PROBLEMAS RESUELTOS DE INTEGRALES

1) Sea $I = \int \frac{2}{2-e^x}dx$.

   a) Expresa I haciendo el cambio de variable $t = e^x$.

$$I = \int \frac{2}{2-e^x}dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \to dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{array}\right] = \int \frac{2}{2-t}\frac{dt}{t} = \int \frac{2}{t(2-t)}$$

   b) Calcula I.

   Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{2}{t(2-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2-t} = \frac{A(2-t)+Bt}{t(2-t)}$$

   Para que la primera y la última fracción coincidan, deben ser iguales los numeradores, puesto que los denominadores lo son:

$$2 = A(2-t) + Bt$$

   - Si $t = 2 \Rightarrow 2 = 2B \Rightarrow B = 1$
   - Si $t = 0 \Rightarrow 2 = 2A \Rightarrow A = 1$

   Por tanto:

$$I = \int \frac{1}{t}dt + \int \frac{1}{2-t}dt = \text{Ln}\,|t| - \text{Ln}\,|2-t| + k =$$
$$= \text{Ln}\,|e^x| - \text{Ln}\,|2-e^x| + k = x - \text{Ln}\,|2-e^x| + k$$

   Puesto que $|e^x| = |e|^x = e^x$. Y $\text{Ln}(e^x) = x\text{Ln}(e) = x\cdot 1 = x$.

2) Considera la integral indefinida $I = \int \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}dx$. Calcúlala aplicando el cambio de variable $\sqrt{1+x}-1 = t$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{1+x}-1 \to \sqrt{1+x} = t+1 \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx \to dx = 2\sqrt{1+x}\,dt = 2(t+1)dt \end{array}\right] = \int \frac{1}{t}2(t+1)dt =$$
$$= 2\int \frac{t+1}{t}dt = 2\int \frac{t}{t}dt + 2\int \frac{1}{t}dt = 2\int dt + 2\int \frac{1}{t}dt = 2t + 2\ln|t| + k =$$
$$= 2\left(\sqrt{1+x}-1\right) + 2\ln\left|\sqrt{1+x}-1\right| + k$$

3) Calcula:

   a) $\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}dx$.

   Se trata, claramente, de una integral racional. El grado del numerador no es menor que el del denominador, por lo que el procedimiento general nos obliga a dividir numerador entre denominador y sustituir el numerador, usando que dividendo es igual a divisor por cociente más resto.

   Sin embargo, podemos conseguir que parte de los sumandos que forman el numerador sean igual al denominador, y descomponer la integral en sumas, siendo este un procedimiento más corto (si es que nos damos cuenta). Y sería así:

$$\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}dx = \int \frac{5x^2 - 125 + 125 - x - 160}{x^2 - 25}dx = \int \frac{5x^2 - 125}{x^2 - 25}dx +$$
$$\int \frac{125 - x - 160}{x^2 - 25}dx = \int \frac{5(x^2 - 25)}{x^2 - 25}dx + \int \frac{-x - 35}{x^2 - 25}dx = 5\int dx + I_1 = 5x + I_1$$

Nos centramos en el integrando de I_1. Descomponemos en factores irreducibles el denominador, lo que es inmediato si consideramos que se trata de una diferencia de cuadrados. Por el teorema que permite descomponer fracciones algebraicas donde el grado del numerador es menor que el del denominador:

$$\frac{-x - 35}{(x-5)(x+5)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5) + B(x-5)}{(x-5)(x+5)}$$

De donde, igualando los numeradores de la primera y la última fracciones:

$$-x - 35 = A(x + 5) + B(x - 5)$$

Si damos valores a x, nos queda:

- $x = -5 \Rightarrow -30 = B(-10) \Rightarrow B = 3$
- $x = 5 \Rightarrow -40 = 10A \Rightarrow A = -4$

Por tanto:

$$\frac{-x - 35}{(x-5)(x+5)} = \frac{-4}{x-5} + \frac{3}{x+5}$$

De donde:

$$I_1 = -4\int \frac{dx}{x-5} + 3\int \frac{dx}{x+5} = -4\,\mathrm{Ln}\,(x-5) + 3\,\mathrm{Ln}\,(x+5) + C$$

Por tanto, sustituyendo:

$$\boxed{\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}dx = 5x - 4\,\mathrm{Ln}\,(x-5) + 3\,\mathrm{Ln}\,(x+5) + C}$$

b) $\int (2x - 3)\cdot \mathrm{tg}\,(x^2 - 3x)dx$.

Observando el integrando, tenemos que $(2x - 3)$ es la derivada del argumento de la tangente. Por tanto, podemos intentar un cambio de variable:

$$\int (2x-3)\cdot \mathrm{tg}\,(x^2 - 3x)dx = \left[\begin{array}{c} t = x^2 - 3x \\ dt = (2x-3)dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2x-3} \end{array}\right] =$$
$$= \int (2x-3)\cdot \mathrm{tg}\,(t)\frac{dt}{2x-3} = \int \mathrm{tg}\,(t)dt = \int \frac{\mathrm{sen}\,(t)}{\cos(t)}dt = -\int \frac{-\mathrm{sen}\,(t)}{\cos(t)}dt$$

Como el numerador es la derivada del denominador:

$$= -\mathrm{Ln}(\cos(t)) + k = \boxed{-\mathrm{Ln}(\cos(x^2 - 3x)) + k}$$

4) Calcula:

a) $\int \frac{3x + 4}{x^2 + 1}dx$

Aplicando propiedades inmediatas de integrales:

$$\int \frac{3x + 4}{x^2 + 1}dx = \int \frac{3x}{x^2 + 1}dx + \int \frac{4}{x^2 + 1}dx = 3\int \frac{x}{x^2 + 1}dx + 4\int \frac{1}{x^2 + 1}dx =$$

La segunda integral es inmediata. La primera, como la derivada del denominador es $2x$, sólo necesita un coeficiente 2 en el numerador para ser un logaritmo neperiano:

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \text{arctg } x + k = \frac{3}{2}\text{Ln}(x^2+1) + \text{arctg } x + k$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)dx$

El integrando es producto de dos funciones. Ambas sabemos derivarlas e integrarlas, por lo que la abordamos *por partes*. Llamaremos $u = x$ porque, de lo contrario, al integrarla aumentaría el grado de x en el integrando, lo que no nos conviene: nos interesa que este factor desaparezca.

