IES Fernando de Herrera **Curso 2015 / 16**

Segundo trimestre - Prueba de observación continua nº 1 – 2º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) De la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que alcanza un máximo relativo en $x = 1$, que la gráfica tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$ y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$. Calcular a, b, c y d. *(2,5 puntos)*

2) Sea f la función definida por $f(x) = |\ln(x)|$.
   a) Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 1$. *(0,5 puntos)*
   b) Calcular los puntos de corte de la gráfica de f con la recta $y = 1$. *(0,5 puntos)*
   c) Calcular el área del recinto citado. *(1,5 puntos)*

3) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$.
   a) Calcular los puntos de corte con los ejes. *(0,5 puntos)*
   b) Calcular las asíntotas. *(1 punto)*
   c) Estudiar la monotonía y calcular los extremos relativos. *(1 punto)*
   d) Esbozar la gráfica de la función, usando la información anterior. *(0,5 puntos)*

4) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = e^{-2x}$
   a) Justifica que la recta de ecuación $y = -2ex$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -\frac{1}{2}$. *(1 punto)*
   b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) De la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que alcanza un máximo relativo en $x = 1$, que la gráfica tiene un punto de inflexión en (0, 0) y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$. Calcular a, b, c y d. *(2,5 puntos)*

Dado que es polinómica, la función es indefinidamente derivable. Por tanto:

- Tiene un máximo relativo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$ y $f''(1) < 0$.
  Como $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$ (1)
  Y siendo $f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(1) = 6a + 2b < 0$ (2)
- Tiene un punto de inflexión en (0, 0). Así:
  - Pasa por (0, 0) $\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{d = 0}$ (3)
  - $f''(0) = 0$ y $f'''(0) \neq 0$:
    $f''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$ (4)
    Como $f'''(x) = 6a \Rightarrow 6a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ (5)
- $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4} \Rightarrow$ Teniendo en cuenta las condiciones (3) y (4):

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax^3 + cx)dx = \left[a\frac{x^4}{4} + c\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(a\frac{1}{4} + c\frac{1}{2}\right) - 0 =$$

$$= \frac{a + 2c}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow a + 2c = 5 \quad (6)$$

De las condiciones (1), (4) y (6):

$$\begin{cases} 3a + c = 0 \Rightarrow c = -3a. \text{ Sust. en la } 2^{\text{a}}: \\ a + 2c = 5 \Rightarrow (\text{De la } 1^{\text{a}}): a - 6a = 5 \Rightarrow -5a = 5 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \Rightarrow c = -3(-1) = 3$$

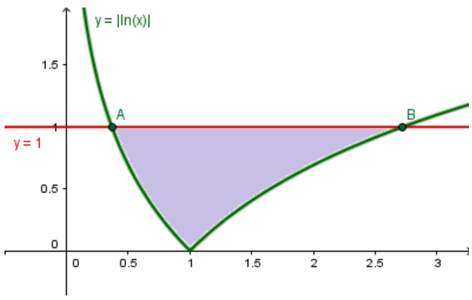
O sea: $\boxed{a = -1, b = 0, c = 3, d = 0}$, que verifican, también (2) y (5).

2) Sea f la función definida por $f(x) = |\ln(x)|$.

a) Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 1$. *(0,5 puntos)*

La gráfica de $y = \ln(x)$ es la de una función estándar, conocida. Su valor absoluto tiene la misma gráfica, pero con el tramo bajo OX sustituido por su simétrico respecto de dicho eje. Por tanto, queda la de la figura adjunta.

La recta $y = 1$ es horizontal, cortando en 1 a OY. También se ha llevado a la figura.



b) Calcular los puntos de corte de la gráfica de f con la recta $y = 1$. *(0,5 puntos)*

Los puntos están señalados en el gráfico anterior.

- A es intersección de $y = 1$ con el trozo simétrico respecto de OX, es decir, con $y = -\ln(x)$. Por tanto, igualando:
  $$-\ln(x) = 1 \Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1} \Rightarrow \boxed{A(e^{-1}, 1)}.$$
- B es intersección de $y = 1$ con $y = \ln(x)$. Del mismo modo:
  $$\ln(x) = 1 \Rightarrow x = e \Rightarrow \boxed{B(e, 1)}.$$

c) Calcular el área del recinto citado. *(1,5 puntos)*

La fórmula de la función inferior, $y = |\ln(x)|$, tiene dos expresiones distintas, al eliminar el valor absoluto, antes de $x = 1$ y después. Por tanto, dividimos el área en esas dos partes, por lo que:

$$A = \int_{e^{-1}}^{1} (1-(-\ln(x))dx + \int_{1}^{e} (1-\ln(x))dx = \int_{e^{-1}}^{1} (1+\ln(x))dx + \int_{1}^{e} dx - \int_{1}^{e} \ln(x)dx =$$

$$= \int_{e^{-1}}^{1} dx + \int_{e^{-1}}^{1} \ln(x)dx + \int_{1}^{e} dx - \int_{1}^{e} \ln(x)dx$$

