PROBLEMAS RESUELTOS DE SELECTIVIDAD DE ESTUDIO Y GRÁFICAS DE FUNCIONES

1) Sea f: R → R la función definida por $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$.

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

A.H. Hay que calcular $\lim_{x\to\infty}(x-1)^2 e^{-x}$. Pero como el comportamiento de la exponencial es diferente en $-\infty$ y en $+\infty$, hemos de diferenciarlos.

- $\lim_{x\to-\infty}(x-1)^2 e^{-x} = (+\infty\cdot e^{+\infty}) = (+\infty)(+\infty) = +\infty \quad\Rightarrow$ No hay asíntota por el lado del $-\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2 e^{-x} = (+\infty\cdot e^{-\infty}) = (+\infty\cdot 0) = 0$, porque aunque es una indeterminación, el crecimiento de una polinómica es despreciable comparado con el de una exponencial. Otra forma de hallarlo sería por L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2(x-1)}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Como consecuencia, $y = 0$ es asíntota horizontal por el lado del $+\infty$.

A.V. No tiene, porque habría que calcular límites en los puntos de discontinuidad, y la función es continua en todo R.

A.O. Si intentamos calcularla por el lado del $+\infty$ nos volvería a salir la horizontal anterior. Pero podría haberla por el lado del $-\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)^2 e^{-x}}{x} = \left(\frac{(+\infty)(+\infty)}{-\infty}\right) = -\infty$$

porque el infinito de la exponencial es de orden superior al que producen las polinómicas del numerador y denominador, por lo que prevalece. El signo menos es consecuencia de la regla de los signos. A la vista de este resultado concluimos que no hay asíntota oblicua.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si existen, sus extremos relativos o locales y sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

Derivamos: $f'(x) = 2(x-1)e^{-x} - (x-1)^2e^{-x} = e^{-x}(x-1)[2-(x-1)] = e^{-x}(x-1)(3-x)$ donde hemos sacado factor común $e^{-x}(x-1)$ en el primer paso.

Dividimos el dominio de f en intervalos mediante:

- Puntos de discontinuidad de f: No hay.
- Puntos de discontinuidad de f': No hay.
- Puntos que anulan $f'(x)$: $e^{-x}(x-1)(3-x) = 0$. Un producto vale 0 si, y sólo si alguno de los factores es cero. Por lo que:

$$\begin{cases} e^{-x} = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución (la exponencial no se anula nunca)} \\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 3-x = 0 \Rightarrow 3 = x \end{cases}$$

El cuadro resultante con los intervalos mencionados es:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	–	0	+	0	–
f	↘	Mín	↗	Máx	↘

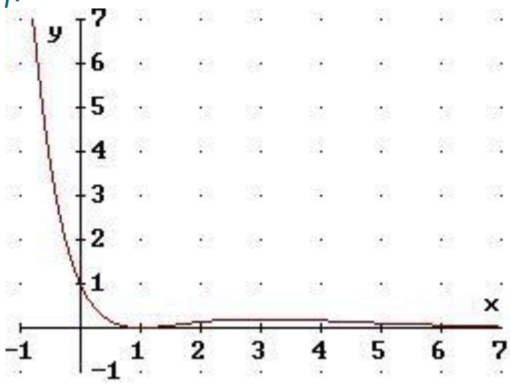
Si $x = 1 \quad\Rightarrow\quad y = 0$: Hay mínimo relativo en $(1, 0)$.

Si $x = 3 \quad\Rightarrow\quad y = 4e^{-3} \approx 0.2$: Hay máximo relativo en $(3, 4e^{-3})$.

Los extremos absolutos se determinan comparando las imágenes (o límites, si no existen imágenes) en: extremos del intervalo, puntos de discontinuidad de f y de f' y extremos relativos. El intervalo de definición de f es $(-\infty, \infty)$. Calculando las asíntotas vimos que $\lim_{x\to-\infty}(x-1)^2e^{-x} = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2e^{-x} = 0$. Y los extremos relativos acabamos de obtenerlos.

En consecuencia, la función no tiene máximo absoluto, puesto que sus imágenes tienden a $+\infty$ a medida que nos acercamos a $-\infty$. La menor imagen vale 0 y se alcanza en $x = 1$, por lo que en este valor de x se alcanza el mínimo absoluto, que vale 0. Téngase en cuenta que si nos acercamos a $+\infty$ la función tiende a 0, pero no lo alcanza nunca (llegaría a él en $+\infty$, pero no podemos avanzar hasta $+\infty$). Por lo que el único sitio donde se alcanza ésta mínima imagen (cero) es en $x = 1$.

c) Esboza la gráfica de f.



2) Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^4+3}{x}$, para $x \neq 0$.

a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f.

Aunque no lo piden, comenzamos diciendo que Dom(f) = R – {0}, puesto que $x = 0$ no tiene imagen, al anular el denominador. Este conocimiento nos será necesario para calcular las asíntotas verticales.