La integral de $\cos(2x)$ es inmediata (basta ajustar coeficientes); pero si no la viésemos, la plantearíamos aparte mediante un cambio de variable $t = 2x$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)dx = \begin{bmatrix} u = x \to du = dx \\ dv = \cos 2x dx \to v = \frac{1}{2}\text{sen } 2x \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{2}x\,\text{sen } 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen } 2x dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\text{sen }\frac{\pi}{2} - 0\right) + \left[\frac{1}{2}\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \left(\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cos 0\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

5) Calcular $\int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}dx$

Como el grado del numerador de esta integral racional es mayor o igual que el del denominador, habría que comenzar realizando la división de un polinomio entre otro. Pero cuando el grado es igual, como en este caso, podemos intentar evitarla:

$$I = \int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}dx = \int_2^4 \frac{x^2-6x+5+6x-5}{x^2-6x+5}dx =$$

$$= \int_2^4 \frac{x^2-6x+5}{x^2-6x+5}dx + \int_2^4 \frac{6x-5}{x^2-6x+5}dx = \int_2^4 dx + I_1 = [x]_2^4 + I_1 = (4-2) + I_1 = 2 + I_1$$

Descomponemos en suma de fracciones simples el integrando de I_1. Para ello, comenzamos por averiguar las raíces del denominador:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6\pm 4}{2} = \left\langle \begin{matrix} =1 \\ =5 \end{matrix} \right. \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 1(x-1)(x-5)$$

Por tanto:

$$\frac{6x-5}{x^2-6x+5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)}$$

Lo que será cierto si los numeradores coinciden:

$$6x - 5 = A(x-5) + B(x-1)$$

Y para averiguar qué valores de A y B verifican la igualdad, damos valores convenientes a x:

- $x = 1$: $1 = -4A + 0 \Rightarrow A = -1/4$
- $x = 5$: $25 = 0 + 4B \Rightarrow B = 25/4$

De esta manera:

$$I_1 = -\frac{1}{4}\int_2^4 \frac{1}{x-1}dx + \frac{25}{4}\int_2^4 \frac{1}{x-5}dx = -\frac{1}{4}[\ln|x-1|]_2^4 + \frac{25}{4}[\ln|x-5|]_2^4 =$$

$$= -\frac{1}{4}(\ln 3 - \ln 1) + \frac{25}{4}(\ln 1 - \ln 3) = -\frac{1}{4}\ln 3 - \frac{25}{4}\ln 3 = -\frac{13}{2}\ln 3$$

Sustituyendo arriba, tenemos, finalmente:

$$\boxed{I = 2 - \frac{13}{2}\ln 3}$$

6) Calcular $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4}dx$ *(2,5 puntos)*

Estamos ante una integral racional. Como el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, hemos de comenzar con la división entre ambos. Pero si nos fijamos bien, como ambos grados coinciden, podemos evitarla así:

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 - x - 2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 - x - 2 + x + 2}{x^2 - x - 2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x + 2}{x^2 - x - 2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x + 2}{x^2 - x - 2}dx$$

Si hubiésemos efectuado la división de los polinomios, habríamos llegado al mismo resultado.

Hagamos ahora cada integral por separado. La primera es trivial:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{1}{2}[x]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$$

Para la segunda (prescindimos del ½), descomponemos el integrando en suma de fracciones simples, para lo que tenemos en cuenta que:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \langle \begin{matrix} = -1 \\ = 2 \end{matrix} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 1(x + 1)(x - 2)$$

Con lo que:

$$\frac{x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{x + 2}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)}$$

Para lo que basta con que sean iguales los numeradores:

$$x + 2 = A(x - 2) + B(x + 1)$$

Veamos qué valores son los de A y B. Para ello, damos valores a x:

- $x = 2$: $4 = 0 + 3B \Rightarrow B = 4/3$
- $x = -1$: $1 = -3A + 0 \Rightarrow A = -1/3$

Con todo ello:

$$\frac{x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{-1}{3}\frac{1}{x + 1} + \frac{4}{3}\frac{1}{x - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x + 2}{x^2 - x - 2}dx = \frac{-1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x + 1}dx + \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{x - 2}dx =$$

$$= \frac{-1}{3}[\ln |x + 1|]_0^1 + \frac{4}{3}[\ln |x - 2|]_0^1 = \frac{-1}{3}(\ln 2 - \ln 1) + \frac{4}{3}(\ln 1 - \ln 2) =$$

$$= \frac{-\ln 2}{3} + \frac{-4\ln 2}{3} = \frac{-5\ln 2}{3}$$

Sustituyendo:

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{-5\ln 2}{3} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{5\ln 2}{6}}$$

7) Calcular la integral $\int \frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2} dx$

Estamos ante una integral racional. Como el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, hemos de comenzar con la división entre ambos:

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & + x^2 & - 10x & + 1 & x^2 - x - 2 \\ \cline{5-5} -3x^3 & + 3x^2 & + 6x & & 3x + 4 \\ \hline & 4x^2 & - 4x & + 1 & \\ & -4x^2 & + 4x & + 8 & \\ \cline{2-4} & & & 9 & \end{array}$$

Por tanto:

$$\frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2} = \frac{(x^2 - x - 2)(3x + 4) + 9}{x^2 - x - 2} = \frac{(x^2 - x - 2)(3x + 4)}{x^2 - x - 2} + \frac{9}{x^2 - x - 2} =$$

$$= 3x + 4 + \frac{9}{x^2 - x - 2}$$

Por otra parte, factorizamos el denominador:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \langle \begin{matrix} = -1 \\ = 2 \end{matrix} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 1(x + 1)(x - 2)$$