Como $\int \ln(x)dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x) \Rightarrow & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow & v = x \end{bmatrix} = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - x$

(no ponemos la constante de integración, porque para usar el resultado con integrales definidas no es necesario), se tiene:

$$A = [x]_{e^{-1}}^{1} + [x\ln(x) - x]_{e^{-1}}^{1} + [x]_{1}^{e} - [x\ln(x) - x]_{1}^{e} =$$

$$= 1 - e^{-1} + (0-1) - (e^{-1}(-1) - e^{-1}) + e - 1 - (e\cdot 1 - e) + (1\cdot 0 - 1) =$$

$$= 1 - e^{-1} - 1 + e^{-1} + e^{-1} + e - 1 - 0 - 1 = \boxed{e + e^{-1} - 2}\ u^2.$$

3) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$.

a) Calcular los puntos de corte con los ejes. *(0,5 puntos)*

- $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1\cdot e^0 = 1$: $\boxed{(0, 1)}$.
- $y = 0 \Rightarrow (x^2 + 3x + 1)e^{-x} = 0 \Rightarrow$ (la exponencial no se anula nunca):

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cong (-2.62, 0) \text{ y } \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cong (-0.38, 0)}$$

b) Calcular las asíntotas. *(1 punto)*

- Verticales: $\boxed{\text{No tiene}}$, porque es una función continua en todo $\mathbb{R}$.
- Horizontales: El comportamiento de la exponencial difiere en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2 + 3x + 1)e^{-x} = +\infty\cdot(+\infty) = +\infty$$

Por tanto, $\boxed{\text{por } -\infty \text{ no hay asíntota vertical, pero la función se va a } +\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 + 3x + 1)e^{-x} = +\infty\cdot 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+1}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}, \text{L'Hôpital}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}, \text{L'Hôpital}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Luego $\boxed{y = 0 \text{ es asíntota horizontal si } x \to +\infty}$.

- Oblicuas: Sólo cabe estudiarla si $x \to -\infty$, pues por el otro lado ya sabemos el resultado: $y = 0$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+3x+1)e^{-x}}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}, \text{L'Hôpital}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(2x+3)e^{-x} - (x^2+3x+1)e^{-x}}{1} = \lim_{x\to-\infty} (-x^2 - x + 2)e^{-x} =$$
$$= -\infty(+\infty) = -\infty$$

$\boxed{\text{No tiene asíntota oblicua, pero tiende a ponerse vertical cuando } x \to -\infty}$.

c) Estudiar la monotonía y calcular los extremos relativos. *(1 punto)*

Tuvimos que derivar la función en el numerador del límite anterior:

$$f'(x) = (-x^2 - x + 2)e^{-x}.$$

- Discontinuidades de f ó de f': No hay, pues ambas son producto de funciones continuas.
- $f'(x) = 0$: Como la exponencial nunca se anula, debe ser $-x^2 - x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} = \frac{-1-3}{2} = -2 \\ = \frac{-1+3}{2} = 1 \end{cases}$$

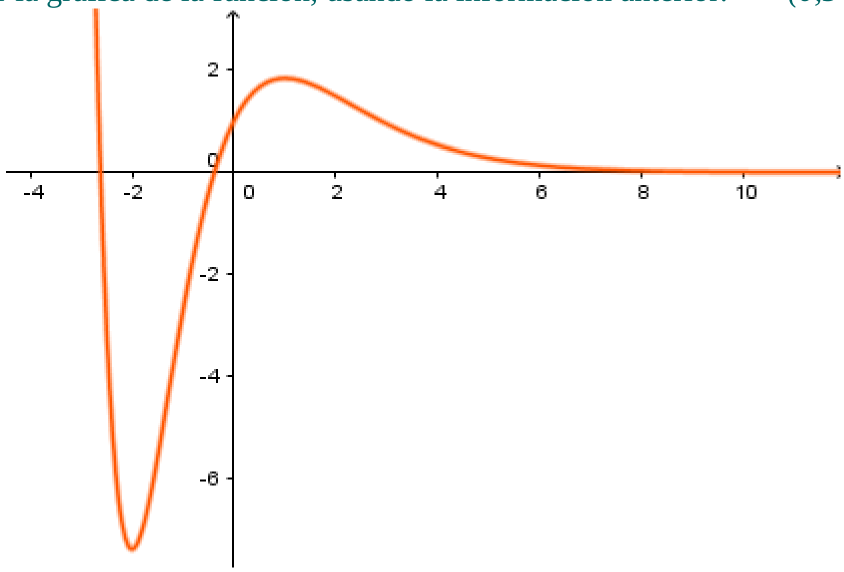
Por tanto:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	–	0	+	0	–
f	↘	Mín	↗	Máx	↘

