PROBLEMAS RESUELTOS DE CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

1) Considerar la función $f : (-\infty, 10) \to \mathrm{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ |x-5| & \text{si} \quad 2 \le x < 10 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de a sabiendo que f es continua (y que $a > 0$).

Vamos a comprobar que el enunciado es correcto, y que f puede ser continua.

- <u>$(-\infty, 2)$</u>: f está definida por $y = a^x - 6$, que es continua, porque las funciones exponenciales lo son, y restándole una constante, que es otra función continua, resulta una función continua (la suma de funciones continuas, es continua).
- <u>$(2, 10)$</u>: El valor absoluto de una función continua, es continua. Y $y = x - 5$ es una función continua.
- <u>$x = 2$</u>: 1) $\exists f(2) = |2 - 5| = 3$;

  2) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (a^x - 6) = a^2 - 6$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} |x-5| = 3$

  Será continua si coinciden estos resultados:

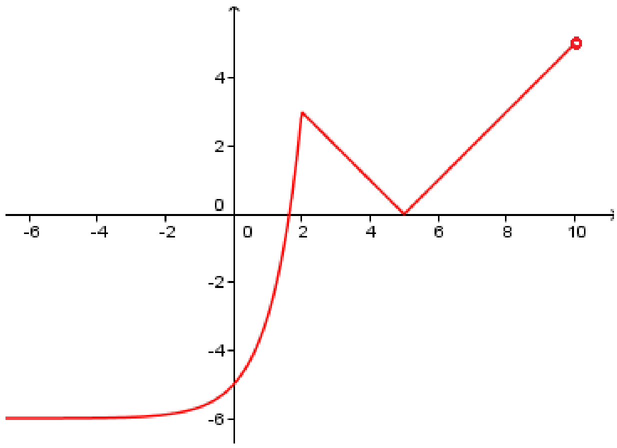
  $$a^2 - 6 = 3 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3.$$

  Como dicen que $a > 0$, la única posibilidad es $\boxed{a = 3}$. Con esta condición, <u>f es continua en $(-\infty, 10)$</u>.

b) Esbozar la gráfica de f para $a = 3$. *(0,5 puntos)*

$y = 3^x$ tiene una gráfica similar a la de la exponencial de base e, (porque la base 2 es mayor que 1), que es estrictamente creciente, con asíntota horizontal de ecuación $y = 0$ si $x \to -\infty$, y lléndose a $+\infty$ si $x \to +\infty$. Al restarle 6 unidades, la gráfica desciende verticalmente 6 unidades. Entonces, $y = 3^x - 6$ pasará por $(0, -6)$ y $(1, -3)$. Terminará en $(2, 3)$, siendo hueco dicho punto.

$y = x - 5$ es una recta creciente que atraviesa OX en $x = 5$. La parte que queda bajo OX (antes de $x = 5$) la convertimos en su simétrica sobre el mismo y tendremos $y = |x - 5|$. Pasa por $(2, 3)$, rellenando el hueco que dejó la anterior, y termina en $(10, 5)$, siendo hueco dicho punto, pues no está en el dominio. Así, la gráfica es la adjunta.



c) Estudiar la derivabilidad de f para $a = 3$. *(1 punto)*

Al ser continua, podría ser derivable. Para poder derivar el valor absoluto, lo disgregamos:

$$f(x) = \begin{cases} 3^x - 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ 5 - x & \text{si} \quad 2 \le x < 5 \\ x - 5 & \text{si} \quad 5 \le x < 10 \end{cases}$$

Aplicando las fórmulas de derivación en intervalos abiertos:

$$f'(x)=\begin{cases} 3^x \ln 3 & \text{si} \quad x<2 \\ -1 & \text{si} \quad 2<x<5 \\ 1 & \text{si} \quad 5<x<10 \end{cases}$$

Como $f'(2^-) = 3^2 \ln 3 = 9 \ln 3$ y $f'(2^+) = -1$, se ve que no coinciden, por lo que no es derivable en 2.
Análogamente, $f'(5^-) = -1$ y $f'(5^+) = 1$. Tampoco es derivable en 5, entonces, por idéntica razón.
De esta forma, la expresión definitiva de la derivada es la anterior:

$$\boxed{f'(x)=\begin{cases} 3^x \ln 3 & \text{si} \quad x<2 \\ -1 & \text{si} \quad 2<x<5 \\ 1 & \text{si} \quad 5<x<10 \end{cases}}$$

2) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{2-x} & \text{si } x<0 \\ 2^{a-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

Estudie la continuidad de esa función, calculando el valor de a que la haga continua, si es que es posible.