Descomponemos en suma de fracciones simples la fracción algebraica anterior:

$$\frac{9}{x^2 - x - 2} = \frac{9}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)}$$

Para lo que basta con que sean iguales los numeradores:

$$9 = A(x - 2) + B(x + 1)$$

Veamos qué valores son los de A y B. Para ello, damos valores a x:

- $x = 2$: $9 = 0 + 3B \Rightarrow B = 3$
- $x = -1$: $9 = -3A + 0 \Rightarrow A = -3$

Con todo ello:

$$\frac{9}{x^2 - x - 2} = \frac{-3}{x + 1} + \frac{3}{x - 2}$$

Por lo que:

$$\int \frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2} dx = \int (3x + 4) dx + \int \frac{-3}{x + 1} dx + \int \frac{3}{x - 2} dx =$$

$$= \boxed{3\frac{x^2}{2} + 4x - 3\ln|x + 1| + 3\ln|x - 2| + k}$$

8) Calcular $\int_2^4 \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5} dx$

Como el grado del numerador de esta integral racional es mayor o igual que el del denominador, habría que comenzar realizando la división de un polinomio entre otro. Pero cuando el grado es igual, como en este caso, podemos intentar evitarla:

$$I = \int_2^4 \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5} dx = \int_2^4 \frac{x^2 - 6x + 5 + 6x - 5}{x^2 - 6x + 5} dx =$$

$$= \int_2^4 \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 6x + 5} dx + \int_2^4 \frac{6x - 5}{x^2 - 6x + 5} dx = \int_2^4 dx + I_1 = [x]_2^4 + I_1 = (4 - 2) + I_1 = 2 + I_1$$

Descomponemos en suma de fracciones simples el integrando de I_1. Para ello, comenzamos por averiguar las raíces del denominador:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \langle\begin{smallmatrix} =1 \\ =5 \end{smallmatrix} \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 1(x-1)(x-5)$$

Por tanto:

$$\frac{6x-5}{x^2-6x+5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)}$$

Lo que será cierto si los numeradores coinciden:

$$6x - 5 = A(x-5) + B(x-1)$$

Y para averiguar qué valores de A y B verifican la igualdad, damos valores convenientes a x:

- $x = 1$: $1 = -4A + 0 \Rightarrow A = -1/4$
- $x = 5$: $25 = 0 + 4B \Rightarrow B = 25/4$

De esta manera:

$$I_1 = -\frac{1}{4}\int_2^4 \frac{1}{x-1}dx + \frac{25}{4}\int_2^4 \frac{1}{x-5}dx = -\frac{1}{4}\left[\ln|x-1|\right]_2^4 + \frac{25}{4}\left[\ln|x-5|\right]_2^4 =$$

$$= -\frac{1}{4}(\ln 3 - \ln 1) + \frac{25}{4}(\ln 1 - \ln 3) = -\frac{1}{4}\ln 3 - \frac{25}{4}\ln 3 = -\frac{13}{2}\ln 3$$

Sustituyendo arriba, tenemos, finalmente:

$$\boxed{I = 2 - \frac{13}{2}\ln 3}$$

9) Se sabe que la función $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo absoluto en el punto de abscisa $x = 1$, que su gráfica pasa por el punto (1, 4) y que $\int_{-1}^{3} f(x)dx = \frac{32}{3}$. Hallar a, b y c.

La función que nos dan es cuadrática, cuya gráfica es una parábola. Para tener un máximo absoluto, debe ser cóncava, y dicho máximo absoluto será el máximo relativo. Luego lo que tenemos es un máximo relativo en (1, 4).

Un teorema nos dice que si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0 \Rightarrow$ hay un máximo relativo en $x = a$. Vamos a exigir esto para conseguirlo:

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(1) = \boxed{2a + b = 0} \quad (1)$$

Tenemos una relación entre a y b, que nos garantiza lo que nos piden, siempre que $f''(1) < 0$, que comprobaremos cuando tengamos más información.

Por otra parte, si pasa por (1, 4) $\Rightarrow f(1) = 4 \Rightarrow \boxed{a + b + c = 4}$ (2). Tenemos una segunda condición.

Por último:

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{3}(ax^2 + bx + c)dx = \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right]_{-1}^{3} =$$

$$= \left(a\frac{3^3}{3} + b\frac{3^2}{2} + c3\right) - \left(a\frac{(-1)^3}{3} + b\frac{(-1)^2}{2} + c(-1)\right) = 9a + \frac{9b}{2} + 3c - \left(-\frac{a}{3} + \frac{b}{2} - c\right) =$$

$$= 9a + \frac{9b}{2} + 3c + \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c = \frac{28}{3}a + 4b + 4c = \frac{32}{3} \Rightarrow 28a + 12b + 12c = 32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{7a + 3b + 3c = 8} \quad (3)$$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones encontradas, por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 3F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

3ª ec: $4a = -4 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

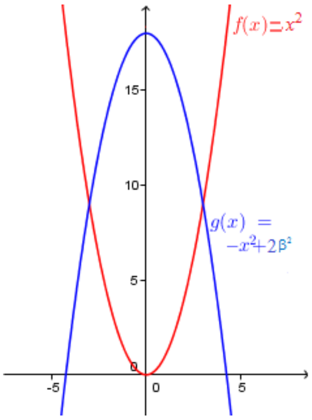
1ª ec: $2\cdot(-1) + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$

2ª ec: $-1 + 2 + c = 4 \Rightarrow \boxed{c = 3}$

Luego la función solicitada es: $\boxed{f(x) = -x^2 + 2x + 3}$.

Y esta función verifica lo único que nos queda: $f''(x) = -1 \Rightarrow f''(1) = -1 < 0$, por lo que, en efecto, lo que hay en $x = -1$ es un *máximo*.

