma que en el problema 43)b). Tomamos un punto general de $r$: $P(1 + t, -3 + 2t, -1 + 2t)$ y exigimos que $\overrightarrow{PA} \perp \vec{d}$, donde $\vec{d} = (1, 2, 2)$. Esto requerirá que su producto escalar valga 0. Entonces, $P$ será el punto medio entre $A$ y su simétrico $A'(x, y, z)$.

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = (-3, 1, 6) - (1 + t, -3 + 2t, -1 + 2t) = (-4 - t, 4 - 2t, 7 - 2t)$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \vec{d} = 1(-4 - t) + 2(4 - 2t) + 2(7 - 2t) = -4 - t + 8 - 4t + 14 - 4t = -9t + 18 = 0 \Rightarrow t = 2$$

De donde: $P(3, 1, 3)$.
Por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{-3+x}{2}=3 \Rightarrow x=9 \\ \frac{1+y}{2}=1 \Rightarrow y=1 \\ \frac{6+z}{2}=3 \Rightarrow z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{A'(9, 1, 0)}$$

- **Ver problema 43)b)**

## SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A UN PLANO

49) *(2011-2, Opc. B)* Dados el plano $\pi$ de ecuación $x + 2y - z = 0$ y la recta $r$ de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 3x-y=5 \\ x+y-4z=-13 \end{array}\right.$

a) **[0'75 puntos]** Halla el punto de intersección del plano $\pi$ y la recta $r$.

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de plano y recta:

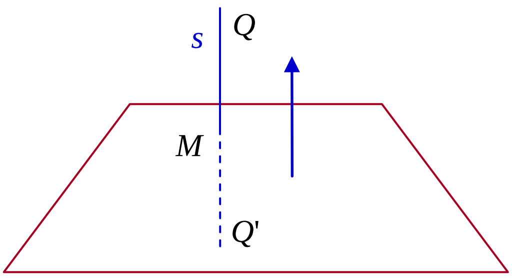
$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=0 \\ 3x-y=5 \\ x+y-4z=-13 \end{array}\right\}$$

Tomamos su matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ -3 & -7 & 0 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

3ª ec: $y = 1$
2ª ec: $3x - 1 = 5 \Rightarrow x = 2$
1ª ec: $2 + 2 - z = 0 \Rightarrow z = 4$
$\boxed{\text{Se cortan en } (2, 1, 4)}$.

b) **[1'75 puntos]** Halla el punto simétrico del punto $Q(1, -2, 3)$ respecto del plano $\pi$.




Recta perpendicular al plano que pasa por $Q$: El vector normal al plano es de dirección de la recta. Luego es:

$$s \equiv \left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=-2+2t \\ z=3-t \end{array}\right.$$

Intersección de la recta con el plano:

$$1 + t + 2(-2 + 2t) - (3 - t) = 0 \Rightarrow 1 + t - 4 + 4t - 3 + t = 0 \Rightarrow 6t - 6 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = 1$$

El punto es $M(2, 0, 2)$.
$M$ es el punto medio entre $Q$ y su simétrico $Q'(x, y, z)$. Por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1+x}{2}=2\Rightarrow x=3\\ \dfrac{-2+y}{2}=0\Rightarrow y=2\\ \dfrac{3+z}{2}=2\Rightarrow z=1\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{Q'(3,\ 2,\ 1)}$$