$\boxed{\text{Es creciente en } (-2, 1) \text{ y decreciente en } (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)}$.

$\boxed{\text{Tiene un mínimo relativo en } (-2, -e^2) \cong (-2, -7.39) \text{ y un máximo relativo en } (1, 5/e) \cong (1, 1.84).}$

d) Esbozar la gráfica de la función, usando la información anterior. *(0,5 puntos)*



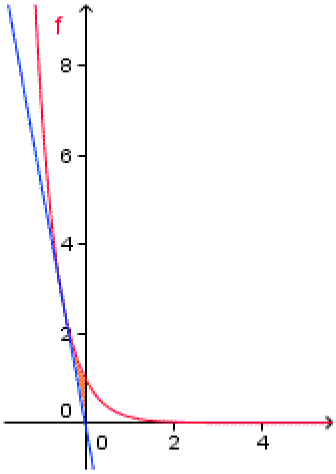
4) Sea $f : R \to R$ la función dada por $f(x) = e^{-2x}$

a) Justifica que la recta de ecuación $y = -2ex$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -\dfrac{1}{2}$. *(1 punto)*

Como $f(-1/2) = e \Rightarrow$ El punto de tangencia es $(-1/2, e)$.
Como $f'(x) = -2e^{-2x} \Rightarrow$ La pendiente de la tangente es: $m = f'(-1/2) = -2e$.
Por tanto, la ecuación de la tangente es:

$$y - e = -2e\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -2ex - e + e \Rightarrow \boxed{y = -2ex}$$

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior. *(1 punto)*



La gráfica de $y = e^{-x}$ debemos conocerla, y es como la de $y = e^{x}$ pero simétrica de ésta respecto de OY. La de $y = e^{-2x}$ debe ser similar, pero más estrecha, más condensada. Con esto y una pequeña tabla de valores podemos esbozar su gráfica.

El área será entonces la pequeña zona naranja del gráfico adjunto.

$$A = \int_{-1/2}^{0}\left[e^{-2x} - (2ex)\right]dx = \int_{-1/2}^{0}(e^{-2x} + 2ex)dx =$$

$$\left[\frac{e^{-2x}}{-2} + ex^2\right]_{-1/2}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{2} - \left(\frac{e}{-2} + e\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{e}{2} - \frac{e}{4} = \frac{2e - e - 2}{4} = \frac{e-2}{4} \quad u^2$$

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta permanente**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Sea g la función definida por $g(x) = \ln(x)$ para $x > 0$ (ln denota la función logaritmo neperiano). Calcular el valor de $a > 1$ para el que el área del recinto limitado por la gráfica de g, el eje de abscisas y la recta $x = a$ es 1. *(2,5 puntos)*

2) Sea $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 4|$.
   a) Esbozar la gráfica de f. *(0,5 puntos)*
   b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 5$. *(2 ptos)*

3) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x \qquad\qquad + \alpha z = 2 \\ 2x + \alpha y \qquad\qquad = \alpha + 4 \\ 3x + \ y + \ (\alpha + 4)z = 7 \end{cases}$$

   a) Discutir el sistema según los valores de α. *(1,5 puntos)*
   b) Resolver el sistema para $\alpha = 2$. *(1 punto)*

4) Considerar las matrices:

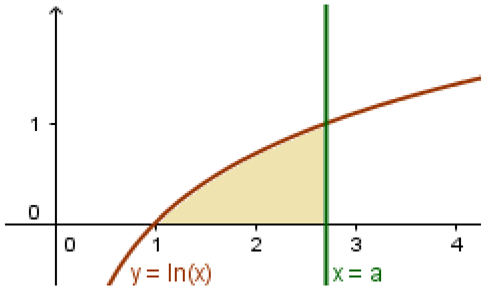
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) Hallar la matriz X que verifica que $AX - B = I$ (I denota la matriz identidad de orden 3). *(1,5 puntos)*
   b) Calcular el determinante de la matriz $(A^2B^{-1})^{2015}$. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Sea g la función definida por $g(x) = \ln(x)$ para $x > 0$ (ln denota la función logaritmo neperiano). Calcular el valor de $a > 1$ para el que el área del recinto limitado por la gráfica de g, el eje de abscisas y la recta $x = a$ es 1. *(2,5 puntos)*

La gráfica de g es conocida: con dominio en $(0, +\infty)$, asíntota vertical de ecuación $x = 0$, corta a OX en $x = 1$ y estrictamente creciente. La incluimos en el gráfico. Por tanto, dicha área es la siguiente, y calculamos la integral *por partes*:



$$A = \int_1^a \ln(x)dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x) & \Rightarrow & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= [x\ln(x)]_1^a - \int_1^a x\frac{dx}{x} = a\ln(a) - 1\ln(1) - \int_1^a dx = a\ln(a) - 0 - [x]_1^a =$$

$$= a\ln(a) - (a - 1) = a\ln(a) - a + 1$$

Según el enunciado, debe valer 1:

$$a\ln(a) - a + 1 = 1 \Leftrightarrow a\ln(a) - a = 0 \Leftrightarrow a(\ln(a) - 1) = 0$$

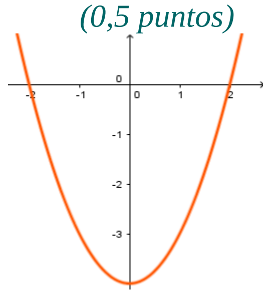
Un producto se anula si, y sólo si alguno de los factores lo hace. Por tanto, lo anterior es cierto si, y sólo si:

- $a = 0$, que no es válida, porque debe ser $a > 1$ y porque $\nexists \ln(a)$, ó:
- $\ln(a) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(a) = 1 \Leftrightarrow e^1 = a \Leftrightarrow \boxed{a = e}$.

2) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 4|$.

a) Esbozar la gráfica de f. *(0,5 puntos)*

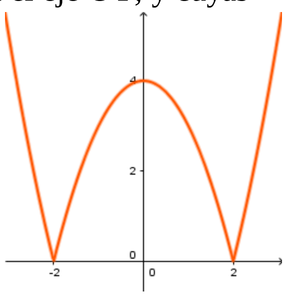
La gráfica del valor absoluto de una función es la de dicha función cambiando los tramos que queden bajo el eje OX por sus respectivos simétricos respecto al mismo. Se tiene que $y = x^2 - 4$ es una parábola *convexa* (porque el coeficiente de x^2 es positivo), cuyo *eje* es la recta $x = \dfrac{-b}{2a}$, que en este caso es: $x = 0$, su *vértice* es $(0, -4)$ (mínimo relativo y absoluto), punto que constituye, además la intersección con el eje OY, y cuyas intersecciones con OX las siguientes:



$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2, \text{ de donde: } (-2, 0) \text{ y } (2, 0)$$

la gráfica es la de la primera imagen.

Por tanto, y según lo dicho antes, la de f es la del segundo gráfico.

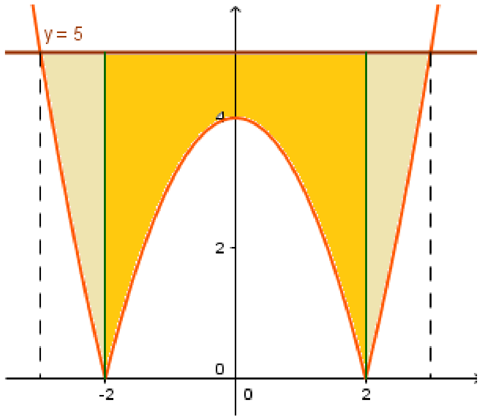


b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 5$. *(2 ptos)*

Si añadimos la recta $y = 5$, tenemos el recinto (ver gráfico). El área entre dos curvas que se cortan en dos puntos es la integral definida entre las abscisas de los puntos donde se intersectan de la función de la parte superior menos la de la que queda bajo ella.

Como no podemos integrar el valor absoluto, hemos de diferenciar las zonas donde la gráfica coincide con la de $y = x^2 - 4$ de la zona donde la gráfica de f es la opuesta: $y = -x^2 + 4$.