- Cortes con OX: Si $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{x^4+3}{x} \Rightarrow 0 = x^4 + 3 \Rightarrow \sqrt[4]{-3} = x$

  $\Rightarrow$ No corta al eje.
- Corte con OY: Si $x = 0$ no hay imagen (no está en el dominio).
- Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3}{x} = \infty$, puesto que el numerador es un polinomio de grado superior al del denominador, por lo que produce un infinito, igualmente, de orden superior. Por tanto, no hay asíntota horizontal.
- Asíntotas verticales: El único punto de discontinuidad es $x = 0$. Como $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^4+3}{x} = \left(\dfrac{3}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ La recta $x = 0$ es asíntota vertical.
- Asíntota oblicua: $m = \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3}{x^2} = \infty$, por razones idénticas a las antes expuestas. Por tanto, tampoco tiene asíntota oblicua.

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de *f*.

Parece que la función pudiera tener simetrías. Como $f(-x) = \dfrac{(-x)^4+3}{-x} = -\dfrac{x^4+3}{x} = -f(x)$ $\Rightarrow$ la función es *impar*, con lo que será simétrica respecto al origen. Esto no nos lo piden, pero nos puede ayudar a corroborar que estamos haciendo bien el cuadro de monotonía, que abordamos a continuación.
Comenzamos derivando la función:

$$f'(x) = \frac{4x^3x-(x^4+3)}{x^2} = \frac{4x^4-x^4-3}{x^2} = \frac{3x^4-3}{x^2}$$

- Discontinuidades de f: $x = 0$.
- Discontinuidades de f': $x = 0$.
- Puntos que anulan f': $0 = \dfrac{3x^4-3}{x^2}$ $\Rightarrow$ $0 = 3x^4 - 3$ $\Rightarrow$ $3 = 3x^4$ $\Rightarrow$ $1 = x^4$

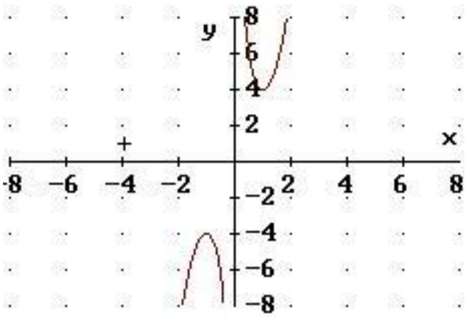
  $\Rightarrow$ $x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1$.

Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos, para confeccionar el cuadro de monotonía:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	+	0	–	∄	–	0	+
f	↗	Máx	↘	∄	↘	mín	↗

Como $f(-1) = -4$ $\Rightarrow$ Tiene un máximo relativo en $(-1, -4)$
Como $f(1) = 4$ $\Rightarrow$ Tiene un mínimo relativo en $(1, 4)$.

c) Esboza la gráfica de *f*.



No nos piden, ni nos hace falta, por lo que no deberíamos incluirlo en un examen, la curvatura. Como información, la vamos a calcular, tras la advertencia anterior.
Derivamos:

$$f''(x) = \frac{12x^3x^2-2x(3x^4-3)}{x^4} = \frac{x[12x^4-2(3x^4-3)]}{x^4} = \frac{12x^4-6x^4+6}{x^3} = \frac{6x^4+6}{x^3}$$

Dividimos en intervalos el dominio de la función mediante:

- Discontinuidades de f: $x = 0$.
- Discontinuidades de f'': $x = 0$.

- Puntos que anulan f'': $0 = \dfrac{6x^4+6}{x^3} \Rightarrow 0 = 6x^4 + 6 \Rightarrow -6 = 6x^4 \Rightarrow -1 = x^4 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{-1}$ que no existe en R.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\cap$	$\nexists$	$\cup$ (convexa)

No tiene, pues, puntos de inflexión.

3) Sea f: R → R la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$
  a) Estudia la derivabilidad de f.

La función $y = |x|$ se define de distinta forma según que x sea positivo o negativo. Concretamente, $y = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Para poder estudiar nuestra f, hemos de tener esto en cuenta. Así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2 - (-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

No hace falta comprobar que f es continua, puesto que es diferencia de dos funciones que lo son: $y = x^2$ e $y = |x|$. Por tanto, pasamos directamente a estudiar su derivabilidad. En principio,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

a falta de estudiar la existencia de derivada en $x = 0$. Como:

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x+1) = 1 \quad \text{y} \quad f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x-1) = -1$$

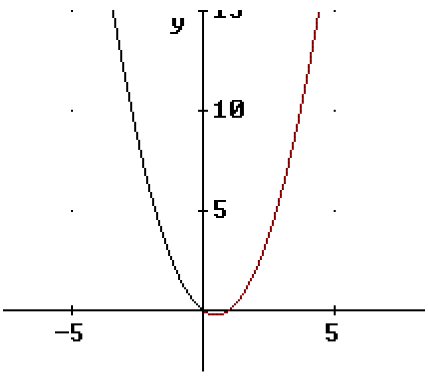
al no coincidir, f no es derivable en $x = 0$, por lo que la expresión final de f' es la anterior.

  b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Las dos fórmulas que constituyen la expresión de f son parábolas, por lo que sería válido estudiar éstas y, de ahí, extraer las conclusiones finales. También podríamos usar el procedimiento general. Lo haremos de ambas formas y por este orden.