- Intervalo (–∞,0): f coincide con $y=\dfrac{4}{2-x}$, que es continua en su dominio. La única operación que presenta problemas de entre las que figuran en dicha función es la división, porque no se puede dividir entre 0. Por tanto, es continua en todo R–{2} (2 anula el denominador). Pero 2, que es la única discontinuidad, no pertenece a (–∞,0), zona donde f coincide con esta función $\Rightarrow f$ es continua en todo (–∞,0).
- Intervalo (0,+∞): f coincide con $y = 2^{a-x}$, que es continua en su dominio, cualquiera que sea el valor de a, porque todas las exponenciales lo son. Dicho dominio, como en todas las exponenciales, es todo R $\Rightarrow f$ es continua en todo (0,+∞).
- $x = 0$: En las funciones definidas a trozos, los puntos de conexión siempre hay que estudiarlos por separado. Como $\exists f(0)=2^a$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{4}{2-x} = 2$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2^{a-x} = 2^a \Rightarrow f$ tiene una discontinuidad de salto finito (de primera especie) en x=0 salvo si estos valores coinciden, es decir, si $2=2^a \Leftrightarrow 1=a$

En resumen, si a=1, f es continua en todo R, pero si $a\neq 1$, lo es en R–{0} y tiene una discontinuidad de salto finito en x=0.

3) Se sabe que la función $f : (-1, +\infty) \to$ R definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+a}{x+1} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

es continua en (–1, +∞). Halla el valor de a. Deriva la función para dicho valor.

La fórmula con que se define f en el intervalo (–1, 0) es un polinomio, por lo que es continua en la zona. La correspondiente a (0, +∞) es una función racional con discontinuidad en –1 (que anula el denominador); pero como $-1 \notin (0, +\infty)$ no afecta a la continuidad en este intervalo. Luego la función, en efecto, es continua en todo el intervalo en el que está definida (–1, +∞), salvo quizás en el punto de conexión de las dos definiciones, esto es, x=0. En el enunciado se nos dice que ahí también es continua, por lo que vamos a exigirlo. Ello requerirá la coincidencia de los límites laterales en dicho punto:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2-4x+3) = 3 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+a}{x+1} = a$$

Por tanto, a = 3. Con ello, existirá $\lim_{x\to 0} f(x)$ y coincidirá con $f(0) = a = 3$, con lo que la función será continua.

Al ser continua, podemos derivar directamente aplicando las reglas en intervalos abiertos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ \dfrac{2x(x+1)-(x^2+3)}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-4 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ \dfrac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x-4 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Falta estudiar la existencia de $f'(0)$. Como $f'(0^-) = 2\cdot 0-4 = -4$ y $f'(0^+) = -\frac{3}{1} = -3$, al no coincidir no es posible que exista. Luego la función no es derivable en x=0 y la expresión final de su derivada es la anterior.

4) Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x^2+ax) & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{bx^2+c}{x+1} & si \quad x>0 \end{cases}$$

Calcular las constantes a, b y c sabiendo que f es derivable y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ tiene pendiente 3. Dar la expresión final de su función derivada, para los valores obtenidos.

Si f es derivable, también es continua. Como está definida por dos expresiones que constituyen funciones elementales, cada una en su zona de definición, y las funciones elementales son continuas en su dominio, la única discontinuidad que concierne a ellas es cuando se anule el denominador de la función racional. Esto es, cuando $x = -1$. Pero este valor no está en la zona donde f coincide con $y = \dfrac{bx^2+c}{x+1}$, que es (0, +∞), por lo que no es discontinuidad de f. De este modo, la única discontinuidad podría proceder de $x = 0$, que es donde se conectan las dos definiciones de f. Para que no haya discontinuidad, debe existir el límite y coincidir con la imagen de $x = 0$, lo que exige la coincidencia de los dos límites laterales. Como:

$$\lim_{x\to 0^-} e^x(x^2+ax) = 1\cdot 0 = 0; \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{bx^2+c}{x+1} = \frac{c}{1} = c$$

Deben coincidir: $\boxed{c = 0}$.

Veamos la derivabilidad. Aplicando las fórmulas de derivación, que son válidas en intervalos abiertos, tendremos:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x(x^2+ax)+e^x(2x+a) & si \quad x<0 \\ \dfrac{2bx(x+1)-bx^2}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases} = \begin{cases} e^x(x^2+ax+2x+a) & si \quad x<0 \\ \dfrac{bx^2+2bx}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$$

x = –1 anularía el denominador de la expresión segunda. Pero no está dentro de la zona donde es válida. Así que es derivable en todo R, salvo en x = 0, donde aún no la hemos estudiado. Como sabemos que tiene que ser derivable también ahí, deben coincidir las derivadas laterales:

$$f'(0^-) = f'(0^+) \Leftrightarrow e^0 a = \frac{0+0}{(0+1)^2} \Leftrightarrow \boxed{a=0}$$

