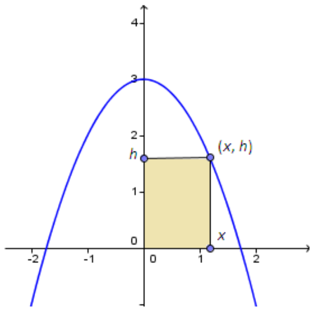
## PROBLEMAS RESUELTOS DE EXTREMOS ABSOLUTOS (OPTIMIZACIÓN)

1) En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y = -x^2 + 3$. Determinar las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.




Supongamos que $(x, h)$ son las coordenadas del vértice del rectángulo que está en la parábola. Entonces, la base mide $x$ (distancia desde el origen hasta el lugar del eje OX donde situamos $x$), y la altura, $h$.
Nos limitamos al primer cuadrante, según el enunciado. Como $(x, h)$ está en la parábola, verifica su ecuación, es decir: $h = -x^2 + 3$. Por tanto, el área del rectángulo (base · altura) será, en función de $x$:

$$f(x) = x(-x^2 + 3) = -x^3 + 3x$$

Lo mínimo que puede valer $x$ es 0, en cuyo caso el rectángulo tendría área 0 y estaría superpuesto al segmento que va desde el origen hasta el vértice de la parábola. Y lo máximo será el valor del corte de la parábola con la parte positiva del eje OX. Calculemos dicho valor:

$$-x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Es decir, el máximo valor posible es $\sqrt{3}$. Por tanto, nuestro esfuerzo se centrará en maximizar $f(x) = -x^3 + 3x$, con $x \in [0, \sqrt{3}]$.
Y lo haremos estudiando su monotonía.

$$f'(x) = -3x^2 + 3$$

- Discontinuidades de $f$ ó de $f'$: No tiene, pues ambas son polinómicas.
- $f'(x) = 0$: $-3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ (ignoramos $x = -1$, porque no está en el dominio).

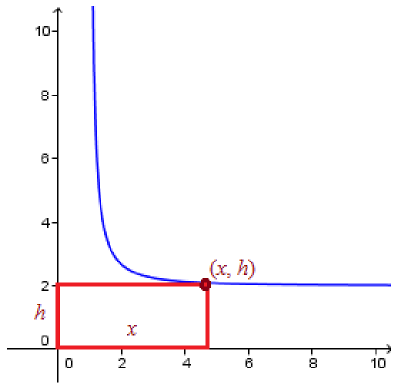
Por tanto:

| | (0, 1) | 1 | (1, $\sqrt{3}$ ) |
|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | – |
| $f$ | ↗ | Mx | ↘ |

El máximo relativo está en (1, 2), pues $f(1) = -1 + 3 = 2$ (recordar que $f$ da el área del rectángulo). Por la forma de la función, este máximo relativo también lo es absoluto, pues al no haber discontinuidades, la función no puede ir más arriba. Por idénticos razonamientos, el mínimo absoluto estará en alguno, o ambos, de los extremos del dominio. Pero sólo nos piden el máximo absoluto.
Cuando $x = 1$, que es la solución obtenida, la altura valdrá $h = -x^2 + 3 = -1 + 3 = 2$.
En conclusión:

El rectángulo de área máxima mide 1 $u$ de base y 2 $u$ de altura, siendo su área de 2 $u^2$.

2) De entre todos los rectángulos que tienen uno de sus vértices en el origen de coordenadas, el opuesto de este vértice en la curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$ $(x > 1)$, uno de sus lados situado sobre el semieje positivo de abscisas y otro lado sobre el semieje positivo de ordenadas, halla el que tiene área mínima.
Llamemos $x$ a la base, $h$ a la altura del rectángulo.
Por las condiciones del enunciado, $x > 1$ y no está acotada superiormente.




Como el punto $(x, h)$ está en la gráfica de la curva dada, se tiene que $h = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$. De modo que el área del rectángulo (*base* · *altura*), en función de $x$, vendrá dada por la función:

$$f(x) = x\cdot\frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{2x^3}{x^2-1},\quad x \in (1, +\infty)$$

que es a quien tendremos que calcularle su mínimo absoluto. Lo haremos analizando su monotonía:

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2-1)-2x^3 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x^4-6x^2-4x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^4-6x^2}{(x^2-1)^2}$$

- Discontinuidades de $f$ ó de $f'$: No tiene en $(1, +\infty)$. Sólo serían $-1$ y $1$ (anulan el denominador), que no están en el dominio.
- $f'(x) = 0$: $2x^4 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \notin (0, +\infty)$ ó $2x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = -\sqrt{3} \notin (0, +\infty)$ ó $x = \sqrt{3}$.

Por tanto:

| | $(1, \sqrt{3})$ | $\sqrt{3}$ | $(\sqrt{3}, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | – | 0 | + |
| $f$ | ↘ | mín | ↗ |

Dada la forma de la función, el mínimo relativo hallado también es mínimo absoluto. Además:

- $x = \sqrt{3} \Rightarrow h = \dfrac{2\cdot 3}{3-1} = \dfrac{6}{2} = 3$
- $f(\sqrt{3}) = \dfrac{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{3-1} = 3\sqrt{3}$

$\boxed{\text{El rectángulo de área mínima tiene } \sqrt{3}\ u \text{ de base, } 3\ u \text{ de altura y } 3\sqrt{3}\ u^2 \text{ de área}}$.

3) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función derivable definida por

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{b}{x} + \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Calcular $a$ y $b$. *(1 punto)*

- $y = a - x$ es continua en todo $\mathbb{R}$ (es polinómica) $\Rightarrow$ en particular, lo es en el intervalo $(-\infty, 1)$.
- $y = \dfrac{b}{x} + \ln x$ es continua en $(0, +\infty)$, pues ahí lo es $\ln x$ y el primer sumando sólo tiene discontinuidad en 0. Por tanto, lo es en $(1, +\infty)$.
- Para ser derivable también tiene que ser continua en $x = 1$, que es el único punto que nos falta. Y ello exige la coincidencia de:
  1) $f(1) = a - 1$
  2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (a-x) = a - 1$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{b}{x} + \ln x\right) = b$

Luego será continua en todo $\mathbb{R}$ si, y sólo si $\boxed{a - 1 = b}$. (1)

Aplicando las fórmulas de derivación, lo que puede hacerse en intervalos abiertos, tenemos:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -\dfrac{b}{x^2} + \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Si $x > 1$, según la expresión obtenida, $f$ no sería derivable en $x = 0$. Pero dicho valor no está en la zona $x > 1$, por lo que $f$ es derivable en R – {1}. Para que sea derivable en todo R, lo que sabemos que ocurre, debe ser $f'(1^-) = f'(1^+) \Leftrightarrow -1 = -b + 1 \Rightarrow \boxed{b = 2}$. Y sustituyendo en (1):

$$a - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{a = 3}.$$

b) Para $a = 3$ y $b = 2$ calcular los extremos absolutos de $f$ en el intervalo $[0, e]$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). *(1,5 puntos)*

Son los valores anteriores, para los que sabemos que $f$ es continua y derivable. Por tanto, los extremos absolutos los encontraremos en los extremos relativos o en los extremos del intervalo, que es, en este caso $[0, e]$.

