PROBLEMAS RESUELTOS DE RECTAS TANGENTES Y NORMALES

1) (Parte de un problema de Selectividad de Ciencias y Tecnología 2007) Sea f: R → R la función definida por $f(x) = x^2$. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
   - Punto de tangencia: Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^2 = 1 \Rightarrow$ Es (1, 1).
   - Pendiente de la tangente: Como $f'(x) = 2x \Rightarrow m = f'(1) = 2$.

   Por tanto, la ecuación de la recta tangente es (usando la ecuación de la recta en forma punto-pendiente): $y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$.

2) (Selectividad CCSS 2011) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -2e^{3x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.
   - Punto de tangencia: $x = 0 \Rightarrow f(0) = -2e^0 = -2\cdot 1 = -2$: $(0, -2)$.
   - Pendiente: $f'(x) = -2\cdot 3e^{3x} = -6e^{3x} \Rightarrow m = f'(0) = -6e^0 = -6\cdot 1 = -6$
   - Ecuación: $y + 2 = -6(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -6x - 2}$

3) (Selectividad CCSS) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -2e^{3x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.
   - Punto de tangencia: $x = 0 \Rightarrow f(0) = -2e^0 = -2\cdot 1 = -2$: $(0, -2)$.
   - Pendiente: $f'(x) = -2\cdot 3e^{3x} = -6e^{3x} \Rightarrow m = f'(0) = -6e^0 = -6\cdot 1 = -6$
   - Ecuación: $y + 2 = -6(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -6x - 2}$

4) (Parte de un problema de Selectividad de Ciencias y Tecnología 2007) Sea $f : (-1, +\infty) \to$ R la función definida por $f(x) = \text{Ln}(x + 1)$ (Ln denota la función logaritmo neperiano). Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

   Hallamos el punto de tangencia. Si $x = 0 \Rightarrow f(0) = \text{Ln } 1 = 0 \Rightarrow$ Es (0, 0).

   Hallemos la pendiente de la tangente. $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 1$.

   Luego la tangente es: $y-0 = 1(x-1) \Rightarrow y = x$.

5) (Parte de un problema de Selectividad de Ciencias y Tecnología 2008) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = e^{-2x}$. Justifica que la recta de ecuación $y = -2ex$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -\dfrac{1}{2}$.

   Como $f(-1/2) = e \Rightarrow$ El punto de tangencia es $(-1/2, e)$.
   Como $f'(x) = -2e^{-2x} \Rightarrow$ La pendiente de la tangente es: $m = f'(-1/2) = -2e$.
   Por tanto, la ecuación de la tangente es:

   $$y - e = -2e\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -2ex - e + e \Rightarrow \boxed{y = -2ex}$$

6) (Parte de un problema de Selectividad de Ciencias y Tecnología 2009) Considera la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = -1$.

   Como $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$, el punto de tangencia es $(-1, 2)$.
   Y como $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow$ la pendiente de la tangente es $m = f'(-1) = 0$ (es horizontal).
   Luego la ecuación es: $y - 2 = 0\cdot(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = 2}$.

7) (Selectividad de Ciencias Sociales 2005) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f definida de la forma $f(x)=1+\mathrm{L}(2x-1)$ en el punto de abscisa $x = 1$. (L denota *logaritmo neperiano)*

Del punto de tangencia, donde la recta y la curva se tocan, conocemos x=1. La segunda coordenada de dicho punto, al ser un punto de f, será, por tanto: $f(1) = 1+\mathrm{L}(2-1) = 1 + \mathrm{L}1 = 1+0 = 1 \Rightarrow$ El punto es (1, 1)

Para la pendiente de la tangente, necesitamos la función derivada: $f'(x)=0+\dfrac{2}{2x-1} = \dfrac{2}{2x-1} \Rightarrow f'(1)=\dfrac{2}{2-1}=\dfrac{2}{1}= 2$ será la pendiente, puesto que $x = 1$ es la primera coordenada del punto de tangencia.