Calculamos los puntos de corte con $y = 5$. Dado que el máximo relativo está en (0, 4), sólo tiene intersección con la parte de la gráfica en la que f coincide con $y = x^2 - 4$:



$$\begin{cases} y = 5 \\ y = x^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ ó } x = -3$$

En el gráfico hemos diferenciado las distintas zonas, por lo que el área que nos piden es:

$$A = \int_{-3}^{-2}(5-(x^2-4))dx + \int_{-2}^{2}(5-(-x^2+4))dx + \int_{2}^{3}(5-(x^2-4))dx$$

Por simetría *par* de las funciones, eso es igual a:

$$\boxed{A =} 2\int_{0}^{2}(5-(-x^2+4))dx + 2\int_{2}^{3}(5-(x^2-4))dx =$$

$$= 2\int_{0}^{2}(5+x^2-4)dx + 2\int_{2}^{3}(5-x^2+4)dx = 2\int_{0}^{2}(1+x^2)dx + 2\int_{2}^{3}(9-x^2)dx =$$

$$= 2\left[x+\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + 2\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = 2\left(2+\frac{8}{3}-0\right)+2\left[\left(27-\frac{27}{3}\right)-\left(18-\frac{8}{3}\right)\right] = \boxed{\frac{44}{3}\ u^2}$$

3) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x \quad\quad\quad + \alpha z = 2 \\ 2x + \alpha y \quad\quad\quad = \alpha + 4 \\ 3x + \ \ y + (\alpha+4)z = 7 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los valores de α. *(1,5 puntos)*

La matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 2 \\ 2 & \alpha & 0 & \alpha+4 \\ 3 & 1 & \alpha+4 & 7 \end{pmatrix}$$

Como: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha+4 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha + 4) + 2\alpha - 3\alpha^2 = -2\alpha^2 + 6\alpha = -2\alpha(\alpha - 3)$, se tiene que $|A| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ó $\alpha = 3$. Distinguimos los siguientes casos:

- $\underline{\alpha \neq 0 \text{ y } \alpha \neq 3}$: El propio determinante de la matriz de los coeficientes es menor principal (no nulo) $\Rightarrow$ $r(A) = 3$ $\Rightarrow$ $r(A') = 3$ (no puede ser mayor, puesto que sólo tiene 3 filas). Como ambos rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, es un $\boxed{\text{sistema compatible determinado}}$.

- $\underline{\alpha = 0}$: En este caso, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Como $F_2 = 2\,F_1$, podemos eliminar F_2 a efectos de calcular el rango. Y dado que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, se trata de un menor principal, formado por las nuevas F_1 y F_2 (después de haber suprimido la antigua F_2, con lo que la matriz se queda sólo con dos filas) y C_1 y C_2. Luego $r(A) = 2$ y $r(A') = 2$ (no quedan más que dos filas) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Sistema compatible indeterminado}}$.
- $\underline{\alpha = 3}$: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$. Como $|A| = 0$, según lo anterior, y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ $\Rightarrow$ $r(A) = 2$. Orlando dicho menor, en A' ya, con F_3 y C_4:
  $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 4 - 18 - 7 = 0 \Rightarrow r(A') = 2 \text{ (el mismo menor ppal)}$$
  Así, es un $\boxed{\text{sistema compatible indeterminado}}$, porque dicho valor común es inferior al número de incógnitas.

b) Resolver el sistema para $\alpha = 2$. *(1 punto)*
Se tiene que:
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
No se puede simplificar ninguna fila, y hay triangularización, por lo que no seguimos. Hemos llegado a lo que sabíamos de antes por *Rouché-Fröbenius*: que es un *sistema compatible determinado*. Reconstruyendo el sistema:
- $\underline{3^a \text{ ec}}$: $y = 1$.
- $\underline{2^a \text{ ec}}$: $1 - 2z = 1 \Rightarrow z = 0$.
- $\underline{1^a \text{ ec}}$: $x = 2$.

$\boxed{\text{La solución única es: } (x, y, z) = (2, 1, 0)}$.