- $y = x^2 - x$ es una parábola que se abre hacia arriba (es decir, con un mínimo), ya que el coeficiente de x^2 es positivo (vale 1). Además, como se tiene que: $0 = x^2 - x \Rightarrow 0 = x(x-1) \Rightarrow$ (un producto es 0 si, y sólo si algún factor se anula): $\begin{cases} x = 0, \quad \text{ó} \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$ tenemos que corta a OX en (0, 0) y en (1, 0). El primero de estos dos puntos es también el corte con OY.

  El *eje* (simetría de la gráfica) es la recta vertical de ecuación $x = \dfrac{-b}{2a}$. O sea: $x = \dfrac{1}{2}$. Sustituyendo este valor de x en la ecuación de la parábola, con la coordenada y resultante tenemos el vértice: $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$.

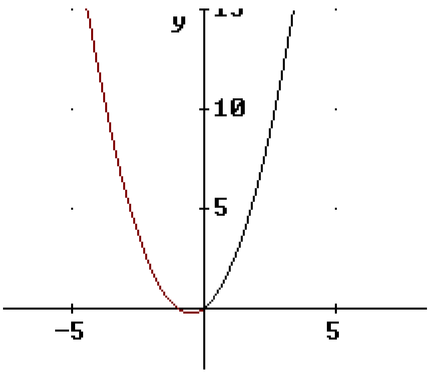


Con todos estos datos, dibujamos esta parábola, que coincide con f si $x \geq 0$. En el gráfico adjunto, la gráfica que corresponde a f está en rojo, y el resto de la parábola, en negro. Por tanto, deducimos que f es decreciente, al menos, en [0, ½) y creciente en (½, +∞).

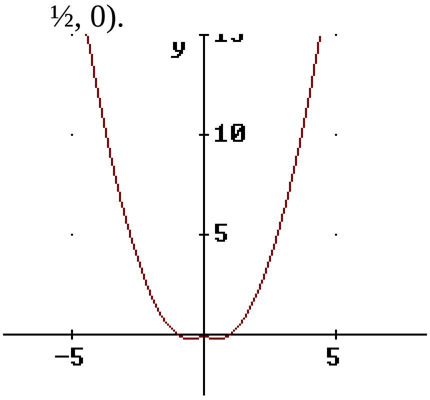
- $y = x^2 + x$ es una parábola que se abre, también, hacia arriba porque el coeficiente de x^2 es positivo. Además, como: $0 = x^2 + x \Rightarrow 0 = x(x + 1) \Rightarrow$ (un producto es 0 si, y sólo si algún factor se anula): $\begin{cases} x = 0, & \text{ó} \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$

  tenemos que corta a OX en (0, 0) y en (–1, 0). El primero de estos dos puntos es también el corte con OY.

  El *eje* (simetría de la gráfica) es la recta vertical de ecuación $x = \dfrac{-b}{2a}$. O sea: $x = -\dfrac{1}{2}$. Sustituyendo este valor de x en la ecuación de la parábola, con la coordenada y resultante tenemos el vértice: $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$.



  Con todos estos datos, dibujamos esta parábola, que coincide con f si $x < 0$. En el gráfico adjunto, la parte de la gráfica que corresponde a f se ha dibujado en rojo. Por tanto, de esta segunda parábola deducimos que f resulta ser decreciente en (–∞, –½) y creciente en (–½, 0).



Combinando ambos resultados, tenemos la gráfica completa de f, que hemos puesto a la izquierda.

Como consecuencia, f es decreciente en (–∞, –½), creciente en (–½, 0), decreciente en (0, ½) y creciente en (½, +∞).

Hagámoslo ahora por el procedimiento general.

- Discontinuidades de f: No tiene.
- Discontinuidades de f': $x = 0$ (ahí, no existía f')
- Puntos que anulan f':
  Para valores $x > 0$: $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = ½$ que, en efecto, cumple que $x > 0$.
  Para valores $x < 0$: $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -½$ que también cumple que $x < 0$.

Luego ambos valores son válidos (si alguno hubiera salido fuera de la zona en la que la fórmula coincide con f habría de ser desechado).