Aplicando la ecuación punto-pendiente de la recta, la tangente será: $y - 1 = 2(x - 1)$ $\Rightarrow y = 2x - 2 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$

8) (Selectividad de Ciencias Sociales, anterior a 2002) Dada la función f(x) = $\dfrac{3x+7}{x+2}$,

a) Calcule los puntos de la gráfica de dicha función donde la tangente tiene pendiente –1.

Según la interpretación geométrica de la derivada, la pendiente de la recta tangente a una función en el punto $(x, f(x))$ vale $f'(x)$. Por el enunciado del problema, dicha pendiente debe valer –1. Veamos el valor de x para que eso ocurra:

$$f'(x) = \frac{3(x+2)-(3x+7)}{(x+2)^2} = \frac{3x+6-3x-7}{(x+2)^2} = -\frac{1}{(x+2)^2} = -1 \Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2} = 1$$

$$\Rightarrow 1 = (x+2)^2 \Rightarrow 1 = x^2+4x+4 \Rightarrow 0 = x^2+4x+3 \Rightarrow x = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} =$$

$$\frac{-4\pm 2}{2} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ Los puntos donde ocurre son, entonces: (–1, 4) y (–3, 2).

No nos piden las ecuaciones de las rectas tangentes, pero usando la ecuación punto pendiente: $y-y_0=m(x-x_0)$, serían, respectivamente:

$y-4 = -1(x+1) \Rightarrow y = -x-1+4 \Rightarrow \boxed{y = -x+3}$

$y-2 = -1(x+3) \Rightarrow y = -x-3+2 \Rightarrow \boxed{y = -x-1}$

b) Explique, razonadamente, si puede existir algún punto de tangente horizontal en esta función.

Debería ser 0 la pendiente, para que la recta tangente fuese horizontal. Entonces:

$f'(x) = 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow -1 = 0$, que no es posible.

9) a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 1$ en cada uno de los puntos en los que su pendiente sea igual a 3

Para calcular la ecuación de la recta tangente a una curva, necesitamos un punto de dicha recta y su pendiente.

El punto será donde la recta toque a la curva; es decir, es un punto que está sobre la curva. De este punto sólo conoceremos, por lo general, la coordenada x; la segunda coordenada se hallará sustituyendo dicho valor de x en la fórmula de la función.

La pendiente es, según la interpretación geométrica de la derivada, el valor de la derivada en el valor del x del punto de tangencia.

Una vez que tenemos el punto de tangencia (a, f(a)) y la pendiente $m=f\,'(a)$, la recta tangente será, según la ecuación punto-pendiente: $y-f(a)=f\,'(a)(x-a)$

En este problema no nos dan el punto de tangencia, sino la pendiente: 3. La coordenada x de dicho punto será tal que $f\,'(x)=3$, por la interpretación geométrica de la derivada. Es decir:

$$f\,'(x)=3 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=-1 \text{ ó } x=1$$

Hay dos puntos donde eso ocurre, por lo que el problema tiene dos soluciones.

1ª: $x=1 \Rightarrow f(x)=f(1)=1-1=0 \Rightarrow$ El punto de tangencia es (1, 0). Como la pendiente es 3, la recta es: $y-0=3(x-1) \Rightarrow \boxed{y=3x-3}$

2ª: $x=-1 \Rightarrow f(x)=f(-1)=-1-1=-2 \Rightarrow$ El punto de tangencia es (–1, –2). Como la pendiente es 3, la recta es: $y+2=3(x+1) \Rightarrow y=3x+3-2 \Rightarrow \boxed{y=3x+1}$

b) Dada la función $f(x) = x^3+ax^2+b$, calcule a y b para que f(x) tenga un punto de inflexión en (–1, 2)

Primeramente, debe pasar por (–1, 2), para que pueda éste ser un punto de inflexión. Luego $f(-1)=2 \Rightarrow (-1)^3+a(-1)^2+b=2 \Rightarrow a+b=3$

Por otra parte, la x del punto de inflexión verifica que $f\,''(x)=0$. O sea: $f\,''(-1)=0 \Rightarrow$

Como $f\,'(x)=3x^2+2ax$ y $f\,''(x)=6x+2a$, será: $6(-1)+2a=0 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow \boxed{a=3}$

Sustituyendo en $a+b=3 \Rightarrow 3+b=3 \Rightarrow \boxed{b=0}$.