10) Calcular $\beta > 0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2\beta^2$ sea 72 (unidades de área).



La gráfica de f es la parábola convexa estándar. La de g es su simétrica invertida (cóncava) desplazadas $2\beta^2$ unidades hacia arriba, dado que dicho valor es positivo estrictamente. Por tanto, <u>g queda por encima de f</u>.

Los puntos de corte de ambas funciones son:

$$\left.\begin{array}{r} y = x^2 \\ y = -x^2 + 2\beta^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = -x^2 + 2\beta^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2\beta^2 \Rightarrow x^2 = \beta^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\beta^2} = \pm\beta$$

Para calcular el recinto, sólo nos interesan las abscisas de los puntos de corte, que ya tenemos. Por tanto, el área entre ambas será:

$$A = \int_{-\beta}^{\beta} (-x^2 + 2\beta^2 - x^2)dx =$$

$$= \int_{-\beta}^{\beta} (-2x^2 + 2\beta^2)dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 2\beta^2 x\right]_{-\beta}^{\beta} =$$

$$= -2\frac{\beta^3}{3} + 2\beta^3 - \left(2\frac{\beta^3}{3} - 2\beta^3\right) = -4\frac{\beta^3}{3} + 4\beta^3 = \left(-\frac{4}{3} + 4\right)\beta^3 = \frac{8}{3}\beta^3 = 72$$

Hemos igualado al resultado conocido del área. Despejando:

$$\beta^3 = \frac{72\cdot 3}{8} = 27 \Rightarrow \boxed{\beta = 3}.$$

11) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = xe^{-x}$. Esbozar el recinto limitado por la curva $y = f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x = -1$. Calcular su área.

Sabemos que f <u>es continua</u>.

Los <u>cortes con los ejes</u> son:

- $x = 0 \Rightarrow y = 0$: $\boxed{(0, 0)}$.
- $y = 0 \Rightarrow xe^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$, puesto que la exponencial no se anula nunca: $\boxed{(0, 0)}$.

<u>Asíntotas</u>:

- No tiene verticales (es continua)

- Horizontales: $\lim_{x\to -\infty} xe^{-x} = (-\infty \cdot e^{+\infty}) = -\infty$; $\lim_{x\to +\infty} xe^{-x} = (+\infty \cdot e^{-\infty}) = (+\infty \cdot 0) =$ $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$ (L'Hôpital, son ambas derivables en R) $= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{\infty}\right)$ $= 0$
  Luego tiene como asíntota la recta $\boxed{y = 0}$ cuando $x \to +\infty$, y se va al $-\infty$ cuando $x \to -\infty$.
- Oblicua: $m = \lim_{x\to -\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x\to -\infty} e^{-x} = (e^{+\infty}) = +\infty$. No tiene.

Monotonía:

$f\,'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$

- Discontinuidades de f ó $f\,'$: No hay.
- $f\,'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f\,'$	+	0	–
f	$\nearrow$	Mx	$\searrow$

$\boxed{\text{Máximo relativo en } (1, 1/e)}$.

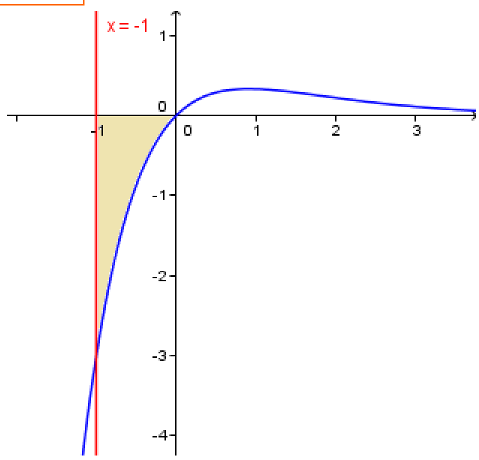
Curvatura;

$f\,''(x) = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = e^{-x}(-2 + x)$

- Discontinuidades de f, $f\,'$ ó $f\,'$: No hay.
- $f\,''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f\,''$	–	0	+
f	$\cap$ **cóncava**	PI	$\cup$ **convexa**

$\boxed{\text{Punto de inflexión en } (2, 2e^{-2})}$.



Gráfica:

Hemos trazado ya la recta vertical $x = -1$ y sombreado el área que nos piden.
Dicha área, al estar bajo OX, es la integral definida cambiada de signo, que hacemos por partes:

$$A = -\int_{-1}^{0} xe^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$= -\left[-xe^{-x}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^{-x}dx =$$

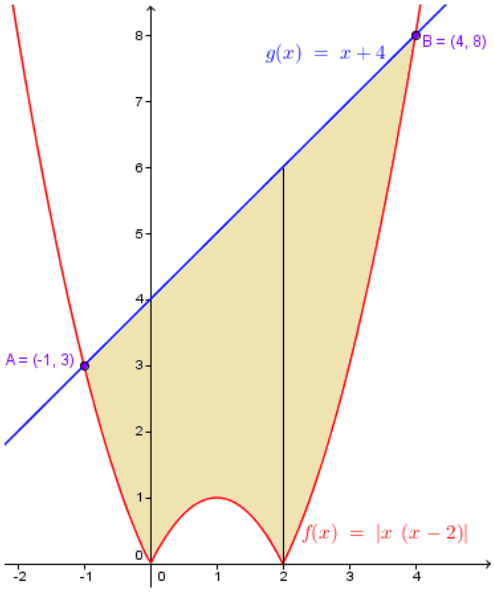
$$= -(0 - (-(-1)e)) + \left[e^{-x}\right]_{-1}^{0} = e + 1 - e = \boxed{1\ u^2}$$

12) Sean $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ y $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ las funciones definidas mediante: $f(x) = |x(x-2)|$ y $g(x) = x + 4$.

a) Esbozar las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcular los puntos de corte entre ambas gráficas.