Construimos el cuadro correspondiente, dando valores arbitrarios a x dentro de cada uno de los intervalos resultantes para, al sustituirlo en $f\,'$, obtener su signo. El resultado es el mismo de antes:

	$(-\infty,-½)$	$-½$	$(-½, 0)$	0	$(0, ½)$	½	$(½, +\infty)$
$f\,'$	–	0	+	$\nexists$	–	0	+
f	↘	mín	↗	Máx	↘	mín	↗

Observar que en $x = 0$ no existe $f\,'$, pero sí f. Como a la izquierda es creciente y a la derecha decreciente, hay un máximo relativo.

c) Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).

Tenemos los valores de x donde se alcanzan los extremos relativos, del apartado anterior. Sustituyéndolos en la fórmula de f, obtenemos las coordenadas y correspondientes, de manera que el resultado es:

Máximo relativo en (0, 0).

Mínimos relativos en $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ y en $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

4) Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^4+3}{x}$, para $x \neq 0$.

a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f.

Dominio: $D(f) = \mathrm{R} - \{0\}$

Puntos de corte con los ejes

- OY: Si $x = 0 \Rightarrow$ No hay imagen, puesto que se anula el denominador (es el único punto que no pertenece al dominio).
- OX: Si $y = 0 \Rightarrow$ Para que la fracción se anule, el numerador debe anularse (y comprobaríamos, después, que las soluciones que obtengamos no anulan el denominador): $x^4 + 3 = 0 \Rightarrow x^4 = -3$ que no tiene solución.

Por tanto, la función no corta a ninguno de los dos ejes.

Asíntotas

- Horizontales: Como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+3}{x} = \infty$, la función no tiene asíntotas horizontales, ni por el lado de $-\infty$ ni por el de $+\infty$ (hemos tomado límite con x tendiendo a infinito sin signo, englobando a ambos a la vez). Si quisiésemos afinar más, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4+3}{x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+3}{x} = +\infty$, pero entretenerse en esto no merece la pena, puesto que esta información la obtendremos posteriormente de la monotonía.
- Verticales: El único punto de discontinuidad lo tenemos en $x = 0$. Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+3}{x} = \infty$ la recta de ecuación $\boxed{x = 0}$ es asíntota vertical.

- <u>Oblicuas</u>: $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^4+3}{x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4+3}{x^2} = \infty$ puesto que el numerador es un polinomio de grado superior al del denominador, por lo que produce un infinito de orden superior. Por tanto, <u>no hay asíntota oblicua</u>.

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f.

$$f'(x) = \frac{4x^3 x - 1\cdot(x^4+3)}{x^2} = \frac{4x^4 - x^4 - 3}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2}$$

- Discontinuidades de f: $x = 0$.
- Discontinuidades de f': $x = 0$ (anula el denominador).
- Puntos que anulan f': $3x^4 - 3 = 0 \Rightarrow 3(x^4 - 1) = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1$.

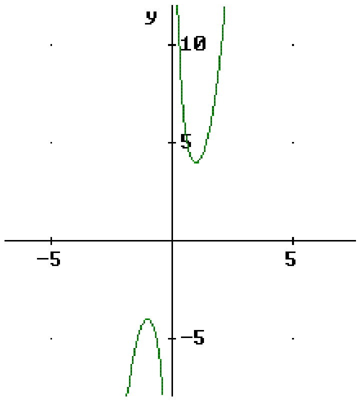
Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	↗	Máx	↘	$\nexists$	↘	mín	↗

Si $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -4 \Rightarrow$ El máximo relativo es $(-1, -4)$

Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 4 \Rightarrow$ El mínimo relativo es $(1, 4)$

c) Esboza la gráfica de f.



5) Sea f la función definida, para $x \neq 2$ y $x \neq -2$, por $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$.

a) Determina las asíntotas de la gráfica de f.

Como los valores de x que anulan el denominador son -2 y 2, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- <u>Asíntota horizontal</u>: Como $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = 1$, puesto que la máxima potencia de x tanto del numerador como del denominador es 2, y los coeficientes de los términos correspondientes valen, ambos, 1, siendo su cociente, también, 1. Por tanto, la recta horizontal de ecuación $\boxed{y = 1}$ es A.H.
- <u>Asíntota vertical</u>: Hay dos discontinuidades para estudiar:

$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \left(\frac{7}{0}\right) = \infty \Rightarrow$ La recta vertical de ecuación $\boxed{x = -2}$ es A.V.

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3}{x^2-4} = \left(\dfrac{7}{0}\right) = \infty$ $\Rightarrow$ La recta vertical de ecuación $\boxed{x=2}$ es A.V.

- <u>Asíntota oblicua</u>: Como tiene A.H. tanto por el lado del +∞ como por el del –∞, si intentamos calcular la A.O. obtendríamos otra vez la A.H.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan).