Por último, la <u>tangente</u> en x = 1 tiene pendiente 3 $\Rightarrow$ $f'(1) = 3$. Como x = 1 está en la zona $x > 0$, es válida la segunda forma de la derivada de f. Así:

$$\frac{b\cdot1^2+2b\cdot1}{(1+1)^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{3b}{4} = 3 \Leftrightarrow \boxed{b=4}$$

La <u>expresión final</u> de la derivada de f es, pues:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} e^x(x^2+2x) & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{4x^2+8x}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}}$$

5) Sea $f: R \to R$ la función derivable definida por

$$f(x) = \begin{cases} a-x & \text{si} \quad x\le 1 \\ \dfrac{b}{x} + \ln x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Calcular a y b.

- $y = a - x$ es continua en todo R (es polinómica) $\Rightarrow$ en particular, lo es en el intervalo (–∞, 1).
- $y = \dfrac{b}{x} + \ln x$ es continua en (0, +∞), pues ahí lo es $\ln x$ y el primer sumando sólo tiene discontinuidad en 0. Por tanto, lo es en (1, +∞).
- Para ser derivable también tiene que ser continua en x = 1, que es el único punto que nos falta. Y ello exige la coincidencia de:
  1) $f(1) = a - 1$
  2) $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(a-x) = a-1$ y $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(\dfrac{b}{x}+\ln x\right) = b$

Luego será continua en todo R si, y sólo si $\boxed{a-1=b}$. (1)

Aplicando las fórmulas de derivación, lo que puede hacerse en intervalos abiertos, tenemos:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<1 \\ -\dfrac{b}{x^2} + \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Si $x > 1$, según la expresión obtenida, f no sería derivable en x = 0. Pero dicho valor no está en la zona $x > 1$, por lo que f es derivable en R – {1}. Para que sea derivable en todo R, lo que sabemos que ocurre, debe ser $f'(1^-) = f'(1^+) \Leftrightarrow -1 = -b + 1 \Rightarrow \boxed{b=2}$. Y sustituyendo en (1):

$$a - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{a=3}.$$

6) Sea la función $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$

a) Determinar a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio, y escribir la forma final de f y de f' para los valores obtenidos.

Primeramente, si f es derivable, entonces, es continua. Comenzamos exigiendo esto, para lo que estudiamos la continuidad de la función (conviene comprobar que el enunciado es consistente).

- $(-\infty, 0)$: f coincide con la función $y = x + 2e^{-x}$ que, al ser elemental, es continua en su dominio, que es R. Por tanto f es continua en $(-\infty, 0)$.
- $(0, 1)$: $y = a\sqrt{b-x}$ es continua en su dominio, que consiste en los valores de x para los que $b - x \ge 0$, esto es, $x \le b$. Para que en los puntos del intervalo $(0, 1)$ sea continua f, $\boxed{\text{se requiere, pues que } b \ge 1}$. (1)
- $x = 0$: 1) $\exists f(0) = 0 + 2e^0 = 2$;

  2) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x + 2e^{-x}) = 2$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} a\sqrt{b-x} = a\sqrt{b}$

  Para que sea continua, como se exige, debe ser $\boxed{a\sqrt{b} = 2}$ (2)

Pasemos, ahora, al estudio de a derivada. Podemos aplicar las fórmulas de las tablas de derivadas en intervalos abiertos, por lo que, de momento:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{-a}{2\sqrt{b-x}} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Para que, en efecto, sea derivable en su dominio, debe serlo también en $x = 0$, lo que requiere que $f'(0^-) = f'(0^+)$:

$$f'(0^-) = 1 - 2 = -1; \quad f'(0^+) = \frac{-a}{2\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{b}} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 2\sqrt{b}} \quad (3)$$

Resolvemos el sistema formado por las condiciones (2) y (3). Sustituyendo (3) en (2):

$$2\sqrt{b}\sqrt{b} = 2 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

Sustituimos en (3): $a = 2\cdot 1 = 2$

En definitiva $\boxed{a = 2 \text{ y } b = 1}$, lo que también satisface la condición (1).

Por tanto, $f'(0) = -1$. Añadimos esta información a la expresión de f' que teníamos,. Lo hacemos, por ejemplo, diciendo que $f'(x) = 1 - 2e^{-x}$ para $x = 0$, por lo que, definitivamente:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}}$$

Y la función f queda así:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ 2\sqrt{1-x} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}}$$

b) Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

- <u>Punto de tangencia</u>: Como $f(0) = 2$, se trata de $(0, 2)$.
- <u>Pendiente de la tangente</u>: $m = f'(0) = 1 - 2 = -1$.