La función f es el valor absoluto de una parábola *convexa* (el coeficiente de x^2 es positivo) que corta a OX en 0 y en 2, y con vértice en $(1, -1)$. Por tanto, su gráfica es la de dicha parábola haciendo la simetría respecto OX de la parte que queda bajo dicho eje, que es la del intervalo (0, 2).

La función g es una recta. Para representarla usamos una pequeña tabla de valores.
El resultado se muestra junto a estas líneas.



Según lo visto, podemos expresar:

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2) & si \quad x \le 0 \ \text{ó} \ x \ge 2 \\ -x(x-2) & si \quad 0 < x < 2 \end{cases}$$

Las intersecciones las obtendremos analíticamente resolviendo el sistema que, en realidad, son dos sistemas:

- $\left.\begin{array}{l} y = x(x-2) \\ y = x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow x(x-2) = x + 4 \Rightarrow x^2 - 2x - x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

  De donde: $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = -1 \Rightarrow (-1, 3) \\ = 4 \Rightarrow (4, 8) \end{array}\right.$

  Ambas válidas, pues $x = -1$ y $x = 4$ se encuentran en las zonas en las que f coincide con $y = x(x-2)$.

- $\left.\begin{array}{l} y = -x(x-2) \\ y = x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow -x(x-2) = x + 4 \Rightarrow -x^2 + 2x - x - 4 = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow -x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-16}}{2}$ sin solución.

b) Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.
Una de las formas de calcular el área es dividiéndola en 3 partes, como en el gráfico:

$$A = \int_{-1}^{0} (x+4-x(x-2))dx + \int_{0}^{2} [x+4-(-x(x-2)]dx + \int_{2}^{4} (x+4-x(x-2))dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x+4-x^2+2x)dx + \int_{0}^{2} (x+4+x^2-2x)dx + \int_{2}^{4} (x+4-x^2+2x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x^2+3x+4)dx + \int_{0}^{2} (x^2-x+4)dx + \int_{2}^{4} (-x^2+3x+4)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+4x\right]_{0}^{2} + \left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+4x\right]_{2}^{4} =$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right) + \left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}+8\right) - 0 + \left(-\frac{64}{3}+3\frac{16}{2}+16\right) - \left(-\frac{8}{3}+3\frac{4}{2}+8\right) =$$

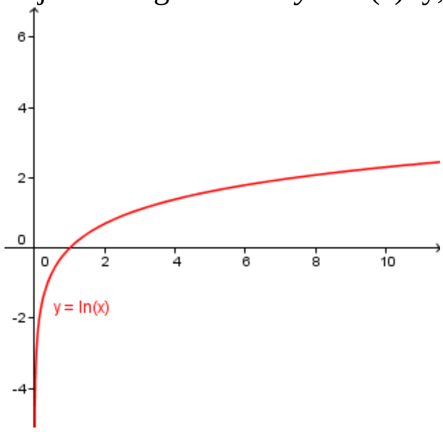
$$= \boxed{\frac{109}{6}\ u^2}$$

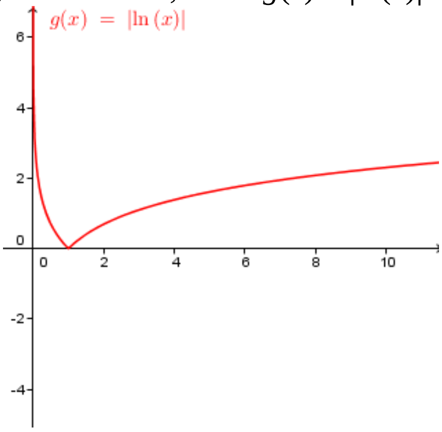
13) Sea g: $(0, +\infty) \to$ R la función definida por $g(x) = |\ln(x)|$.

a) Esbozar el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $y = 1$. Calcular los puntos de corte entre ellas.
La gráfica de $y = \ln(x)$ es conocida, pues es una de las funciones que se manejan habitualmente. La gráfica del valor absoluto de una función se diferencia de la de la función misma en que las zonas que quedan bajo el eje de

abscisas se cambian por sus simétricas respecto al mismo, pasando a estar sobre el eje de abscisas.

Así, dibujamos la gráfica de $y = \ln(x)$ y, a su derecha, la de $g(x) = |\ln(x)|$:





Nos piden, además, los cortes con $y = 1$ y señalar el recinto limitado entre esta recta y $g(x)$. La recta $y = 1$ es horizontal, sin más dificultad. Y para hallar los cortes con g, escribimos ésta como definida a trozos.

Dado que $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, la simetría respecto a OX la hemos aplicado en el tramo correspondiente al intervalo (0, 1). Y, por tanto:

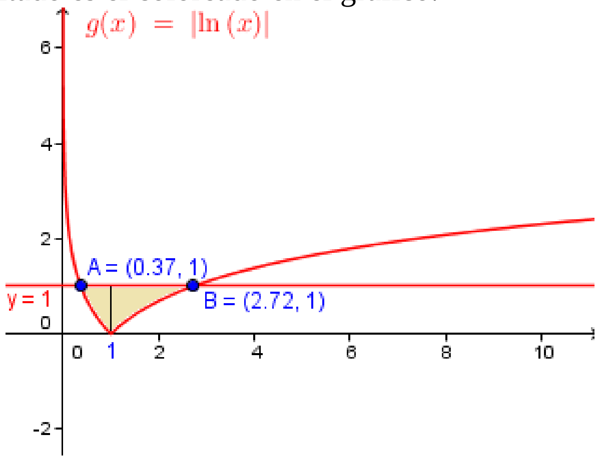
$$g(x) = |\ln(x)| = \begin{cases} -\ln(x) & si \quad x < 1 \\ \ln(x) & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

La resolución del sistema formado por $y = g(x)$ e $y = 1$ es, pues:

- Si $x < 1$: $-\ln(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.
- Si $x \geq 1$: $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

Luego los cortes son: $\boxed{(e^{-1}, 1) \text{ y } (e, 1)}$.