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4)-2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x[(x^2-4)-(x^2+3)]}{(x^2-4)^2} = \frac{2x(x^2-4-x^2-3)}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{2x(-7)}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

- Discontinuidades de f: –2 y 2 (no están en el dominio)
- Discontinuidades de f': –2 y 2 (anulan el denominador, por lo que no tienen imagen)
- Puntos que anulan f': $-14x = 0 \Rightarrow x = 0$.

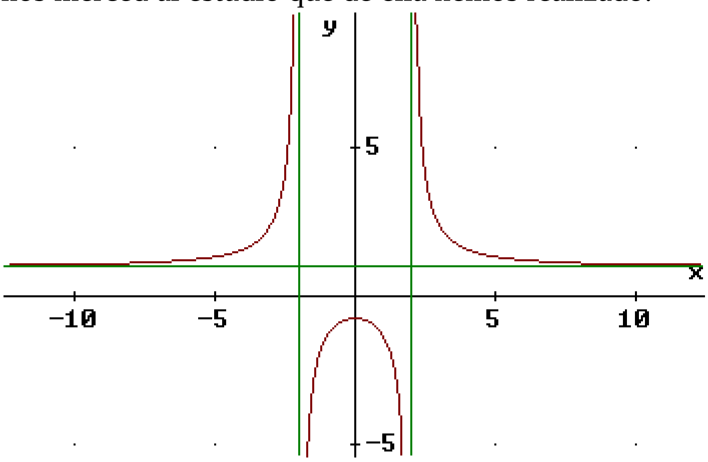
Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos y averiguamos el signo de f' en cada uno de ellos, para lo que basta elegir un punto arbitrario del intervalo en cuestión y sustituirlo en f', anotando su signo, porque en todos los puntos del intervalo el signo de f' es el mismo (garantizado por el Teorema de Bolzano). Como el denominador de f' es el cuadrado de una expresión, siempre va a ser positivo, con lo que basta comprobar el signo del numerador:

	(–∞, –2)	–2	(–2, 0)	0	(0, 2)	2	(2, +∞)
f'	+	∄	+	0	–	∄	–
f	↗	∄	↗	Máx	↘	∄	↘

Como $f(0) = -3/4$, las coordenadas del máximo relativo son (0, –3/4)

c) Esboza la gráfica de f.

Hemos dibujado en color verde las dos asíntotas verticales y la asíntota horizontal. La gráfica queda como sigue, aprovechando los conocimientos que de la función tenemos merced al estudio que de ella hemos realizado:



6) Sea $f: (0, +\infty) \to R$ la función definida por $f(x) = x^2 \text{Ln}(x)$ (Ln denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Nos dan el dominio: $(0, +\infty)$, que es correcto, puesto que coincide con el de la función $\text{Ln}(x)$, que es la única operación con restricciones a la hora de calcular imagen que aparece en la fórmula de f. En dicho intervalo, f es continua.

Derivamos: $f'(x) = 2x\,\text{Ln}(x) + x^2\frac{1}{x} = 2x\,\text{Ln}(x) + x$.

La función derivada es continua en el mismo intervalo donde lo es f.
Por último, $f'(x) = 0 \iff 2x\,\text{Ln}(x) + x = 0 \iff x\,(2\,\text{Ln}(x) + 1) = 0 \iff x = 0$ (que no pertenece al dominio) ó $2\,\text{Ln}(x) + 1 = 0$, cual ocurre cuando $\text{Ln}(x) = -1/2$, es decir, si $x = e^{-1/2}$ (recordar que el resultado de un logaritmo es el exponente).

Por tanto, dividimos el dominio en intervalos por el único punto obtenido:

	$(0, e^{-1/2})$	$e^{-1/2}$	$(e^{-1/2}, +\infty)$
f'	–	0	+
f	↘	mín	↗

Como $f(e^{-1/2}) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \text{Ln}\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$, las coordenadas del mínimo son $\left(e^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2e}\right)$.

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \sqrt{e}$.

$f(\sqrt{e}) = \left(\sqrt{e}\right)^2 \text{Ln}\left(\sqrt{e}\right) = e\,\frac{1}{2}\text{Ln}(e) = \frac{e}{2}\cdot 1 = \frac{e}{2}$

Por tanto, el punto de tangencia es $\left(\sqrt{e}, \frac{e}{2}\right)$.

La tangente tendrá por pendiente:

$$m = f'(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}\,\text{Ln}(\sqrt{e}) + \sqrt{e} = 2\sqrt{e}\,\frac{1}{2}\text{Ln}(e) + \sqrt{e} = \sqrt{e}\cdot 1 + \sqrt{e} = 2\sqrt{e}$$

Por tanto, usando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, la tangente es:

$$y - \frac{e}{2} = 2\sqrt{e}\,(x - \sqrt{e}) \Rightarrow y = 2\sqrt{e}\,x - 2e + \frac{e}{2} \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{e}\,x - \frac{3e}{2}}$$

7) Sea f la función definida por $f(x) = \frac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 2$.

a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.