10) (Selectividad CCSS 2005) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si } x<1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

De los dos intervalos donde nos definen f de forma distinta, $x = 2$ pertenece a $[1, +\infty)$, donde $f(x) = \dfrac{2}{x}$. Nos limitamos a esta fórmula de f, pues.

Cuando $x = 2 \Rightarrow f(2) = \dfrac{2}{2} = 1 \Rightarrow$ El punto de tangencia es (2, 1).

La pendiente de la recta tangente será $f\,'(2)$, según la interpretación geométrica de la derivada. Como $f\,'(x) = -\dfrac{2}{x^2} \Rightarrow f\,'(2) = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

Luego la recta tangente será, usando la ecuación de la recta en forma punto-pendiente:

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x+1+1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x+2$$

11) (Selectividad CCSS 2009) Sea la función $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definida mediante:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x\leq 0 \\ x^3-x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

- Punto de tangencia: Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 1 + 1 = 1$. <u>Es (1, 1)</u>.
- Pendiente: <u>$m = f\,'(1) = 3\cdot 1^2 - 1 = 2$</u>

- Ecuación: Según la interpretación geométrica de la derivada, usando la ecuación de la recta en forma punto-pendiente, será:
$$y-1=2(x-1) \Rightarrow y=2x-2+1 \Rightarrow \boxed{y=2x-1}$$

12) (Selectividad CCSS 2011) Sea la función $f(x)=\begin{cases} -x+4 & \text{si} \quad x<2 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si} \quad 2\le x<4 \\ x^2-4x+1 & \text{si} \quad x\ge 4 \end{cases}$

Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 3$.

- Coordenadas del punto de tangencia: (3, 4/3).
- Pendiente en el punto de tangencia: $m = f\,'(3) = -4/9$, pues $f\,'(x) = -4/x^2$ cuando $2 < x < 4$, que es lo que corresponde a $x = 3$, punto en estudio.
- Ecuación de la tangente: $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y-\frac{4}{3}=-\frac{4}{9}(x-3) \Rightarrow$
$$9\left(y-\frac{4}{3}\right)=-4(x-3) \Rightarrow 9y - 12 = -4x + 12 \Rightarrow 9y = -4x + 24 \Rightarrow$$
$$\boxed{y=\frac{-4x+24}{9}}$$

13) (Selectividad Mat II 2012) Sea la función $f:(0, +\infty) \to \mathrm{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}+\ln(x)$ donde ln denota la función logaritmo neperiano. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

- Coordenadas del punto de tangencia: Si $x = e \Rightarrow f(e) = \frac{1}{e}+\ln(e) = \frac{1}{e}+1 = \frac{e+1}{e} \Rightarrow$ El punto donde se tocan la tangente y la función es: $(e, \frac{e+1}{e})$.
- Pendiente de la tangente: $f\,'(x) = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2} \Rightarrow m = f\,'(e) = \frac{e-1}{e^2}$
- Ecuación de la tangente: $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y-\frac{e+1}{e} = \frac{e-1}{e^2}(x-e) \Rightarrow y =$
$$\frac{e-1}{e^2}x+\frac{e+1}{e}-\frac{e-1}{e^2}e = \frac{e-1}{e^2}x+\frac{e+1-(e-1)}{e} \Rightarrow \boxed{y=\frac{e-1}{e^2}x+\frac{2}{e}}$$

