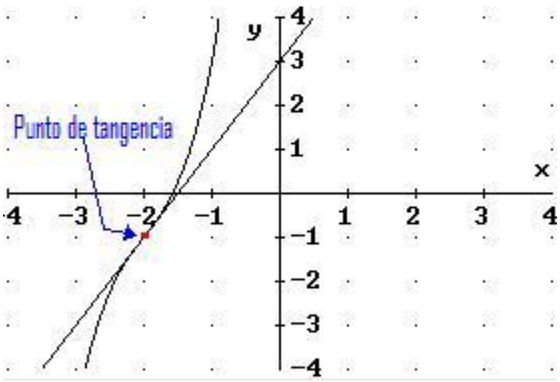
PROBLEMAS RESUELTOS DE FUNCIONES DEPENDIENTES DE PARÁMETROS

1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

Calculemos el punto de inflexión:



$f'(x) = 6x^2+24x+a$ $\quad f''(x) = 12x+24$ $\quad f'''(x) = 12$

El punto de inflexión anulará la segunda derivada, pero no la tercera. Igualando a cero la segunda derivada se obtiene $x = -2$. Como $f'''(-2) = 12 \neq 0$, es un punto de inflexión, en efecto.

En dicho punto, conocemos la tangente. El punto donde se tocan la tangente y f es común a ambas gráficas. No sabemos la fórmula completa de f, pero sí la de la tangente. Entonces, por ésta, podemos averiguar la coordenada y del punto de tangencia: $y = 2(-2)+3 = -4+3 = -1$. Luego el punto de inflexión y de tangencia es $(-2, -1)$.

Conocemos la tangente en dicho punto. Dicha tangente tiene como pendiente 2. Pero la pendiente de la tangente en $x = -2$ es $f'(-2)$. Luego $f'(-2)=2$. Es decir:

$$6(-2)^2+24(-2)+a = 2 \ \Rightarrow\ 24-48+a = 2 \ \Rightarrow\ -24+a = 2 \ \Rightarrow\ a = 26$$

Por último, sabiendo que la función pasa por $(-2, -1)$, averiguamos el parámetro b:

$$f(-2) = -1 \ \Rightarrow\ 2(-2)^3+12(-2)^2+26(-2)+b = -1 \ \Rightarrow\ -16+48-52+b = -1 \ \Rightarrow$$
$$-20+b = -1 \ \Rightarrow\ b=19$$

2) De la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, y que corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

Si tiene un máximo en $x = -1$, siendo la función derivable en todo R se debe cumplir que $f'(-1) = 0$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \ \Rightarrow\ f'(-1) = 3a - 2b + c = 0 \qquad (1)$$

que es una ecuación con tres incógnitas.

Como corta a OX en el punto cuya abscisa es $x = -2$, significa que $f(-2) = 0$ (la ordenada del punto debe ser 0, por estar sobre OX). Luego:

$$-8a + 4b - 2c + d = 0 \qquad (2)$$

que es otra ecuación.

Tiene un punto de inflexión con abscisa $x = 0$. Para ello, $f''(0) = 0$. Entonces:

$$f''(x) = 6ax + 2b \ \Rightarrow\ f''(0) = 2b = 0 \qquad (3)$$

Por último, la pendiente de la tangente en el punto de abscisa $x = 2$ vale 9. Esto significa que:

$$f'(2) = 9 \ \Rightarrow\ 12a +4b + c = 9 \qquad (4)$$

Nos han quedado 4 ecuaciones con 4 incógnitas. La ecuación (3) nos proporciona, ya, el valor de $b = 0$. Sustituyendo en las otras tres:

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & 3a + c = 0 \\ (2) & -8a - 2c + d = 0 \\ (4) & 12a + c = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{lr} (1^a)\cdot(-1) & -3a - c = 0 \\ (3^a) & 12a + c = 9 \\ \hline Sumamos\ : & 9a = 9 \end{array} \Rightarrow a = 1$$

Sustituyendo en la 1ª: $3 + c = 0 \Rightarrow c = -3$.
Sustituyendo los valores que ya tenemos en la 2ª: $-8 + 6 + d = 0 \Rightarrow d = 2$.
Luego $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$ y $d = 2$.

3) Halla la función $f : R \to R$ sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$.

Este problema puede abordarse suponiendo que si f'' es un polinomio de primer grado, entonces f' es de segundo grado y f de tercer grado. Así que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y proceder a calcular los parámetros a, b, c, d con las condiciones del enunciado. Pero nosotros utilizaremos integrales indefinidas.

Si $f''(x) = 12x - 6 \Rightarrow f'(x) = \int (12x - 6)dx = 6x^2 - 6x + k$.

La ecuación de la tangente en $x = 2$ es, despejando: $y = 4x - 7$, por lo que su pendiente es 4. Por la interpretación geométrica de la derivada, esto significa que $f'(2) = 4$. Usando el resultado de la integral anterior:

$$6\cdot 4 - 6\cdot 2 + k = 4 \Rightarrow 12 + k = 4 \Rightarrow k = -8$$

Luego $f'(x) = 6x^2 - 6x - 8$. Por tanto, $f(x) = \int (6x^2 - 6x - 8)dx = 2x^3 - 3x^2 - 8x + c$.