- Horizontales. $\lim_{x\to\infty} \frac{9x-3}{x^2-2x} = 0$, puesto que se trata de un cociente de polinomios donde el grado del denominador es superior al del polinomio del numerador, por lo que produce un infinito de orden superior al de éste. Por tanto, la recta $\boxed{y = 0}$ es asíntota horizontal, tanto por el lado del $-\infty$ como por el $+\infty$.
- Verticales. Hemos de calcular los límites en los puntos de discontinuidad de f. Éstos son $x = 0$ y $x = 2$, únicos valores que anulan el denominador y que, por tanto, no están en el dominio.

$$\lim_{x \to 0} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{la recta } \boxed{x=0} \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{la recta } \boxed{x=2} \text{ es asíntota vertical.}$$

- Oblicuas: No tiene, porque si intentásemos calcularlas volveríamos a obtener la asíntota horizontal.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Hemos de derivar la función.

$$f'(x) = \frac{9(x^2-2x)-(9x-3)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{9x^2-18x-(18x^2-18x-6x+6)}{(x^2-2x)^2} =$$

$$= \frac{-9x^2+6x-6}{(x^2-2x)^2}$$

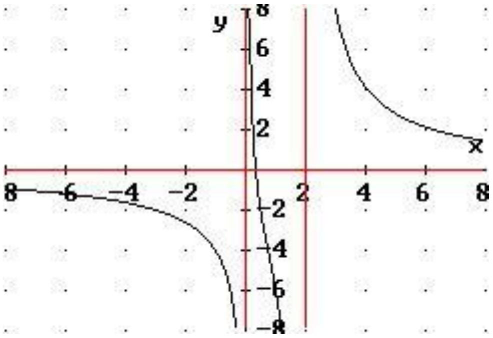
- Discontinuidades de f: $x = 0$ y $x = 2$ (no están en el dominio, como se dijo).
- Discontinuidades de f': Las mismas, porque anulan el denominador.
- $f'(x) = 0 \Rightarrow -9x^2 + 6x - 6 = 0 \Rightarrow$ (simplificando entre –3): $3x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-24}}{6} \Rightarrow$ no tiene soluciones.

Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos. Como estos puntos son sólo los que no pertenecen al dominio, nos queda éste:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	–	$\nexists$	–	$\nexists$	–
f	↘	$\nexists$	↘	$\nexists$	↘

La función siempre es decreciente y no tiene extremos relativos.

c) Con los datos obtenidos, esboza la gráfica de f.



La gráfica de f es la adjunta, dónde en rojo *se han trazado las dos asíntotas verticales y la horizontal.*

8) Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$

a) Calcular dominio, cortes con los ejes y asíntotas

- $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R}}$, porque e^x puede calcularse $\forall x$, y lo mismo ocurre con cualquier polinomio. Por tanto, el producto siempre puede calcularse.
- $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 \cdot 1 = 1$. Corta en $\boxed{(0, 1)}$.
- $y = 0 \Rightarrow 0 = e^x(x^2 - x + 1) \Rightarrow$ (Un producto vale 0 si, y sólo si se anula algún factor): $\begin{cases} e^x = 0, \text{ que no ocurre nunca, pues } e^x > 0, \forall x \\ x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}, \text{ sin solución} \end{cases}$

Por tanto, $\boxed{\text{no corta a OX}}$.

- Asíntotas verticales: $\boxed{\text{No tiene}}$, porque no presenta discontinuidades (es producto de funciones elementales con dominio R).
- Asíntotas horizontales: El comportamiento de la función exponencial es diferente en $+\infty$ y en $-\infty$. Los estudiamos por separado:

  $\lim_{x\to+\infty} e^x(x^2-x+1) = +\infty\cdot(+\infty) = +\infty$. $\boxed{\text{No tiene cuando } x \text{ tiende a } +\infty}$.

  $\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2-x+1) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1}{e^{-x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Esta indeterminación, a diferencia de la primera, puede resolverse aplicando la Regla de L'Hôpital, al tratarse del cociente de dos funciones derivables en todo R. Así, ya que:

  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{-e^{-x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}} = \left(\frac{2}{\infty}\right) = 0$$

  (donde se ha aplicado L'Hôpital otra vez), el límite inicial vale 0. Por tanto, la recta $\boxed{y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \text{ tiende a } -\infty}$.
- Asíntotas oblicuas: Sólo la estudiamos cuando x tiende a $+\infty$, porque por el otro lado volveríamos a obtener la asíntota horizontal que ya conocemos:

  $$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(x^2-x+1)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ (L'Hôpital)} =$$

  $$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(x^2-x+1)+e^x(2x-1)}{1} = \lim_{x\to+\infty} e^x(x^2+x) = +\infty\cdot(+\infty) = +\infty$$