Del apartado anterior, tenemos la expresión definitiva de $f'$, que no hemos escrito (añadimos la existencia de $f'(1)$):

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Como no hay discontinuidades ni en $f$ ni en $f'$, ésta última sólo puede cambiar de signo al atravesar el punto donde se anule.

- Si $x \le 1$ se tiene que $f'(x) = -1$, con lo que nunca se anula.
- Si $x > 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2 + x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (no anula el denominador)

No nos hace falta estudiar la monotonía ni la forma de la función, porque nos da igual que en 2 haya un máximo o un mínimo relativo: los extremos absolutos los detectaremos comparando las imágenes de los puntos candidatos: 0, $e$ y 2 (extremos relativos y extremos del intervalo de definición, pues no hay discontinuidades ni de $f$ ni de $f'$). Aún así, escribimos el cuadro de monotonía, por ilustrar cómo se haría:

| | (0, 2) | 2 | (2, *e*) |
|---|---|---|---|
| $f'$ | – | 0 | + |
| $f$ | ↘ | mín | ↗ |

Así que el mínimo (relativo y absoluto, según la forma de la función) está en 2. Reiteramos que no nos hubiera hecho falta el estudio de la monotonía. Como:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{2}{x} + \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- $f(0) = 3$
- $f(2) = 1 + \ln 2 \approx 1.69$
- $f(e) = \dfrac{2}{e} + 1 \approx 1.74$

Lo que significa que:

$\boxed{\text{El máximo absoluto está en } (0, 3) \text{ y el mínimo absoluto en } (2, 1 + \ln 2)}$.

4) Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 80 $cm^3$. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1€ / $cm^2$ y para la base se emplea un material un 50% más caro. Hallar las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo. *(2,5 puntos)*

Se trata de construir un prisma de base cuadrada (ortoedro). Llamemos $x$ al largo y al ancho, y $h$ a la altura. Ambos, en cm.

- El área de la base será $x^2$. Su coste, $1{,}5x^2 = \frac{3}{2}x^2$.
- El área de la tapadera será, igualmente, $x^2$. Su coste, $x^2$.
- El área lateral será la suma del área de 4 rectángulos de dimensiones $x \times h$. Es decir, sumará $4xh$. Su coste será $4xh$.
- El volumen será $x \cdot x \cdot h = 80 \Rightarrow h = 80/x^2$.

Como consecuencia de lo cual, el coste total será:

$$\frac{3}{2}x^2 + x^2 + 4x\frac{80}{x^2} = \frac{3x^2}{2} + x^2 + \frac{320}{x} = \frac{3x^3 + 2x^3 + 640}{2x} = \boxed{\frac{5x^3 + 640}{2x} = f(x)}$$

que será la función a *minimizar*.

El dominio de la función será $(0, +\infty)$, pues el lado de la base no puede llegar a 0 si queremos construir el prisma, ni ser negativo. Y podría crecer indefinidamente, disminuyendo la altura en consecuencia.

Estudiemos la monotonía de esta función.

$$f'(x) = \frac{15x^2 2x - 2(5x^3 + 640)}{4x^2} = \frac{30x^3 - 10x^3 - 1280}{4x^2} = \frac{20x^3 - 1280}{4x^2} = \boxed{\frac{5x^3 - 320}{x^2}}$$

- Discontinuidades de $f$ o de $f'$: $x = 0$, que no está en el dominio.
- $f'(x) = 0$: $5x^3 - 320 = 0 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$.

Por tanto:

| | (0, 4) | 4 | (4, +∞) |
|---|---|---|---|
| $f'$ | – | 0 | + |
| $f$ | ↘ | mín | ↗ |

Lo que significa que, dada la forma de la función, el mínimo relativo encontrado también es absoluto. Las dimensiones de la caja serán, pues:

Base: Un cuadrado de 4 cm de lado.
Altura: $h = 80/4^2 = 5$ cm.
Coste (no se pide): $f(4) = \frac{5 \cdot 4^3 + 640}{2 \cdot 4} = 120$ €.

5) Sea $f$ la función definida por $f(x) = \frac{1}{2x} + \ln x$ para $x > 0$ (ln denota el logaritmo neperiano).

a) Determina el punto de la gráfica de $f$ en el que la pendiente de la recta tangente es máxima. *(1,5 puntos)*

La pendiente en $(x, f(x))$ es, según la *Interpretación Geométrica de la Derivada*, $m = f'(x)$. O sea:

$$m = f'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1 + 2x}{2x^2}$$

Esta pendiente varía, evidentemente, con $x$. Es una función de $x$ a la que vamos a llamar $g(x)$. Así, buscamos el valor de $x$ que produce el *máximo absoluto* de la función:

$$g(x) = \frac{2x-1}{2x^2} \quad \text{con } x \in (0, +\infty)$$

por ser el intervalo indicado el Dom($f$) y para cuyos valores existe, también, $g(x)$. Buscaremos los extremos absolutos a través del estudio de la monotonía de $g$:

$$g'(x) = \frac{2\cdot 2x^2 - (2x-1)4x}{(2x^2)^2} = \frac{4x^2 - 8x^2 + 4x}{4x^4} = \frac{-4x^2 + 4x}{4x^4} = \frac{4(-x^2 + x)}{4x^4} =$$

$$\frac{-x^2 + x}{x^4} = \frac{-x+1}{x^3}$$

- Discontinuidades de $g$ ó $g'$: No tiene.
- $g'(x) = 0$: $-x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Así:

| | (0, 1) | 1 | (1, +∞) |
|---|---|---|---|
| $g'$ | + | 0 | – |
| $g$ | ↗ | Máx | ↘ |