Y el recinto solicitado es el coloreado en el gráfico.



b) Calcular el área del recinto anterior. *(1,5 puntos)*

Hay que hacer dos integrales, porque la definición de g es diferente en el intervalo $[e^{-1}, 1]$ y en $[1, e]$:

$$A_1 = \int_{1/e}^{1} [1 - (-\ln(x))]\,dx = \int_{1/e}^{1} dx + \int_{1/e}^{1} \ln(x)\,dx = [x]_{1/e}^{1} + \begin{bmatrix} u = \ln(x) & \Rightarrow & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= [x]_{1/e}^{1} + [x\ln(x)]_{1/e}^{1} - \int_{1/e}^{1} dx = [x]_{1/e}^{1} - \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) - [x]_{1/e}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{e}(0-1) = \frac{1}{e}$$

$$A_2 = \int_1^e [1-\ln(x)]dx = [x - x\ln(x) + x]_1^e = [2x - x\ln(x)]_1^e = 2e - e - 2 = e - 2$$

Luego $A = A_1 + A_2 = \boxed{e + \frac{1}{e} - 2\ u^2}$

14) Considerar la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x+3)e^{-x}$.

a) Esbozar la gráfica de f, calculando cortes con los ejes, asíntotas, monotonía, extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión.

- Cortes con ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 3$: $\boxed{(0, 3)}$.
  $y = 0 \Rightarrow (x+3)e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 0$ (imposible: la exponencial no se anula nunca) ó $x = -3$: $\boxed{(-3, 0)}$.
- Asíntotas:
  - AV: No tiene, por ser continua en todo R.
  - AH: $\lim_{x\to-\infty}(x+3)e^{-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{e^x} = \left(\frac{-\infty}{0}\right) = -\infty$. No tiene si $x \to -\infty$

    $\lim_{x\to+\infty}(x+3)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$ = (L'Hôpital, ambas derivables) =

    $= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$ es AH si $x \to +\infty$
  - AO: $m = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{xe^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x+3}{x}}{e^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{e^x} = \left(\frac{1+0}{0}\right) = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty$.

    No tiene.
- Monotonía
  $f'(x) = e^{-x} - (x+3)e^{-x} = e^{-x}(1 - x - 3) = e^{-x}(-x-2)$
  - Discontinuidades de f ó de f': No hay
  - $f'(x) = 0$: $x = -2$ (la exponencial siempre es estrictamente positiva, no se anula nunca).

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
f'	+	0	–
f	↗	Máx	↘

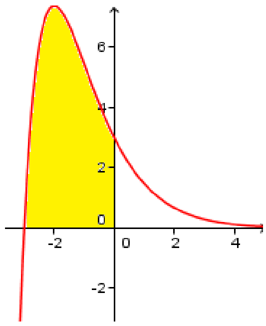
Tiene un máximo relativo en $(-2, e^2)$, es creciente en $(-\infty, -2)$ y decreciente en $(-2, +\infty)$.

- Curvatura
  $f''(x) = -e^{-x} - (-x-2)e^{-x} = e^{-x}(-1 + x + 2) = e^{-x}(x+1)$
  - Discontinuidades de f, f' ó f'': No hay
  - $f''(x) = 0$: $x = -1$ (la exponencial siempre es estrictamente positiva, no se anula nunca).

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
f'	–	0	+
f	∩	Máx	∪

Es cóncava en $(-\infty, -1)$, convexa en $(-1, +\infty)$ y tiene un punto de inflexión en $(1, 2e)$.

- Gráfica. Se ha señalado el recinto cuya gráfica se pide en el siguiente apartado:



b) Calcular el área entre el eje de ordenadas, la curva y su corte con el eje de abscisas. *(1 punto)*

$$A=\int_{-3}^{0}(x+3)e^{-x}dx=\begin{bmatrix} u=x+3 & \Rightarrow & du=dx \\ dv=e^{-x}dx & \Rightarrow & v=-e^{-x}\end{bmatrix}=\left[-(x+3)e^{-x}\right]_{-3}^{0}+\int_{-3}^{0}e^{-x}dx=$$

$$=\left[-(x+3)e^{-x}\right]_{-3}^{0}-\left[e^{-x}\right]_{-3}^{0}=\left[-(x+4)e^{-x}\right]_{-3}^{0}=-4+e^{3}=\boxed{e^{3}-4\ u^{2}}$$

15) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=e^{-2x}$.

a) Justificar que la recta de ecuación $y=-2ex$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $-1/2$.

- Punto de tangencia. Como $f(-1/2)=e^{1}=e \Rightarrow (-1/2, e)$.
- Como $f'(x)=-2e^{-2x} \Rightarrow m=f'(-1/2)=-2e$.
- Recta tangente: $y-e=-2e\,(x+½) \Rightarrow y=-2ex-e+e \Rightarrow \boxed{y=-2ex}$.

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.

$f'(x)=-2e^{-2x}$ y la exponencial siempre es positiva, la derivada es negativa siempre, por lo que se trata de una función decreciente estrictamente. Además, $f''(x)=4e^{-2x}>0,\ \forall x \Rightarrow f$ siempre es convexa.

Por otra parte, la recta tangente es decreciente. Entonces, el único contacto entre ambas es el punto de tangencia, pues como f es decreciente y convexa, después de tocar a su tangente se va alejando de la misma.

Para $x=-0.1$, por ejemplo $f(-0.1)\approx 1.22$ mientras que la imagen por la recta es $y\approx 0.54$. De modo que la recta está por debajo de la curva.

Luego el área pedida debe ser:

$$A=\int_{-1/2}^{0}(e^{-2x}+2ex)dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}+ex^{2}\right]_{-1/2}^{0}=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}e+\frac{1}{4}e\right)=$$

$$=\frac{e}{4}-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{2e-1}{4}}$$

16) Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x)=x^{3}+3x^{2} \quad \text{y} \quad g(x)=x+3.$$

a) Esboza las gráficas de f y de g calculando sus puntos de corte.