Necesitamos un punto de la gráfica de f para hallar c. Pero tenemos la ecuación de la recta tangente en $x = 2$. Dicha recta pasa por el mismo punto de la gráfica de f correspondiente a $x = 2$, puesto que es tangente en dicho punto. Entonces, por la ecuación de la tangente podemos hallar la coordenada y de dicho punto: $y = 4\cdot 2 - 7 = 1$. Obligando a que la f obtenida pase por (2, 1) tenemos que:

$$2\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 - 8\cdot 2 + c = 1 \Rightarrow 16 - 12 - 16 + c = 1 \Rightarrow c = 13$$

Luego: $\boxed{f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 13}$.

4) Sea $f : R \to R$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

a) Determina $a, b \in R$ sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2, 2) y tiene un punto de inflexión de abscisa $x = 0$.

- Pasa por (2, 2) $\Rightarrow f(2) = 2 \Rightarrow 8 + 4a + 2b + 1 = 2 \Rightarrow 4a + 2b = -7$ (*)
- Punto de inflexión en $x = 0$: Como $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ y $f''(x) = 6x + 2a$, para que haya un p. de inflexión en $x = 0$ exigimos que $f''(0) = 0 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$.

Sustituyendo este resultado en (*): $2b = -7 \Rightarrow \boxed{b = -7/2}$.

Por tanto, la función es $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x + 1$

b) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

Como $f(0) = 1$, el punto de inflexión es (0, 1).

Como $f'(x) = 3x^2 - \frac{7}{2} \Rightarrow$ la pendiente de la recta tangente en dicho punto será: $m = f'(0) = -\frac{7}{2}$.

La recta *tangente* es, pues: $y-1=-\frac{7}{2}(x-0) \Rightarrow \boxed{y=-\frac{7}{2}x+1}$.

La *normal* es perpendicular a la tangente en el mismo punto de tangencia. Lo único que varía respecto a la *tangente* es la pendiente: $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-7/2} = \frac{2}{7}$. Por tanto, la *normal* es: $y-1=\frac{2}{7}(x-0) \Rightarrow \boxed{y=\frac{2}{7}x+1}$.

5) Determinar el valor de las constantes c y d sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ definida por $f(x)=x^3+3x^2+cx+d$ tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta $y=3x+4$.

f, por ser polinómica, es continua y derivable indefinidamente. Por tanto, su punto de inflexión debe estar donde su segunda derivada se anule.

$f'(x)=3x^2+6x+c$

$f''(x)=6x+6$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x+6=0 \Leftrightarrow x=-1$. Por tanto, $y=3x+4$ es recta tangente en el punto $x=-1$.

Al ser recta tangente, tiene un punto en común con f. Como la imagen de $x=-1$ por la recta es: $y=-3+4=1$, el punto $(-1, 1)$ es también un punto de la gráfica de f. En consecuencia, $f(-1)=1 \Rightarrow -1+3-c+d=1 \Rightarrow \boxed{-c+d=-1}$.

Por otra parte, la pendiente de la recta tangente en $x=-1$ vale 3. Dicha pendiente es, también, $f'(-1)$. Luego:

$f'(-1)=3 \Leftrightarrow 3-6+c=3 \Leftrightarrow -3+c=3 \Leftrightarrow \boxed{c=6}$.

Sustituyendo en la ecuación que obtuvimos antes, $-6+d=-1 \Leftrightarrow \boxed{d=5}$.

6) Sea $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$. Hallar b, c y d sabiendo que f tiene un máximo relativo en $x=-1$ y que $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=4$.

- Es suficiente para que haya un máximo relativo en $x=-1$ que $f'(-1)=0$ y $f''(-1)<0$. Como $f'(x)=3x^2+2bx+c$, se debe cumplir: $\boxed{3-2b+c=0}$ (1)
- Si sustituimos $x=1$ en el límite, el denominador se anula. Como el resultado del límite es finito (vale 4), debe, necesariamente, anularse también el numerador: $f(1)=0 \Rightarrow 1+b+c+d=0 \Rightarrow \boxed{b+c+d=-1}$ (2)
- Siendo $f(x)$ y $x-1$ ilimitadamente derivables, porque así les ocurre a los polinomios, y la indeterminación del límite es 0 / 0, podemos aplicar L`Hôpital y el límite resultante debe dar finito y valer 4 (de lo contrario, el límite original valdría otra cosa):

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+bx^2+cx+d}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2bx+c}{1}=\boxed{3+2b+c=4}\quad(3)$$

Las tres condiciones nos llevan a un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas cuya solución será lo que nos solicitan. Resolvemos dicho sistema por Gauss.

$$\begin{cases}-2b+c=-3\\ b+c+d=-1\\ 2b+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2&1&0&-3\\1&1&1&-1\\2&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3-F_1}\begin{pmatrix}-2&1&0&-3\\1&1&1&-1\\4&0&0&4\end{pmatrix}$$

3ª ec: $4b = 4 \Rightarrow \boxed{b = 1}$

1ª ec: $-2\cdot 1 + c = -3 \Rightarrow -2 + c = -3 \Rightarrow \boxed{c = -1}$

2ª ec: $1 - 1 + d = -1 \Rightarrow \boxed{d = -1}$

Luego $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$