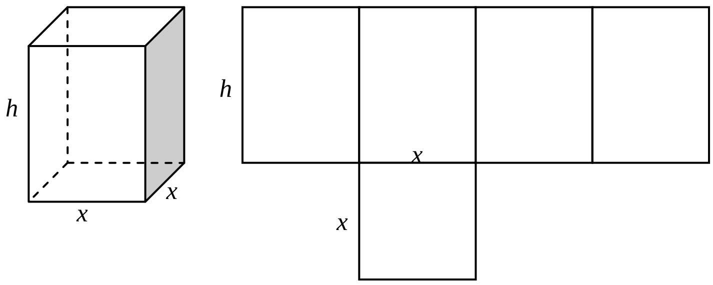
La forma de la función nos dice que este máximo relativo también es absoluto. Así, $\boxed{\text{la pendiente máxima se obtiene cuando } x = 1 \text{ y vale } m = g(1) = 1/2}$.

b) Hallar la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 1$. *(0,5 puntos)*

- Punto de tangencia: $x = 1 \Rightarrow f(1) = ½$: (1, ½).
- Pendiente de la *tangente*: $m = ½$ (del apartado anterior)
- Pendiente de la *normal*: $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{1/2} = -2$
- Recta *normal*: Usando la ecuación punto-pendiente la obtenemos.

$$y - ½ = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2 + ½ \Rightarrow \boxed{y = -2x + \frac{5}{2}}$$

6) Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13'5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el mínimo posible.




Hemos dibujado el depósito y su desarrollo.

El volumen del depósito es el área de la base por la altura. Por tanto, según el enunciado:

$$x^2 h = 13{,}5 \Rightarrow h = \frac{13{,}5}{x^2}$$

El mínimo valor posible para $x$ es 0, exclusive (desaparecería la base y la altura debería ser infinita). El máximo, sería infinito, tendiendo la altura a valer 0. Es decir:

$$x \in (0, +\infty)$$

Hay que minimizar el área lateral que, en función de $x$, será:

$$f(x) = 4xh + x^2 = 4x\frac{13{,}5}{x^2} + x^2 = x^2 + \frac{54}{x} = \frac{x^3+54}{x}$$

Luego el problema consiste en calcular el mínimo absoluto de $f(x) = \dfrac{x^3+54}{x}$, con $x \in (0, +\infty)$.

La función $y = \dfrac{x^3+54}{x}$, por ser elemental, es continua en su dominio, que es R – {0} $\Rightarrow$ $f$ es continua en todo su dominio, que es $(0, +\infty)$. Además:

$$f'(x) = \frac{3x^2x-(x^3+54)}{x^2} = \frac{3x^3-x^3-54}{x^2} = \frac{2x^3-54}{x^2}$$

que también es continua en $(0, +\infty)$, por la misma razón. Luego tenemos una función $f$ que es continua y derivable en su dominio. Por ello, sus extremos absolutos sólo pueden estar en los extremos de dicho dominio o coincidir con un extremo relativo. Calculemos éstos.

- *Discontinuidades de $f$ ó $f'$*: No tienen, como hemos comentado.
- $f'(x) = 0$: $2x^3 - 54 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$

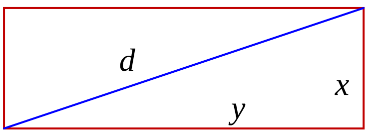
| | (0, 3) | 3 | (3, +∞) |
|---|---|---|---|
| $f'$ | – | 0 | + |
| $f$ | ↘(decrec) | mín | ↗(crec) |

Luego el mínimo relativo está en $x = 3$ y vale $f(3) = \dfrac{27+54}{3} = 27$

Por la forma de la función, decreciente desde el comienzo hasta el punto y creciente después, el mínimo relativo también es absoluto. Es, entonces, el punto que buscamos. La solución es:

$$\boxed{\text{Largo y ancho: } 3m. \quad \text{Altura: } \frac{13'5}{9} = 1'5\ m. \quad \text{Área lateral total: } 27\ m^2}$$

7) Ejercicio 1.- [2'5 puntos] De entre todos los rectángulos de perímetro 8 cm, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.




Se trata de minimizar la diagonal del rectángulo, cuyo valor por el Teorema de Pitágoras es: $d = \sqrt{x^2+y^2}$. Como el perímetro del rectángulo es 8 $\Rightarrow$ $2(x+y) = 8$ $\Rightarrow$ $y = 4 - x$.

Luego la función a minimizar es:

$$f(x) = \sqrt{x^2+(4-x)^2} = \sqrt{x^2+16-8x+x^2} = \sqrt{2x^2-8x+16}$$

Como $x$ e $y$ son la base y altura de un rectángulo, ambas deben ser mayores o iguales que 0:

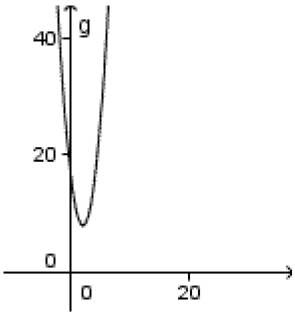
$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \Rightarrow 4-x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow x \in [0, 4]$$

Además, para que exista la raíz cuadrada de la función, el radicando debe ser mayor o igual que cero. Es decir, $2x^2 - 8x + 16 \geq 0$. Para resolver esta ecuación tenemos en cuenta que $y =$

$2x^2 - 8x + 16$ es una parábola que se abre hacia arriba (con un mínimo relativo), ya que el coeficiente de $x^2$ es positivo, y su corte con OX serían las soluciones de:

$$0 = 2x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 128}}{4}$$

que no tiene solución. Es decir, que no corta a OX. Por tanto, se mantiene siempre encima de dicho eje, con lo que todos los resultados, cualquiera que sea $x$, son positivos. Así que el dominio de $f$ es todo R (ver gráfico adjunto).




Luego hemos de buscar el mínimo absoluto de $f(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 16}$ con $x \in [0, 4]$

El procedimiento general (riguroso) consiste en comparar las imágenes (o límites) en los siguientes tipos de puntos. Donde esté la mayor imagen tendremos el máximo absoluto, y la menor imagen da el mínimo:

- Extremos del dominio: $x = 0$, $x = 4$.
- Discontinuidades de $f$: No tiene.
- Discontinuidades de $f\,'$: Tampoco tiene, porque:

$$f\,'(x) = \frac{4x - 8}{2\sqrt{2x^2 - 8x + 16}} = \frac{2x - 4}{\sqrt{2x^2 - 8x + 16}}$$

  y sabemos que la raíz existe siempre y no se anula el denominador.
- $f\,'(x) = 0$: $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Como $f(0) = \sqrt{16} = 4$; $f(4) = \sqrt{16} = 4$; $f(2) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ La máxima imagen se obtiene para $x = 0$ y para $x = 4$, valores donde tenemos, entonces, el máximo absoluto (que vale 4). La mínima imagen la produce $x = 2$, por lo que aquí tenemos el mínimo absoluto, que vale $2\sqrt{2}$.