4) Considerar las matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
a) Hallar la matriz X que verifica que $AX - B = I$ (I denota la matriz identidad de orden 3). *(1,5 puntos)*
$$AX - B = I \Rightarrow AX = I + B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(I + B) \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}(I + B)}$$
Calculamos A^{-1}:
$$|A| = 18 + 3 + 4 - 2 - 9 - 12 = 2$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} =} \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1}(I+B) = \begin{pmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 7/2 & 1/2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

b) Calcular el determinante de la matriz $(A^2B^{-1})^{2015}$. *(1 punto)*

Como el determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los respectivos determinantes, y dado que $|B^{-1}| = 1 / |B|$, se tiene:

$$|B| = -1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A^2B^{-1}| = |A^2||B^{-1}| = |A|^2 \frac{1}{|B|} = 2^2 \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(A^2B^{-1})^{2015}| = |A^2B^{-1}|^{2015} = 1^{2015} = \boxed{1}$$

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

Quien suba nota o recupere 1ª + 2ª evaluaciones, debe elegir 4 problemas entre los que debe estar el 5.

Quien recupere sólo la 2ª evaluación no debe hacer el problema 1.

1) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo? (Recordar que el volumen del cono es: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$). *(2,5 puntos)*

2) Sea f la función definida por $f(x) = xe^{1/x}$ para $x \geq -1,\ x \neq 0$.
   a) Calcular los límites laterales de f en $x = 0$. *(1 punto)*
   b) Estudiar y determinar las asíntotas de la gráfica de f. *(1,5 puntos)*

3) Calcular: $\int_2^3 \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x - 2}\,dx$ *(2,5 puntos)*

4) Calcular los valores de a y b sabiendo que la función f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + b \ln(x)$ tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que

$$\int_1^4 f(x)dx = 27 - 8\ln(4)$$ *(2,5 puntos)*

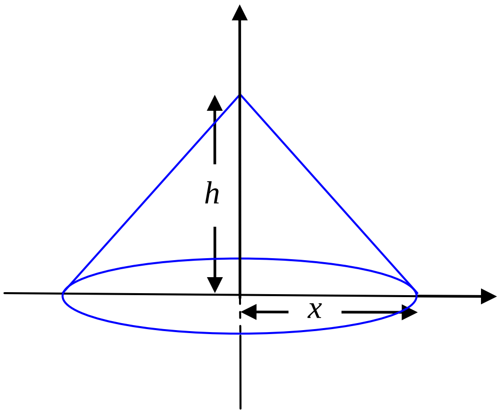
5) Considerar el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{array}\right\}$$

   a) Calcular razonadamente un valor de λ para que el sistema resultante al añadirle la ecuación $x + y + \lambda z = 9$ sea compatible indeterminado. Si así fuera, resolverlo. *(2 puntos)*
   b) ¿Existe algún valor de λ para el cual el sistema resultante no tiene solución? *(0,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo? (Recordar que el volumen del cono es: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$).



Si llamamos x al radio de la base, h a la altura del cono, como ambas medidas son los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa 90, se tiene:

$$x^2 + h^2 = 90^2 \Rightarrow h = \sqrt{8100 - x^2}$$

donde la raíz es positiva (lo contrario nos llevaría a una altura negativa).
Es evidente que el menor valor posible para x es 0, y el máximo es el que haga que el radicando aún exista, que coincidirá con $h = 0$; esto es:

$$x^2 = 90^2 \Rightarrow x = 90$$

Por tanto, $x \in [0, 90]$. En los extremos de este dominio el cono degenera y tendrá volumen nulo. Lo que hay que maximizar es el volumen:

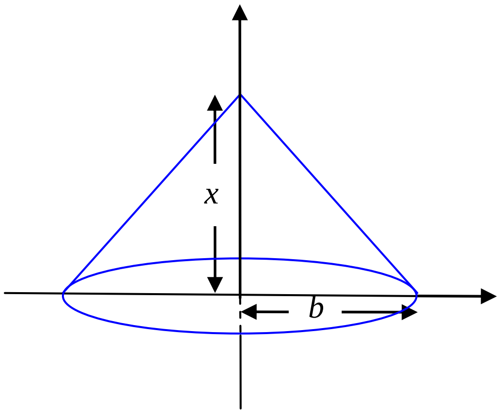
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{8100 - x^2}$$

Para facilitar las cosas, nos interesa mejor dejar el *volumen* en función de la *altura*, porque así eliminaremos la raíz. De modo que cambiamos y reconstruimos el problema.
Llamamos b a la base y x a la altura:

$$b^2 + x^2 = 90^2 \Rightarrow b = \sqrt{8100 - x^2}$$

con $x \in [0, 90]$ por idéntico razonamiento.
Ahora:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi(8100 - x^2)x = \frac{1}{3}\pi(8100x - x^3)$$



Se trata de una función polinómica, por lo que no tiene discontinuidades, ni ella ni su derivada.
Así, hay que comparar imágenes de:

- Extremos del dominio: 0; 90.
- Discontinuidades de V: No hay.
- Discontinuidades de V': No hay.
- $V'(x) = 0$: $\frac{1}{3}\pi(8100 - 3x^2) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 8100 \Rightarrow x^2 = 2700 \Rightarrow x = 30\sqrt{3}$

  (la solución negativa, la descartamos porque no está en el dominio).