  Luego $\boxed{\text{no tiene asíntotas oblicuas}}$. Y la función tiende a ponerse vertical cuando x tiende a $+\infty$, porque su pendiente tiende a hacerse infinita, como en las rectas verticales.

b) Estudiar la monotonía y extremos relativos

$$f'(x) = e^x(x^2-x+1) + e^x(2x-1) = \boxed{e^x(x^2+x)}$$

- Discontinuidades de f ó de f': No tiene, por ser ambas producto de una exponencial por una polinómica.
- $f'(x) = 0$: $e^x(x^2+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0, \text{ nunca} \\ x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ó } x=-1 \end{cases}$

  Por tanto:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
f'	+	0	–	0	+
f	↗	Mx	↘	mín	↗

  Luego es $\boxed{\textit{creciente} \text{ en } (-\infty,-1) \text{ y en } (0,+\infty), \text{ y } \textit{decreciente} \text{ en } (-1,0)}$.

  Si $x = -1 \Rightarrow f(-1) = e^{-1}(1+1+1) = 3/e$. $\boxed{\text{Máximo relativo en } (-1, 3/e)}$.

  Si $x = 0 \Rightarrow f(0) = e^0(0-0+1) = 1$. $\boxed{\text{Mínimo relativo en } (0, 1)}$.

c) Estudiar la curvatura y los puntos de inflexión

$f''(x) = e^x(x^2+x) + e^x(2x+1) = e^x(x^2+3x+1)$

- Discontinuidades de f, f' ó de f'': No tiene, por ser productos de una exponencial por una polinómica.
- $f''(x) = 0$: $e^x(x^2+3x+1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{x}=0, \text{ nunca} \\ x^{2}+3x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\left\langle \begin{matrix} =\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ =\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{matrix}\right. \end{cases}$$

Por tanto:

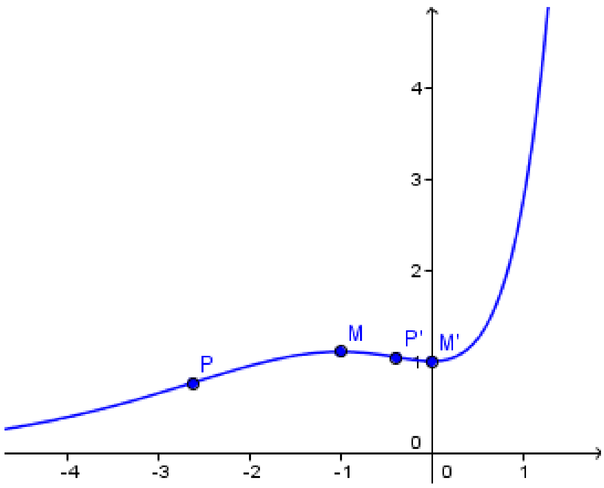
	$(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2})$	$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$	$(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$	$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$	$(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$
f''	+	0	–	0	+
f	∪ (convexa)	P.I.	∩ (cóncava)	P.I.	∪ (convexa)

Así, es *convexa* en $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2})$ y en $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, y *cóncava* en $(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$

Tiene puntos de inflexión en: $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\ 0.76\right)$ y en: $\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ 1.04\right)$

d) Esbozar la gráfica de f

Se han señalado el máximo relativo M, el mínimo relativo M', y los dos puntos de inflexión P y P'.



9) Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x + 3)e^{-x}$.

a) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

- Verticales: Al tratarse del producto de dos funciones continuas en $\mathbb{R}$, f es continua en $\mathbb{R}$, por lo que $\boxed{\text{no tiene asíntotas verticales}}$.
- Horizontales: El comportamiento de la función exponencial es diferente cuando avanzamos a $-\infty$ que cuando lo hacemos hacia $+\infty$. Por tanto, distinguimos los límites:

$$\lim_{x\to-\infty}(x+3)e^{-x}=(-\infty\cdot e^{+\infty}=-\infty\cdot(+\infty))=-\infty \Rightarrow \boxed{\text{No tiene cuando } x\to-\infty}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+3)e^{-x}=(-\infty\cdot e^{-\infty}=-\infty\cdot 0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{e^{x}}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=$$

Con el cambio que hemos hecho, tenemos el cociente de dos funciones derivables con una de las indeterminaciones que se puede abordar por L'Hôpital:

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=\left(\frac{1}{+\infty}\right)=0 \Rightarrow \boxed{\text{La recta } y=0 \text{ es a. horizontal con } x\to+\infty}.$$

- Oblicuas: Cuando $x \to +\infty$, tiene asíntota horizontal, por lo que si intentamos calcular una oblicua obtendríamos la horizontal que ya conocemos. Estudiamos sólo el comportamiento cuando $x \to -\infty$. La asíntota, de existir, sería $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x+3)e^{-x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}, \text{L' Hôpital}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x} - (x+3)e^{-x}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (1 - x - 3)e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} (-x-2)e^{-x} = (-\infty\cdot(+\infty)) = -\infty$$

Por lo que $\boxed{\text{no tiene asíntotas oblicuas}}$.