$f(x)$ es polinómica de tercer grado. Como el término de máxima potencia es x^{3}, cuando $x\to-\infty$ las imágenes de f se van también a $-\infty$, y cuando $x\to+\infty$ se van a $+\infty$. Calculamos los extremos relativos:

$f'(x)=3x^{2}+6x=0 \Rightarrow x(3x+6)=0 \Rightarrow$ (alguno de los factores debe ser 0):

$x=0$ ó $3x+6=0$ (de donde $x=-2$).

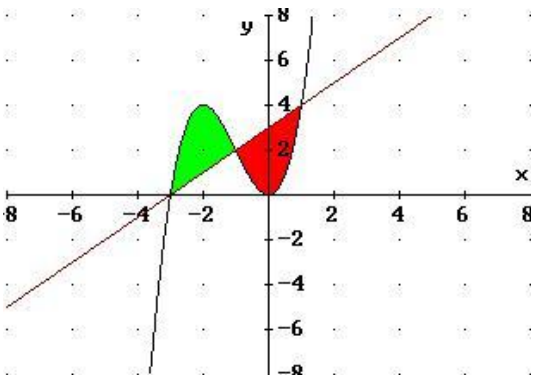
Como $f''(x)=6x+6$, resulta:

- $f''(0) = 6 > 0 \;\Rightarrow\;$ en $x=0$ hay un *mínimo relativo*. Como $f(0)=0$, sus coordenadas son (0, 0)
- $f''(-2) = -12+6 = -6 < 0 \;\Rightarrow\;$ en $x=-2$ hay un *máximo relativo*. Como $f(-2) = -8 + 12=4$, sus coordenadas son (–2, 4)

Por tanto, la gráfica es la del gráfico de más adelante.

$g(x) = x+3$ es una recta, fácil de dibujar dando algunos valores a x. Se ha dibujado también en el gráfico.

Sus gráficas se cortan en aquellos valores de x que den la misma imagen: $f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; x^3+3x^2=x+3 \;\Rightarrow\; x^3+3x^2-x-3 = 0$. Resolvemos por Ruffini:



	1	3	–1	–3
1		1	4	3
	1	4	3	0
–1		–1	–3	
	1	3	0	
–3		–3		
	1	0		

Calculando las imágenes mediante g, que es más fácil que con f, tenemos las coordenadas de los puntos de corte: (–3, 0), (–1, 2) y (1, 4)

b) Calcula el área de cada uno de los dos recintos limitados entre las gráficas de f y g.

El área sombreada en verde es:

$$A_1 = \int_{-3}^{-1}\left[\left(x^3+3x^2\right)-\left(x+3\right)\right]dx = \int_{-3}^{-1}(x^3+3x^2-x-3)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-3}^{-1} =$$

$$=\left(\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3\right)-\left(\frac{81}{4}-27-\frac{9}{2}+9\right) = \left(\frac{1}{4}+2-\frac{2}{4}\right)-\left(\frac{81-108-18+36}{4}\right) =$$

$$=\left(-\frac{1}{4}+2\right)-\left(\frac{117-126}{4}\right) = \frac{7}{4}-\frac{-9}{4} = \frac{16}{4} = 4\ \text{u}^2$$

Y el área roja:

$$A_2 = \int_{-1}^{1}\left[\left(x+3\right)-\left(x^3+3x^2\right)\right]dx = \int_{1}^{-1}\left[\left(x^3+3x^2\right)-\left(x+3\right)\right]dx =$$

$$\int_{1}^{-1}(x^3+3x^2-x-3)\,dx =$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{1}^{-1} = \left(\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3\right)-\left(\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}-3\right) = \frac{7}{4}-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{4}-2\right) =$$

$$= \frac{7}{4}+\frac{9}{4} = 4\ \text{u}^2$$

donde en el primer paso, hemos cambiado el orden de la resta en el integrando, con lo que el signo de la integral cambia; pero al cambiar los límites de integración volvemos al signo original. Con ello, aprovechamos los resultados del cálculo previo.

u^2 significa "unidades al cuadrado", siendo dicha unidad u la de longitud en la que se miden los ejes de coordenadas.

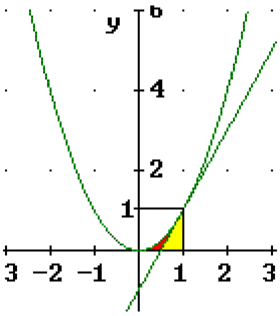
17) Sea f: R → R la función definida por $f(x) = x^2$.

a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

- Punto de tangencia: Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^2 = 1 \Rightarrow$ Es (1, 1).
- Pendiente de la tangente: Como $f'(x) = 2x \Rightarrow m = f'(1) = 2$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es (usando la ecuación de la recta en forma punto-pendiente): $y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$.

b) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y el eje OX. Calcula su área.



La función f es la parábola que conocemos bien. Por tanto, la gráfica es la adjunta, en la que se ha destacado en rojo el pequeño recinto cuya área nos solicitan.

El área de dicho recinto NO es la que queda entre las curvas entre $x = 0$ y $x = 1$, porque ello comprende también al triángulo formado entre la recta tangente y los ejes en el cuarto cuadrante. Hay que calcular el área que queda bajo la curva entre $x = 0$ y $x = 1$ (zona roja más zona amarilla) y restarle el área que queda bajo la tangente entre el punto de corte de ésta con OX (que, dando a y el valor 0 en la ecuación de la tangente se ve que es $x = ½$) y $x = 1$ (zona amarilla):

$$A = \int_0^1 x^2 dx - \int_{1/2}^1 (2x-1)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[x^2 - x\right]_{x=1/2}^{x=1} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left[(1-1) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\ u^2.$$

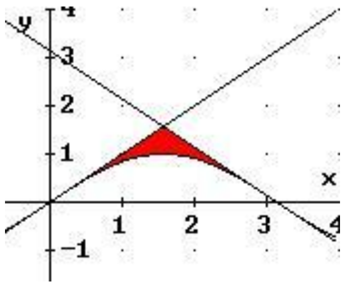
18) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}\, x$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = \pi$.