La respuesta al problema es, entonces:
Altura = $x = 2$
Base = $y = 4 - x = 2$
Diagonal = $2\sqrt{2}$.

El procedimiento abreviado, que la mayoría de las veces suele proporcionarnos la respuesta, consiste en calcular el mínimo relativo, en la esperanza de que coincida con el mínimo absoluto (no siempre es así). En este problema sería así:

$$f\,'(x) = 0: \quad 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2, \text{ según hemos visto.}$$

Comprobamos que es un mínimo (relativo). Para ello precisamos la derivada segunda:

$$f\,''(x) = \frac{2\sqrt{2x^2 - 8x + 16} - (2x - 4)\dfrac{2x - 4}{2\sqrt{2x^2 - 8x + 16}}}{2x^2 - 8x + 16} =$$

$$\frac{2(2x^2 - 8x + 16) - (2x - 4)^2}{(2x^2 - 8x + 16)\sqrt{2x^2 - 8x + 16}} =$$

$$= \frac{4x^2 - 16x + 32 - 4x^2 - 16 + 16x}{(2x^2 - 8x + 16)\sqrt{2x^2 - 8x + 16}} = \frac{16}{(2x^2 - 8x + 16)\sqrt{2x^2 - 8x + 16}}$$

Por tanto, $f\,''(2) > 0 \Rightarrow$ En $x = 2$ hay un mínimo relativo, lo que nos produce la solución obtenida antes (pero no hemos asegurado que es un mínimo absoluto).

8) Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Este tipo de problemas consiste en una función que hay que optimizar (hallar su máximo o mínimo absoluto). Dicha función puede ser de más de una variable, en cuyo caso nos darán una condición que relacione dichas variables, de manera que transformemos la función para que sea de una sola variable.

Sean $x$ e $y$ los dos números. Como $x+y = 10 \;\Rightarrow\; y = 10–x$.

Hay que maximizar el producto $x^2y^2 = x^2(10–x)^2$. Es decir, la función de la que hay que calcular el máximo absoluto es $f(x) = x^2(10–x)^2$

Además, como tanto $x$ como $10–x$ deben ser positivos, $x\in[0, 10]$

Su derivada vale: $f'(x) = 2x(10–x)^2 + x^2 2(10–x)(–1) = 2x(10–x)[(10–x) – x] = 2x(10–x)(10–2x)$

Seguimos el procedimiento general, consistente en calcular los siguientes puntos:

a) Extremos del intervalo: 0 y 10.
b) Discontinuidades de $f$: No tiene, por ser polinómica.
c) Discontinuidades de $f'$: Tampoco.
d) Puntos que anulan $f'$: $2x(10–x)(10–2x)=0$ $\Rightarrow$ como un producto vale 0 si, y sólo si, alguno de los factores se anula, debe ser: $2x=0$ (cuya solución es $x=0$) ó $10–x=0$ (cuya solución es $x=10$) ó $10–2x = 0$ (cuya solución es $x=5$)

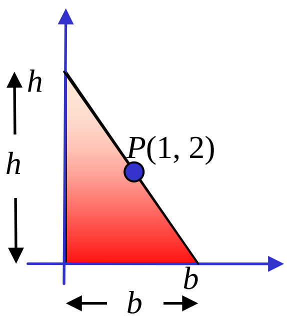
Comparamos el comportamiento de $f$ en cada uno de los puntos obtenidos (imágenes o límite):

$$f(0) = 0 \qquad f(10) = 0 \qquad f(5) = 625$$

Tanto el máximo como el mínimo absoluto, si se alcanzan, están entre estos puntos. Como el mayor resultado es 625, éste es el máximo absoluto, y se alcanza en $x = 5$. El procedimiento también nos ha dado el mínimo absoluto, que es 0, y que se alcanza en $x = 0$ y en $x = 10$.

La solución es que los números son $x = 5$ y $10–x = 5$, y el producto máximo es 625.

9) De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto (1, 2), encontrar aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Hallar el área de dicho triángulo. *(2,5 puntos)*




Consideremos todas las rectas que pasan por $P(1, 2)$. Estas rectas determinan el triángulo. Tienen de ecuación:

$$y – 2 = m(x – 1)$$

La base $b$ del triángulo la obtenemos al cortar esta recta al eje OX, que lo hace en el punto

$$y = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-2}{m} + 1 = \frac{m-2}{m} \;\Rightarrow\; \left(\frac{m-2}{m},\ 0\right)$$

Y la altura $h$ al cortar al eje OY, en:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; y = –m + 2 \;\Rightarrow\; (2 – m, 0)$$

Como dicha recta debe ser descendente para que se forme el triángulo (o sea, con pendiente negativa) su inclinación va desde la vertical (pendiente infinita, en este caso $–\infty$, porque todas las pendientes son negativas) hasta la horizontal (pendiente 0). Por tanto, $\boxed{m \in (–\infty, 0)}$.

Hay que hallar minimizar el área del triángulo que se forma. Dicha área es:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{\frac{m-2}{m}(2-m)}{2} = \frac{(m-2)[-(m-2)]}{2m} = -\frac{(m-2)^2}{2m}$$

El área varía con la recta, que varía con $m$. Luego es función de $m$. El problema, finalmente, consiste en hallar el *mínimo absoluto* de:

$$f(m) = -\frac{(m-2)^2}{2m}, \text{ con } m \in (-\infty, 0)$$

La forma rigurosa de hacerlo es comparar las imágenes o límites de:

- Extremos del dominio: $-\infty$; 0.
- Discontinuidades de $f$: 0 (anula el denominador. Y hay que considerarlo, aunque no esté en el dominio, pues las discontinuidades nunca están en el dominio).
- Discontinuidades de $f'$:

$$f'(m) = -\frac{2(m-2)2m-(m-2)^2 2}{4m^2} = -\frac{4m^2-8m-2m^2+8m-8}{4m^2} =$$

$$= -\frac{2m^2-8}{4m^2} = -\frac{m^2-4}{2m^2} = \frac{4-m^2}{2m^2}$$

La única discontinuidad está en $m = 0$, que anula el denominador.