Y como:

- $V(0) = 0$
- $V(90) = 0$
- $V(30\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi(243000\sqrt{3} - 81000\sqrt{3}) = 54000\pi\sqrt{3}$

Por tanto:

El volumen máximo valdrá $54000\pi\sqrt{3}\,u^3$, y se conseguirá para una altura de $30\sqrt{3}$ u y una base de $b = \sqrt{8100-(30\sqrt{3})^2} = 30\sqrt{6}$ u

2) Sea f la función definida por $f(x) = xe^{1/x}$ para $x \geq -1,\ x \neq 0$.

a) Calcular los límites laterales de f en $x = 0$. *(1 punto)*

Hay que considerar el distinto comportamiento en $-\infty$ y en $+\infty$ de la función exponencial.

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} =} \left(0e^{-\infty}\right) = 0\cdot 0 = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \left(0e^{+\infty} = 0\cdot\infty\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1/x}}{1/x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

Aquí, nos hemos topado con una indeterminación. Al cambiar la expresión, estamos en las condiciones de aplicar la Regla de L'Hôpital, puesto que las funciones del numerador y denominador son continuas y derivables salvo en $x = 0$. Como:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty}$$

b) Estudiar y determinar las asíntotas de la gráfica de f. *(1,5 puntos)*

- Asíntotas verticales: Hay que investigar los extremos del dominio, si son finitos (en este caso, $x = -1$) y las discontinuidades ($x = 0$). Como:

  Como $\lim_{x\to -1^+} xe^{\frac{1}{x}} = -e^{-1} \Rightarrow$ En $x = -1$ no hay asíntota vertical

  Según el apartado anterior, la recta $\boxed{x = 0 \text{ es asíntota vertical}}$ (la función se acerca a ella sólo por la derecha).

- Asíntotas horizontales: Sólo cuando $x \to +\infty$, pues no puede tender a $-\infty$ por el dominio que tiene.

  $$\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \left(+\infty\cdot e^{1/\infty} = +\infty\cdot e^0 = +\infty\cdot 1\right) = +\infty \Rightarrow \boxed{\text{No tiene asíntota horizontal}}.$$

- Asíntota oblicua: Del mismo modo, sólo cuando $x \to +\infty$:

  $$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

  $$n = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = (+\infty\cdot 0) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

  Como sucedió antes, hemos cambiado la indeterminación encontrada por otra en la que podemos aplicar L'Hôpital, al ser las funciones del numerador y denominador continuas y derivables (salvo en $x = 0$, que no está en las proximidades de ∞). Por ello:

  $$\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{1/x} = e^0 = 1 \Rightarrow n = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = 1$$

  Por ello, la recta $\boxed{y = x + 1 \text{ es asíntota oblicua si } x \to +\infty}$.

3) Calcular: $\int_2^3 \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}dx$ *(2,5 puntos)*

Realizaremos la integral indefinida y luego cambiaremos a la definida. Estamos ante una integral racional. Como el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, comenzamos por realizar la división de uno entre el otro:

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2 & x^2+x-2 \\ \cline{2-2} -x^3-x^2+2x & x \\ \hline 2x & \end{array}$$

De donde:

$$\frac{x^3+x^2}{x^2+x-2} = \frac{x(x^2+x-2)+2x}{x^2+x-2} = x + \frac{2x}{x^2+x-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}dx = \int xdx + \int \frac{2x}{x^2+x-2}dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{2x}{x^2+x-2}dx$$

Para calcular esta segunda integral, descomponemos en suma de fracciones simples. Teniendo presente que $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ó $x = 1$:

$$\frac{2x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{x^2+x-2}$$

Tienen que coincidir los numeradores, puesto que los denominadores lo hacen:

- $x = 1$: $2 = 3B \Rightarrow B = 2/3$
- $x = -2$: $-4 = -3A \Rightarrow A = 4/3$

Entonces:

$$\int \frac{2x}{x^2+x-2}dx = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} = \frac{4}{3}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-1|$$