Habremos de empezar calculando las ecuaciones de dichas tangentes.

- $x = 0$. Punto de tangencia: $f(0) = \text{sen}\, 0 = 0 \Rightarrow (0, 0)$.
  Pendiente: $f'(x) = \cos x \Rightarrow m = f'(0) = \cos 0 = 1$
  Ecuación de la tangente: $y - 0 = 1\cdot(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x}$.

- $x = \pi$. Punto de tangencia: $f(\pi) = \text{sen}\, \pi = 0 \Rightarrow (\pi, 0)$.
  Pendiente: $f'(x) = \cos x \Rightarrow m = f'(\pi) = \cos \pi = -1$
  Ecuación de la tangente: $y - 0 = -1\cdot(x - \pi) \Rightarrow \boxed{y = -x + \pi}$.

Como la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ es conocida, podemos esbozar la situación en el dibujo adjunto.
Se ha marcado en rojo la zona de la que nos piden calcular el área.
Vamos a precisar el punto de corte de las dos tangentes. Poniendo en un sistema sus respectivas ecuaciones y, por igualación:



$$x = -x + \pi \;\Rightarrow\; 2x = \pi \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2}$$

No necesitamos el valor de y. El área es, entonces:

$$\int_0^{\pi/2}[x - \operatorname{sen} x]dx + \int_{\pi/2}^{\pi}[(-x+\pi) - \operatorname{sen} x]dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \cos x\right]_0^{\pi/2} + \left[-\frac{x^2}{2} + \pi x + \cos x\right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

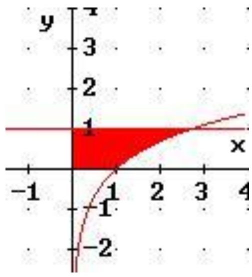
$$= \left(\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} + 0\right) - (0+1) + \left(-\frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - 1\right) - \left(-\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} + \pi\frac{\pi}{2} + 0\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - 1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - 1 + \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2 - 4\pi^2 + 8\pi^2 + \pi^2 + 4\pi^2}{8} - 2 =$$

$$= \frac{10\pi^2}{8} - 2 = \frac{5\pi^2}{4} - 2 \quad u^2$$

19) Sea Ln(x) el logaritmo neperiano de x. Esboza el recinto limitado por los ejes coordenados y las gráficas de las funciones $y = 1$ e $y = \text{Ln}(x)$. Calcula su área.

Es conocida la gráfica de $y = \text{Ln}(x)$. La función $y = 1$ es una recta horizontal. Por tanto, el recinto que nos solicitan es el del gráfico, donde se ha señalado en rojo el recinto cuya área nos piden.



La abscisa del punto de corte de ambas gráficas es:

$$\left.\begin{array}{l} y = \text{Ln}(x) \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Ln}(x) = 1 \Rightarrow x = e$$

Por tanto, el área de dicho recinto es la que queda bajo la recta entre $x = 0$ y $x = \text{e}$, menos la que deja por debajo la función $y = \text{Ln}(x)$ entre $x = 1$ y $x = \text{e}$.

Área bajo la recta = $\int_0^e 1dx = [x]_0^e = e$

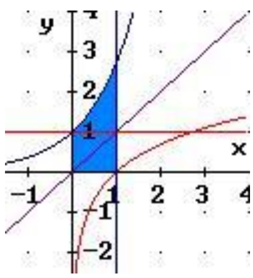
Área bajo la curva = $\int_1^e \text{Ln}(x)dx = \left[\begin{array}{lll} u = \text{Ln}(x) & \Rightarrow & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x \end{array}\right] = [x\,\text{Ln}(x)]_1^e - \int_1^e dx$

=

$$= (e\,\text{Ln}(e) - 1\,\text{Ln}(1)) - [x]_1^e = (\text{e}\cdot 1 - 0) - (\text{e} - 1) = \text{e} - \text{e} + 1 = 1$$

Por tanto, <u>el área pedida vale $\boxed{\text{e} - 1}$ u^2</u>.

Hay <u>otra forma</u> de solucionar el problema más fácil y mucho más corta. Consiste en realizar un gráfico simétrico del anterior respecto de $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrante). La gráfica simétrica de $y = \text{Ln}(x)$ respecto de $y = x$ sabemos que es su función inversa que, en este caso, es $y = \text{e}^x$. Y la simétrica de $y = 1$ es $x = 1$.



Por tanto, el área inicial mide lo mismo que el área marcada en azul en el gráfico adjunto. Y ésta es:

$$A = \int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \boxed{\mathrm{e} - 1} \quad u^2$$

20) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x - 1)\ln(x)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, -3/2)$.

Todas las primitivas de f nos la proporciona su integral indefinida, que pasamos a calcular *por partes*, dado que tenemos el producto de dos funciones que sabemos derivar, y una de ellas la sabemos integrar (éste es un indicio de que probablemente podamos resolverla por el método indicado):

$$\int (x-1)\ln(x)dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x) \Rightarrow & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = (x-1)dx \Rightarrow & v = \frac{x^2}{2} - x \end{bmatrix} = \frac{x^2 - 2x}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2 - 2x}{2}\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 - 2x}{x}dx = \frac{x^2 - 2x}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int xdx + \int dx = \frac{x^2 - 2x}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + x + k =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + x + k$$

De todas ellas, nos piden la que pasa por $(1, -3/2)$. Es decir:

$$\frac{1-2}{2}\ln(1) - \frac{1}{4} + 1 + k = -\frac{3}{2} \Rightarrow k = -\frac{3}{2} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{4}$$

La función solicitada es, pues:

$$\boxed{F(x) = \frac{x^2 - 2x}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{9}{4}}$$