- $f'(m) = 0$: $m = \pm 2$. Pero sólo está en el dominio $m = -2$.

Comparamos imágenes o límites (cuando no se pueda calcular la imagen o en los puntos de discontinuidad) de los puntos obtenidos:

- $m = 0$: $\lim_{m\to 0^-} -\frac{(m-2)^2}{2m} = \left(-\frac{4}{0}\right) = +\infty$ (el numerador siempre es +, por ser un cuadrado).
- $m \to -\infty$: $\lim_{m\to-\infty} -\frac{(m-2)^2}{2m} = \lim_{m\to-\infty} -\frac{m^2-4m+4}{2m} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{m\to-\infty} -\frac{m^2}{2m} =$

  $\lim_{m\to-\infty} -\frac{m}{2} = +\infty$
- $m = -2$: $f(-2) = -\frac{(-4)^2}{-4} = 4$

De modo que la función que da el área del triángulo no tiene máximo absoluto ni supremo, puesto que crece hasta $+\infty$, y su mínimo absoluto es 4, alcanzado para $m = -2$.

La recta pedida es:

$$y - 2 = -2(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = -2x + 4}$$

y $\boxed{\text{el área correspondiente es de } 4\ u^2}$.

De otras formas

Ponemos dos nuevas formas distintas de abordar el problema, procedentes de dos alumnas.

La primera de ellas proviene de Dª **María Ramblado Valiente**:

Con el mismo dibujo anterior, procedemos como sigue. Tenemos que hallar $b$ y $h$ para obtener el triángulo de área mínima. Como la recta que nos piden debe pasar por los puntos $(b, 0)$ y $(0, h)$, su fórmula será:

$$\frac{x-b}{0-b} = \frac{y-0}{h-0} \Rightarrow h(x-b) = -yb \Rightarrow y = \frac{h(b-x)}{b}$$

Como esta recta pasa por el punto $(1, 2)$:

$$2 = \frac{h(b-1)}{b} \Rightarrow 2b = h(b-1) \Rightarrow h = \frac{2b}{b-1} \qquad (1)$$

Ésta es la restricción que relaciona $b$ y $h$. Además, para que se forme el triángulo, la base debe oscilar desde $b = 1$, que hace que la recta sea vertical, hasta acercarse a $+\infty$. La función a minimizar es el área del triángulo que se forma, cual es:

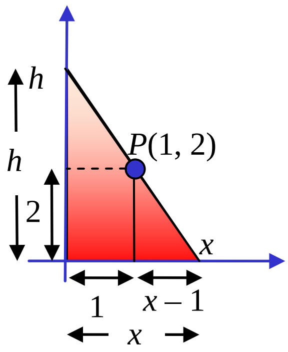
$$Área = \frac{bh}{2} = \frac{b\frac{2b}{b-1}}{2} = \frac{2b^2}{2(b-1)} = \frac{b^2}{b-1}$$

donde hemos utilizado la relación (1) entre $b$ y $h$ para reducirla a una función de una única variable, que es $b$ con $b \in (1, +\infty)$. La función a minimizar es, pues:

$$f(b) = \frac{b^2}{b-1}, \text{ con } b \in (1, +\infty)$$

Completamos la resolución después de exponer el segundo planteamiento, que llega a la misma función pero de otra manera.

Esta idea se debe a Dª **Ana Aguilar Sánchez**:




Llamando $x$ a la base del triángulo cuya área tenemos que minimizar, para que se pueda formar el triángulo debe ser $x \in (1, +\infty)$, el punto $P(1, 2)$ forma un nuevo triángulo, cuyos vértices son él mismo, su proyección vertical sobre el eje OX, de coordenadas $(1, 0)$ y el punto de coordenadas $(x, 0)$. Este nuevo triángulo, cuya base mide $x – 1$ y su altura $2$, es semejante al triángulo principal, de base $x$ y altura $h$, por lo que (también por tg $\alpha$, siendo $\alpha$ el ángulo del vértice situado en el punto $(x, 0)$):

$$\frac{h}{x} = \frac{2}{x-1} \Rightarrow h = \frac{2x}{x-1}$$

La función a minimizar es el área del triángulo que se forma, que es:

$$Área = \frac{xh}{2} = \frac{x\frac{2x}{x-1}}{2} = \frac{2x^2}{2(x-1)} = \frac{x^2}{x-1}$$

que ya es función de una sola variable. Por tanto, hay que minimizar:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}, \text{ con } x \in (1, +\infty)$$

Ésta es la misma función a la que llegamos en el planteamiento anterior, solo que allí se llamaba $b$ a lo que aquí es $x$. Terminamos de resolverlo.
Derivamos la función:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

En lugar de realizar el procedimiento anterior, de comparar imágenes o límites de los cuatro tipos de puntos (extremos del dominio, discontinuidades de $f$, de $f'$, y puntos que anulan $f'$), vamos a estudiar la monotonía de $f$:

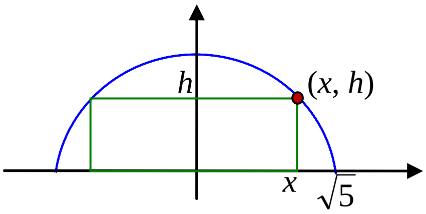
- Discontinuidades de $f$ ó $f'$: $x = 1$, que es donde comienza el dominio.
- $f'(x) = 0 \Rightarrow x(x – 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ (que no está en el dominio) ó $x = 2$.

| | (1, 2) | 2 | (2, +∞) |
|---|---|---|---|
| $f'$ | – | 0 | + |
| $f$ | ↘ | mín | ↗ |

Por la forma de la gráfica, el mínimo relativo también es absoluto. Por tanto, <u>el mínimo de la función se obtiene en $x = 2$ y vale $f(2) = 4\ u^2$</u>.
La ecuación de la recta pedida, como pasa por $(2, 0)$ y $(1, 2)$, es:

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-0}{2-0} \Rightarrow \boxed{y=-2x+4}$$

10) Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de $\sqrt{5}$ cm de radio, de forma que uno de sus lados está contenido en el diámetro del semicírculo y el lado opuesto tiene sus vértices sobre la semicircunferencia. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que es el de mayor perímetro posible.