- Ecuación de la tangente: $y - 2 = -1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -x + 2}$.
- Ecuación de la normal: Pendiente de la normal: $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{-1}{1} = 1$.

  Como pasa por el punto tangencia, la normal es: $y - 2 = 1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x + 2}$.

7) Determinar una función derivable $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f(1) = -1$ y que:

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Esta función procede de derivar una definida a trozos. Los teoremas de las tablas de derivadas funcionan en intervalos abiertos, por lo que cada una de las dos fórmulas que componen f deben tener una primitiva en sus correspondientes abiertos. Además, sabemos que $f'(0) = e^0 - 1 = 0$, lo que usaremos para completar f. Procedamos:

$$\int (x^2 - 2x)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + k$$

$$\int (e^x - 1)dx = e^x - x + k'$$

Así que, inicialmente, nos queda:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + k & \text{si} \quad x < 0 \\ e^x - x + k' & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Para ser derivable, debe ser continua. Así: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Leftrightarrow \boxed{k = 1 + k'}$ (1).

Además, $f(1) = -1 \Rightarrow e - 1 + k' = -1 \Rightarrow \boxed{k' = -e} \Rightarrow$ De (1): $\boxed{k = 1 - e}$.

La imagen de $x = 0$ debe coincidir con el resultado de estos dos límites laterales: basta poner un igual en cualquiera de las dos definiciones. Lo hacemos en la segunda, por coherencia con la fórmula de f'. De modo que, finalmente:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e & \text{si} \quad x < 0 \\ e^x - x - e & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}}$$

8) Estudiar la derivabilidad de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - |x|} & \text{si} \quad x \neq -1 \text{ y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases}$$

Para estudiar la derivabilidad, hemos de considerar, previamente, la continuidad, porque si tuviera alguna discontinuidad, en ella no podría ser derivable.

Salvo en dos puntos (-1 y 1), la función está definida por el cociente de dos funciones continuas (x, por un lado, y $1 - |x|$, que lo es por ser suma de dos continuas). Será, pues, continua salvo en los puntos que anulen el denominador, esto es, salvo en:

$$1 - |x| = 0 \Leftrightarrow 1 = |x| \Leftrightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1$$

(recordar una propiedad del valor absoluto: $|x| = a \Leftrightarrow x = -a$ ó $x = a$). Estudiemos dichos puntos.

- $x = -1$: 1) $\exists f(-1) = 0$; 2) $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{1}{1-|x|} = \frac{1}{1-1} = \infty$. Por tanto, presenta una discontinuidad asintótica. No vamos a detenernos en averiguar si es, además, de salto infinito, pues no nos piden el estudio de la continuidad.
- $x = 1$: 1) $\exists f(1) = 0$; 2) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-|x|} = \frac{1}{1-1} = \infty$. Por tanto, presenta, igualmente, una discontinuidad asintótica.

De este modo, f es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Por tanto, no puede ser derivable ni en -1 ni en 1. *(0,5p)*

Podemos derivar directamente aplicando las fórmulas de derivación en intervalos abiertos. Pero con esta función nos encontramos con un valor absoluto, función no elemental, cuya derivada no podemos obtener directamente. Es necesario aplicar la definición de valor absoluto para desembarazarse del mismo y tener la función definida a trozos pero a través de funciones elementales, que podamos derivar.
Sabemos que la definición referida es:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Nos vamos a f. En la expresión $\frac{1}{1-|x|}$, diferenciamos, entonces, cuando estemos considerando valores $x \geq 0$ y $x < 0$, y sustituimos según lo anterior, pero considerando que dicha expresión es válida sólo si x no es -1 ni 1, lo que nos lleva a excluir dichos puntos de las zonas $x \geq 0$ y $x < 0$, si bien cada uno de ellos está sólo en una de esas zonas:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1-(-x)} & \text{si} \quad x < 0 \text{ y } x \neq -1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x < 0 \text{ y } x \neq -1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x \in [0,1) \cup (1,+\infty) \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases}$$

Por tanto, derivando en intervalos abiertos:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1-x+x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si} \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty) \\ \dfrac{1+x+x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si} \quad x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) \end{cases}$$

Y sólo nos resta estudiar qué sucede en $x = 0$, pues sabemos que no puede ser derivable en -1 ni 1. Aplicando los resultados que tenemos:

$$f'(0^-) = \frac{1}{(1+0)^2} = 1 \qquad f'(0^+) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \Rightarrow \exists f'(0) = 1$$

Por tanto, la expresión definitiva de $f\,'$ es:

$$\boxed{f\,'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si} \quad x \in [0,1) \cup (1,+\infty) \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si} \quad x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) \end{cases}}$$

donde hemos añadido el resultado obtenido para la derivada en 0 en la primera zona.