14) (Selectividad Mat II 2013) Sea $f:(-\infty, 1) \to \mathrm{R}$ la función definida por
$$f(x) = \begin{cases} x+2e^{-x} & \text{si} \quad x\le 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si} \quad 0<x<1 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.
Para ser derivable, primero debe ser continua (en los puntos donde no sea continua no puede ser derivable, porque si lo fuese, sería continua, ya que derivabilidad implica continuidad). Por tanto, es obligatorio averiguar si tiene alguna discontinuidad, aunque no hay que clasificarla, de ser así.
   - <u>Intervalo $(-\infty, 0)$</u>: $f(x) = x + 2e^{-x}$, que es continua ya que las operaciones con funciones continuas resulta en una función continua: $y = x$ es continua en

todo R, e $y = 2e^{-x} = 2/e^x$ también, porque el denominador nunca se hace 0 ($e^x > 0\ \forall x$). Luego f es continua en todo $(0, +\infty)$.

- Intervalo (0, 1): $f(x) = a\sqrt{b-x}$. Al ser elemental, esta función será continua en su dominio, que es $b - x \geq 0 \iff x \leq b$. Como su dominio es, según nos dice el enunciado, $(-\infty, 1)$, b podría tomar cualquier valor mayor o igual que 1 y la función sería continua en este intervalo (si $b < 1$, por ejemplo $b = 0.5$, el dominio sólo llegaría hasta 0.5, por lo que no podría estar definida, ni ser continua por tanto, en (0, 1), y sabemos que sí lo está). Es decir, si $b \geq 1$, f es continua en (0, 1).
- $x = 0$: Los puntos que conectan una zona con otra deben estudiarse aparte. Para que sea continua aquí, se requiere:
  1) $\exists f(0) = 0 + 2e^0 = 2\cdot 1 = 2$.
  2) Debe existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Dado que la fórmula que define a f no es la misma a la izquierda y a la derecha de 1, debemos calcular los límites laterales para resolver este límite:
  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x + 2e^{-x}) = 0 + 2e^0 = 2\cdot 1 = 2$
  $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} a\sqrt{b-x} = a\sqrt{b}$
  El límite completo existirá cuando coincidan ambos resultados:
  $$a\sqrt{b} = 2$$
  3) Deben coincidir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ con $f(0)$, lo que sucede con la igualdad anterior.

Así que f será continua en su dominio si $\boxed{a\sqrt{b} = 2}$ siendo $b \geq 1$.

Derivemos f (sabemos que es continua y derivable en su dominio, por el enunciado):

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ a\dfrac{-1}{2\sqrt{b-x}} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

que es lo que podemos obtener derivando directamente, aplicando las fórmulas de las tablas de derivadas, que son válidas en intervalos abiertos, únicamente (las derivadas son límites, y requieren que, para cada punto, se pueda tender a él desde la derecha y la izquierda). Falta, entonces, hallar la derivada en $x = 0$.
La derivada por la izquierda coincidirá con el valor que da la fórmula que la define a la izquierda de $x = 0$: $f'(0^-) = 1 - 2e^0 = 1 - 2 = -1$.

Lo mismo por la derecha: $f'(0^+) = \dfrac{-a}{2\sqrt{b}}$.

Como sabemos que $\exists f'(0)$, porque f es derivable, estos valores coinciden:

$$\frac{-a}{2\sqrt{b}} = -1 \iff \boxed{a = 2\sqrt{b}}$$

Resolvemos el sistema que hemos obtenido de las dos condiciones a las que hemos llegado:

$$\left.\begin{array}{l} a\sqrt{b} = 2 \\ a = 2\sqrt{b} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\sqrt{b}\sqrt{b} = 2 \Rightarrow b = 1 \text{ (por sustitución de la 2ª en la 1ª)}$$

De donde: $a = 2\sqrt{b} = 2\cdot 1 = 2$.