Consideremos el semicírculo centrado en un sistema de coordenadas. La ecuación general de una circunferencia de centro $(a, b)$ y radio $r$ es:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Por tanto, la de nuestra circunferencia es $x^2+y^2=5$. Y como sólo tomamos la parte que está por encima del eje OX, es: $y=\sqrt{5-x^2}$.

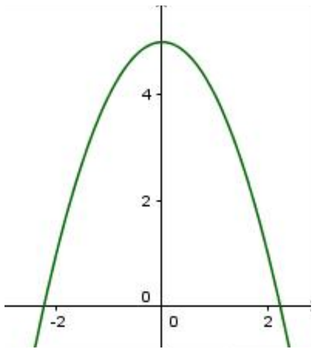
Tomemos el rectángulo inscrito de base $2x$ y altura $h$. El punto $(x, h)$ se encuentra sobre la semicircunferencia, variando $x$ entre $0$ y $\sqrt{5}$. Como esto es así, hemos tenido que recurrir a dibujar la situación en un sistema cartesiano, y a determinar la ecuación de la curva que describe el punto $(x, h)$.

El perímetro de este rectángulo es $4x+2h$. Estamos ante una función dependiente de dos variables. Pero como $(x, h)$ está sobre la semicircunferencia, hay una restricción que las relaciona, que es la ecuación de ésta. Así:

$$h=\sqrt{5-x^2} \Rightarrow \text{El perímetro es: } 4x+2\sqrt{5-x^2}.$$

En definitiva, hemos de *maximizar* $f(x)=4x+2\sqrt{5-x^2}$, con $x \in [0, \sqrt{5}]$.

- Extremos del dominio: $0$; $\sqrt{5}$.
- Discontinuidades de $f$: La función es continua cuando $5-x^2 \geq 0$. Llamando $y=5-x^2$ y dibujándola, estamos ante una parábola cóncava (ver gráfico), que corta a OX en $(-\sqrt{5}, 0)$ y $(\sqrt{5}, 0)$. Luego los valores de $x$ que hacen que $y$ (por tanto, $5-x^2$) sea positivo son $x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$. El dominio de $f$ está dentro de este intervalo, por lo que $f$ no tiene discontinuidades.




- Discontinuidades de $f'$: $f'(x)=4+2\dfrac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}}=4-\dfrac{2x}{\sqrt{5-x^2}}$. En el dominio, no tiene discontinuidades.
- $f'(x)=0$: $\dfrac{2x}{\sqrt{5-x^2}}=4 \Rightarrow x=2\sqrt{5-x^2} \Rightarrow x^2=4(5-x^2)=20-4x^2 \Rightarrow$ $5x^2=20 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$, que ambas resuelven la ecuación (recordar que cuando se elevan los dos miembros de una ecuación al cuadrado es obligatorio comprobar las soluciones para ver si son válidas), pero que sólo $x=2$ está en el dominio.

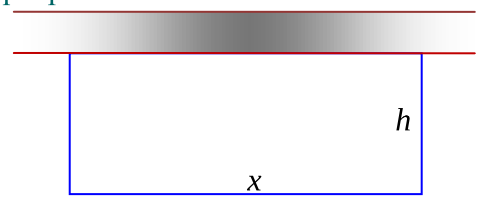
Comparamos las imágenes o límites (en su caso) de los puntos obtenidos:

- $x=0$: $f(0)=2\sqrt{5} \cong 4.47$.
- $x=\sqrt{5}$: $f(\sqrt{5})=4\sqrt{5} \cong 8.94$.
- $x=2$: $f(2)=8+2=10$.

El mínimo perímetro posible es $2\sqrt{5}$, pero no nos lo piden. El máximo es 10 y se consigue cuando $x = 2$. Para él, la base es $2x = 4$ y la altura, $h = \sqrt{5-2^2} = 1$. en definitiva:

$$\boxed{\text{El rectángulo mide } 4 \text{ cm de base y } 1 \text{ cm de altura, siendo } 10 \text{ cm su perímetro.}}$$

11) Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 100€, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10€/metro. ¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000€?




Si llamamos $x$ a la longitud de la base y $h$ a la de la altura, el área del cercado será $xh$. Depende de dos variables.
El precio del cercado será:

$$100x + 10(x + 2h)$$

Como dicho precio debe ser de 3000€, obtenemos una relación entre ambas variables:

$$100x + 10(x + 2h) = 3000 \iff 110x + 20h = 3000 \iff 2h = 300 - 11x \iff$$
$$\iff h = \frac{300-11x}{2}$$

El área del cercado será, entonces:

$$\text{Área} = xh = x\frac{300-11x}{2} = \frac{300x-11x^2}{2}$$

Nos ha quedado, entonces, una función de una única variable. Veamos su dominio. Lo mínimo que puede valer $x$ es 0, en cuyo caso el cercado encerraría un área nula. Para ver lo máximo que puede valer $x$, tenemos en cuenta que a $h$ le ocurre igual, es decir, que lo mínimo que puede valer es 0, siendo esta situación la extrema opuesta a la de $x = 0$ (cuando $x$ aumenta, $h$ disminuye). Y tenemos la relación entre $x$ y $h$, en la que podemos averiguar el valor que corresponde a $x$ para $h = 0$:

$$0 = \frac{300-11x}{2} \iff 11x = 300 \iff x = 300/11$$

Entonces, nuestro problema consiste en averiguar el máximo absoluto de:

$$f(x) = \frac{300x-11x^2}{2}, \text{ con } x \in [0, 300/11]$$

- Extremos del dominio: 0; 300/11.
- Discontinuidades de $f$: No tiene (es polinómica de 2º grado).
- Discontinuidades de $f'$: $f'(x) = \dfrac{-22x+300}{2} = -11x + 150$. Tampoco tiene.
- $f'(x) = 0$: $x = 150/11$

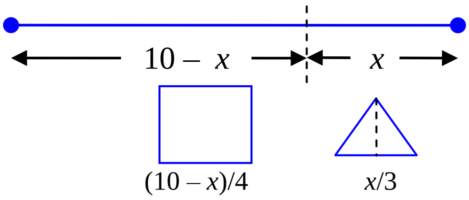
Comparamos imágenes (o límites, en su defecto) en los puntos obtenidos:

- $x = 0$: $f(0) = 0$
- $x = 300/11$: $f(300/11) = 0$
- $x = 150/11$: $f(150/11) = 11250/11$

Por tanto, el área mínima es 0, como era de esperar. Lo que se pide es el de máxima área y es:

Área máxima $11250/11\ m^2$, que corresponde a un cercado con $150/11\ m$ de base (la longitud junto a la carretera) y con altura $h = \dfrac{300 - 11\frac{150}{11}}{2} = 75\ m$.