Tenemos información adicional: Cuando $x \to -\infty$, la función se va al $-\infty$ (nos lo dice el resultado que obtuvimos al calcular la asíntota horizontal correspondiente) y, además, tiende a ponerse vertical, porque su pendiente se hace ∞, según este último cálculo.

b) Determinar los extremos relativos de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

$f'(x) = e^{-x}(-x-2)$

$f''(x) = -e^{-x}(-x-2) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(x+2-1) = e^{-x}(x+1)$

Al ser continua y derivable, sus extremos relativos estarán donde se anule la derivada:

$e^{-x}(-x-2) \Rightarrow$ (e^{-x} no se anula nunca) $-x-2=0 \Rightarrow x=-2$

$f''(-2) = e^2(-2+1) = -e^2 < 0 \Rightarrow$ Es un máximo. Sus coordenadas son:

$$f(-2) = (-2+3)e^2 = e^2$$

Luego tiene un único $\boxed{\text{máximo relativo en } (-2, e^2)}$.

Por ser continua e indefinidamente derivable, su punto de inflexión lo obtendremos al anular f'':

$e^{-x}(x+1) = 0 \Rightarrow$ (e^{-x} no se anula nunca) $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

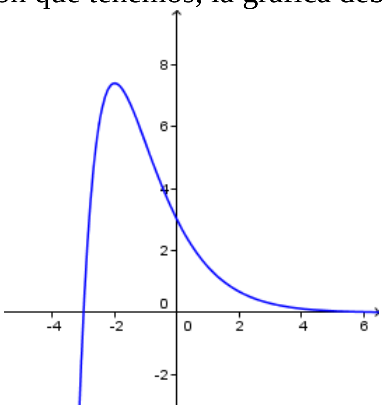
Dado que $f'''(x) = -e^{-x}(x+1) + e^{-x} = e^{-x}(-x-1+1) = -x\,e^{-x} \Rightarrow f'''(-1) = -e \neq 0 \Rightarrow$ Es un $\boxed{\text{punto de inflexión: } (-1, 2e)}$.

c) Esbozar la gráfica de f.

Hallamos los cortes con los ejes de coordenadas:

- $x = 0 \Rightarrow y = 3$: $\boxed{(0, 3)}$.
- $y = 0 \Rightarrow (x+3)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -3$: $\boxed{(-3, 0)}$.

Usando toda la información que tenemos, la gráfica debe ser:



10) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

a) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

- <u>Asíntotas verticales</u>: No tiene, porque f es continua en R (producto de dos elementales cuyo dominio es R).
- <u>Asíntotas horizontales</u>: La función exponencial tiene diferente comportamiento en $-\infty$ y en $+\infty$. Pero en nuestra función, al tomar límites cuando $x \to \infty$, como en el exponente de e la x está al cuadrado, dará el mismo resultado en $-\infty$ y en $+\infty$. Así:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \left((+\infty)e^{-\infty} = \infty \cdot 0\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Tenemos un cociente de funciones derivables con una de las indeterminaciones en las que es aplicable L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$

Por tanto, el límite original vale lo mismo, con lo que la recta $\boxed{y = 0}$ es <u>asíntota horizontal</u>.
- <u>Asíntotas oblicuas</u>: Si intentamos calcularla, volveremos a obtener la misma asíntota horizontal que ya tenemos.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcular sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} - x^2 2xe^{-x^2} = 2xe^{-x^2}(1 - x^2)$$

- <u>Discontinuidades de f ó de f'</u>: No hay.
- <u>$f'(x) = 0$</u>: $2xe^{-x^2}(1-x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0; \text{ ó :} \\ e^{-x^2} = 0, \text{ imposible; ó :} \\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1 \end{cases}$

Dividimos R (el dominio) en intervalos mediante los puntos obtenidos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	+	0	–	0	+	0	–
f	↗	Mx	↘	mín	↗	Mx	↘

$\boxed{\text{Es } \textit{creciente} \text{ en } (-\infty, -1) \text{ y en } (0, 1), \text{ y } \textit{decreciente} \text{ en } (-1, 0) \text{ y en } (1, +\infty)}$.

- $f(-1) = e^{-1} \Rightarrow \boxed{\text{Máximo relativo en } (-1, e^{-1})}$.
- $f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{mínimo relativo en } (0, 0)}$.
- $f(1) = e^{-1} \Rightarrow \boxed{\text{Máximo relativo en } (1, e^{-1})}$.

c) Esbozar la gráfica de f.

La función es, claramente, *par*. Y sólo corta a los ejes en (0, 0). Usando la información previamente obtenida, podemos esbozar la gráfica.