Por tanto, $\boxed{a = 2 \text{ y } b = 1}$.

b) (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Si $x = 0$, tenemos:

- Punto de tangencia: Como $f(0) = 2$, según calculamos antes, es $(0, 2)$.
- Pendiente de la tangente: $m = f\,'(0) = -1$ (también se obtuvo antes).
- Recta tangente: $y - y_0 = m(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - 2 = -1(x - 0) \;\Rightarrow\; \boxed{y = -x + 2}$.
- Recta normal: La *normal* es la perpendicular a la tangente en el punto de tangencia. La *pendiente* de una recta perpendicular a otra cuya pendiente es m vale $-1/m$. Por tanto, la *pendiente* de la normal será siempre:

  $m' = -1 / f\,'(x_0)$, siendo x_0 la abscisa del punto de tangencia

  En nuestro caso: $m = -1 / (-1) = 1$. Luego la normal será:

  $$y - y_0 = m'(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - 2 = 1(x - 0) \;\Rightarrow\; \boxed{y = x + 2}.$$

15) (Selectividad Mat II Junio 99) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x$.

a) (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = a$.

- Punto de tangencia: Como $f(a) = e^a$, es (a, e^a).
- Pendiente de la tangente: $f\,'(x) = e^x \;\Rightarrow\; m = f\,'(a) = e^a$.
- Recta tangente: $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - e^a = e^a(x - a) \Rightarrow \boxed{y = e^a x + e^a(1 - a)}$.
- Recta normal: No la piden, pero nos ejercitamos calculándola. La *normal* es la perpendicular a la tangente en el punto de tangencia. La *pendiente* de una recta perpendicular a otra cuya pendiente es m vale $-1/m$. Por tanto, la *pendiente* de la normal será siempre:

  $m' = -1 / f\,'(x_0)$, siendo x_0 la abscisa del punto de tangencia

  En nuestro caso: $m = -1 / e^a = -e^{-a}$. Luego la normal será:

  $$y - y_0 = m'(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - e^a = -e^{-a}(x - a) \;\Rightarrow\; \boxed{y = -e^{-a}\,x + ae^{-a} + e^a}.$$

b) (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la recta de ecuación $2x - 2y + 1 = 0$.

La pendiente de $2x - 2y + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2y = 2x + 1 \;\Leftrightarrow\; y = x + 1/2$ vale 1.

La pendiente de la tangente en $(a, f(a))$ es $f\,'(a)$. Se tiene que $f\,'(x) = e^x$, por lo que $f\,'(a) = e^a$.

Como ambas rectas son paralelas, coinciden sus pendientes:

$$f\,'(a) = 1 \;\Leftrightarrow\; e^a = 1 \;\Leftrightarrow\; a = \ln 1 = 0.$$

Como $f(a) = f(0) = e^0 = 1$, el punto de tangencia es $(0, 1)$.

Así que la recta tangente es: $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 0) \;\Rightarrow\; \boxed{y = x + 1}$.

La normal, que tampoco piden (no se debe contestar en un examen a algo que no piden), tendría por pendiente $m' = -1 / 1 = -1$. Sería, pues (por el mismo punto):

$$y - 1 = -1(x - 0) \;\Rightarrow\; \boxed{y = -x + 1}$$

c) (1 punto) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 0)$ y es tangente a la gráfica de f.

El punto que nos dan no pertenece a la gráfica. El proceso de cálculo es diferente.

Supongamos que $(b, f(b))$ es el punto de tangencia, donde $f(b) = e^b$, pero no conocemos cuál es b. Vamos a averiguarlo.

La pendiente de la tangente sería: $f\,'(b) = e^b$.

Luego la recta tangente sería (a falta de conocer el valor de b):

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - e^b = e^b(x - b)$$

Obligamos a que esta recta pase por (1, 0):

$$0 - e^b = e^b(1 - b) \;\Rightarrow\; -e^b = e^b 1 - b\,e^b \;\Rightarrow\; b\,e^b = e^b + e^b \;\Rightarrow\; b = 2\,e^b / e^b = 2$$

Es decir, hay una única solución para el valor buscado b: $b = 2$.

Y como $f(2) = e^2$ y $f\,'(2) = e^2$, la recta tangente pedida es:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - e^2 = e^2(x - 2) \;\Rightarrow\; y = e^2x + e^2 - 2e^2 \;\Rightarrow\; \boxed{y = e^2x - e^2}$$