12) Un alambre de 10 m de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro, un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.




Sea $x$ la longitud de uno de los dos trozos, concretamente, aquella con la que se va a formar el triángulo equilátero (cuyo lado medirá, pues, $x/3$). El otro trozo del alambre tendrá una longitud de $10 - x$, y como con él se forma un cuadrado, la longitud de cada uno de sus lados será $(10 - x)/4$.

Si cada lado del triángulo equilátero mide $x/3$, al trazar la altura la base queda dividida en dos trozos idénticos, cada uno de los cuales mide $x/6$. Si llamamos $h$ a la altura, por el T. de Pitágoras:

$$h = \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36}} = \sqrt{\frac{4x^2 - x^2}{36}} = \sqrt{\frac{3x^2}{36}} = \frac{x\sqrt{3}}{6}$$

Por tanto, el área del triángulo es: $\dfrac{\frac{x}{3}\frac{x\sqrt{3}}{6}}{2} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{36}$

El área del cuadrado es $\dfrac{(10-x)^2}{16}$. Por tanto, el área total es la suma de estos dos valores, y es lo que hay que minimizar. Y el mínimo valor de $x$ es 0, en cuyo caso no habría triángulo, y el máximo, 10, que impediría la formación del cuadrado. Finalmente:

$$\text{Minimizar } f(x) = \frac{(10-x)^2}{16} + \frac{x^2\sqrt{3}}{36}, \text{ con } x \in [0, 10]$$

Los puntos a estudiar son:

- Extremos del dominio: 0; 10.
- Discontinuidades de $f$: No tiene (es polinómica).
- Discontinuidades de $f'$: $f'(x) = \dfrac{-2(10-x)}{16} + \dfrac{2x\sqrt{3}}{36} = \dfrac{x-10}{8} + \dfrac{x\sqrt{3}}{18}$

  No tiene discontinuidades (es polinómica de grado 1).
- $f'(x) = 0$: $\dfrac{9(x-10)}{72} + \dfrac{4\sqrt{3}x}{72} = 0 \Rightarrow x(9 + 4\sqrt{3}) = 90 \Rightarrow x = \dfrac{90}{9 + 4\sqrt{3}}$

Comparamos imágenes (o límites, si no las hubiera o fuese un punto de discontinuidad) en los puntos obtenidos:

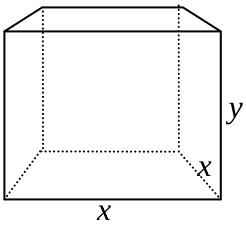
- $x = 0$: $f(0) = \dfrac{100}{16} = \dfrac{25}{4} = 6.25$
- $x = 10$: $f(10) = \dfrac{100\sqrt{3}}{36} = \dfrac{25\sqrt{3}}{9} \cong 4.81$

- $x = \dfrac{90}{9+4\sqrt{3}}$ : $f\left(\dfrac{90}{9+4\sqrt{3}}\right) \cong 2.72$

Esto nos lleva a que el máximo absoluto es 6.25 cuando $x = 0$ y el mínimo absoluto es, aproximadamente, 2.72 cuando $x = \dfrac{90}{9+4\sqrt{3}}$. La solución del problema es, entonces:

| |
|---|
| Con un trozo de longitud $\dfrac{90}{9+4\sqrt{3}} \cong 5.65\ m$ se construye el triángulo equilátero y con el resto, es decir $10 - \dfrac{90}{9+4\sqrt{3}} \cong 4.35\ m$, el cuadrado. |

13) Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 $m^3$. ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima?




Hemos de minimizar la superficie del depósito. Ésta es el área de la base ($x^2$) más el de las cuatro caras verticales, cada una de las cuales vale $xy$ (son rectángulos de base $x$ y altura $y$). Es decir, hemos de minimizar la función $x^2 + 4xy$. Las unidades en las que trabaja esta función son $m^2$.

Por otra parte, la capacidad del depósito serán 500 $m^3$ (hemos de cuidar que las unidades sean las mismas; por ejemplo, si estos fueran $dam^3$ habría que pasarlas a $m^3$ para ser comparables con las de la función a minimizar). Dicha capacidad será el área de la base multiplicada por la altura, es decir, $x^2y = 500$. Despejando, $y = 500/x^2$. Sustituimos en la función a minimizar, y ésta pasa a ser de una sola variable ($x$), quedando así:

$$f(x) = x^2 + 4x\frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x}$$

Veamos el intervalo en el que oscila $x$. El valor mínimo de $x$ sería 0, sin llegar a tocarlo porque el depósito sería una línea vertical. Por otra parte, el valor mínimo de $y$ sería también 0 sin llegar tampoco a tocarlo, en cuyo caso $x^2 = 500/y$ se acercaría a infinito; por ello, el máximo valor de $x$ sería infinito. En definitiva, $x \in (0, +\infty)$.

Derivando: $f'(x) = 2x - \dfrac{2000}{x^2}$

Analizamos las imágenes (o límites) de los siguientes valores de $x$:

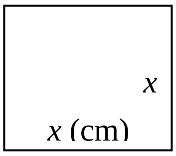
- Extremos del intervalo: 0 y $+\infty$.
- Discontinuidades de $f$: 0.
- Discontinuidades de $f'$: 0.
- $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \dfrac{2000}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = \dfrac{2000}{x^2} \Rightarrow 2x^3 = 2000 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1000}$ $=10$
  - Para $x = 0$: Calculamos el límite y no la imagen, porque $x$ no pertenece al dominio, o sea, al intervalo de definición: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 + \dfrac{2000}{x} = +\infty$
  - Para $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + \dfrac{2000}{x} = +\infty$

- Para $x = 10$: $f(10) = 100 + 200 = 300$. Además, como $f''(x) = 2 + \dfrac{4000}{x^3}$ $\Rightarrow$ $f''(10) > 0$, por lo que es un mínimo relativo.

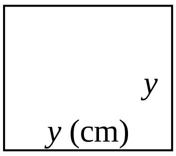
Por tanto, el mínimo absoluto se alcanza para $x = 10$ *m*, que es quien ha proporcionado la menor imagen o límite de entre los puntos anteriores. Dicho valor mínimo es 300 $m^2$. Y la altura del depósito será $y = 500/x^2 = 5$ *m*.
El máximo absoluto (que no nos piden) no se alcanza, pues tendería a valer infinito cuando $x = 0$, es decir, la base tiende a valer 0 y la altura infinita, o cuando $x$ tiende a infinito, o sea, la base tiende a ser infinita con altura 0.

14) Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es de 2 y 3 euros por **centímetro cuadrado**, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 **metro**. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo?

Para evitar el problema de la diferencia de unidades de medida (por un lado, centímetros y por otro, metros), trabajaremos siempre en cm.




Primer cuadrado
Perímetro: $4x$
Área: $x^2$ (cm$^2$)
Coste del material:2 €/cm$^2$
Coste del cuadrado: $2x^2$ €




Segundo cuadrado
Perímetro: $4y$
Área: $y^2$ (cm$^2$)
Coste del material:3 €/cm$^2$
Coste del cuadrado: $3y^2$ €

Hay que minimizar el coste total, que es: $2x^2 + 3y^2$.
Tenemos una restricción que relaciona las variables, que es que el perímetro debe ser de 100 cm. Por tanto:

$$4x + 4y = 100 \;\Rightarrow\; x + y = 25 \;\Rightarrow\; \boxed{y = 25 - x}$$

Luego el coste total, que es la función a minimizar, queda como:

$$\boxed{f(x) = 2x^2 + 3\,(25 - x)^2}$$

Por otro lado:

$\begin{cases} x \text{ no puede ser negativo: } x \geq 0. \\ y \text{ tampoco puede serlo: } y \geq 0 \;\Rightarrow\; (y = 25 - x):\; 25 - x \geq 0 \;\Rightarrow\; 25 \geq x \end{cases}$

Es decir, $0 \leq x \leq 25 \;\Rightarrow\; \boxed{x \in [0, 25]}$.
Se tiene que:

$$f'(x) = 4x + 3\cdot 2\cdot(25 - x)(-1) = 4x - 6(25 - x) = 4x - 150 + 6x = 10x - 150$$

Aplicamos el procedimiento general para calcular extremos absolutos:

- Extremos del dominio (o intervalos que lo componen mediante uniones): 0; 25.
- Discontinuidades de $f$: No tiene (es polinómica).
- Discontinuidades de $f'$: No tiene (es polinómica).
- $f'(x) = 0$: $10x - 150 = 0 \;\Rightarrow\; 10x = 150 \;\Rightarrow\; x = 15$.

Comparamos las imágenes en los puntos anteriores:

- $x = 0$: $f(0) = 3\cdot 25^2 = 1.875$
- $x = 25$: $f(25) = 2\cdot 25^2 = 1.250$
- $x = 15$: $f(15) = 2\cdot 15^2 + 3(25 - 15)^2 = 750$

Por tanto, el máximo absoluto (coste total máximo), que no se pide, se obtiene para $x = 0 \;\Rightarrow\; y = 25 - 0 = 25$, y es de 1.875 €. Y el mínimo absoluto (coste total mínimo), que es lo que nos piden, es para $x = 15$ cm (primer cuadrado), $y = 25 - 15 = 10$ cm (segundo cuadrado), con un coste total de 750€.

15) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función derivable definida por

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{b}{x} + \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Calcular $a$ y $b$.

- $y = a - x$ es continua en todo R (es polinómica) $\Rightarrow$ en particular, lo es en el intervalo $(-\infty, 1)$.
- $y = \dfrac{b}{x} + \ln x$ es continua en $(0, +\infty)$, pues ahí lo es $\ln x$ y el primer sumando sólo tiene discontinuidad en 0. Por tanto, lo es en $(1, +\infty)$.
- Para ser derivable también tiene que ser continua en $x = 1$, que es el único punto que nos falta. Y ello exige la coincidencia de:

  3) $f(1) = a - 1$

  4) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (a - x) = a - 1$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left( \dfrac{b}{x} + \ln x \right) = b$

Luego será continua en todo R si, y sólo si $\boxed{a - 1 = b}$. (1)

Aplicando las fórmulas de derivación, lo que puede hacerse en intervalos abiertos, tenemos:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -\dfrac{b}{x^2} + \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Si $x > 1$, según la expresión obtenida, $f$ no sería derivable en $x = 0$. Pero dicho valor no está en la zona $x > 1$, por lo que $f$ es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Para que sea derivable en todo R, lo que sabemos que ocurre, debe ser $f'(1^-) = f'(1^+) \Leftrightarrow$ $-1 = -b + 1 \Rightarrow \boxed{b = 2}$. Y sustituyendo en (1):

$$a - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{a = 3}.$$

b) Para $a = 3$ y $b = 2$ calcular los extremos absolutos de $f$ en el intervalo $[0, e]$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Son los valores anteriores, para los que sabemos que $f$ es continua y derivable. Por tanto, los extremos absolutos los encontraremos en los extremos relativos o en los extremos del intervalo, que es, en este caso $[0, e]$.

Del apartado anterior, tenemos la expresión definitiva de $f'$, que no hemos escrito (añadimos la existencia de $f'(1)$):

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Como no hay discontinuidades ni en $f$ ni en $f'$, ésta última sólo puede cambiar de signo al atravesar el punto donde se anule.

- Si $x \le 1$ se tiene que $f'(x) = -1$, con lo que nunca se anula.
- Si $x > 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2 + x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (no anula el denominador)

No nos hace falta estudiar la monotonía ni la forma de la función, porque nos da igual que en 2 haya un máximo o un mínimo relativo: los extremos absolutos los detectaremos comparando las imágenes de los puntos candidatos: 0, $e$ y 2 (extremos relativos y extremos del intervalo de definición, pues no hay discontinuidades ni de $f$ ni de $f'$). Aún así, escribimos el cuadro de monotonía, por ilustrar cómo se haría:

| | (0, 2) | 2 | (2, *e*) |
|---|---|---|---|
| $f'$ | – | 0 | + |
| $f$ | ↘ | mín | ↗ |

Así que el mínimo (relativo y absoluto, según la forma de la función) está en 2.
Reiteramos que no nos hubiera hecho falta el estudio de la monotonía. Como:

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{2}{x} + \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- $f(0) = 3$
- $f(2) = 1 + \ln 2 \approx 1.69$
- $f(e) = \dfrac{2}{e} + 1 \approx 1.74$

Lo que significa que:

El máximo absoluto está en (0, 3) y el mínimo absoluto en (2, 1 + ln 2).