Finalmente:

$$\int_2^3 \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}dx = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|\right]_2^3 =$$

$$= \left(\frac{9}{2}+\frac{4}{3}\ln 5+\frac{2}{3}\ln 2-\left(\frac{4}{2}+\frac{4}{3}\ln 4+\frac{2}{3}\ln 1\right)\right) = \boxed{\frac{5}{2}+\frac{4}{3}(\ln 5-\ln 4)+\frac{2}{3}\ln 2}$$

4) Calcular los valores de a y b sabiendo que la función f: $(0, +\infty) \to R$ definida por $f(x) = ax^2 + b\ln(x)$ tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que

$$\int_1^4 f(x)dx = 27 - 8\ln(4)$$ *(2,5 puntos)*

- f tiene un extremo relativo en $x = 1$. Como es derivable hasta, al menos, la segunda derivada, para que esto suceda bastará exigirle que $f'(1) = 0$ y que $f''(1) \neq 0$:

$$f'(x) = 2ax + \frac{b}{x} \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a$$

- Y la otra condición nos lleva a:

$$\int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 (ax^2+b\ln(x))dx = \left[a\frac{x^3}{3}\right]_1^4 + b\int_1^4 \ln(x)dx =$$

$$\left(\frac{64a}{3}-\frac{a}{3}\right)+b\int_1^4 \ln(x)dx = \frac{63a}{3}+b\int_1^4 \ln(x)dx = 21a+b\int_1^4 \ln(x)dx$$

Como:

$$\int_1^4 \ln(x)dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x) & \Rightarrow & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x \end{bmatrix} = \left[x\ln(x)\right]_1^4 - \int_1^4 x\frac{dx}{x} =$$

$$= \left[4\ln(4) - 1\ln(1)\right] - \int_1^4 dx = 4\ln(4) - \left[x\right]_1^4\ 4\ln(4) - (4-1) = 4\ln(4) - 3$$

Llegamos, sustituyendo donde antes, a que:

$$\int_1^4 f(x)dx = 21a + b[4\ln(4) - 3] =$$

Como sabemos que $b = -2a$:

$$= 21a - 2a[4\ln(4) - 3] = 21a - 8a\ln(4) + 6a = 27a - 8a\ln(4) = a[27 - 8\ln(4)]$$

Y el resultado de la integral es 27 – 8 ln(4), según el enunciado:

$$a[27 - 8\ln(4)] = 27 - 8\ln(4) \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -2a = -2\cdot 1 = -2$$

O sea: $\boxed{a = 1,\ b = -2}$.

Regresamos a comprobar que $f''(1) \neq 0$:

$$f'(x) = 2ax + \frac{b}{x} = 2x - \frac{2}{x} \Rightarrow f''(x) = 2 + \frac{2}{x^2} \Rightarrow f''(1) = 4 \neq 0$$

5) Considerar el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{array}\right\}$$

a) Calcular razonadamente un valor de λ para que el sistema resultante al añadirle la ecuación $x + y + \lambda z = 9$ sea compatible indeterminado. Si así fuera, resolverlo. *(2 puntos)*

Con la nueva ecuación, tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, dependiente del parámetro λ, cuyo determinante de la *matriz de los coeficientes* vale:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ x + y + \lambda z = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -9\lambda - 2 + 2 + 3 + 4\lambda - 3 = -5\lambda$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$. Entonces:

- Si $\lambda \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A') = 3 \Rightarrow$ El sistema sería *compatible determinado*.
- Si $\lambda = 0 \Rightarrow r(A) = 2$, porque $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Si lo orlamos con la tercera fila y cuarta columna de la *matriz ampliada*, tendremos:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -81 + 8 + 10 + 15 + 36 + 12 = 0 \Rightarrow r(A') = 2$$

Lo que nos lleva a un $\boxed{\textit{sistema compatible indeterminado}\text{, cuando } \lambda = 0}$.

Nos piden resolverlo. Eliminamos la última ecuación, porque no forma parte del menor principal, y aplicamos la *Regla de Cramer* (llamamos $z = t$):

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 - z \\ 2x - 3y = -4 - z \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5-t & -2 \\ -4-t & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-15+3t-8-2t}{-5} = \frac{23-t}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5-t \\ 2 & -4-t \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-12-3t-10+2t}{-5} = \frac{22+t}{5}$$

$z = t$

Infinitas soluciones en función de t: $\boxed{\left(\frac{23-t}{5}, \frac{22+t}{5}, t\right)}$

b) ¿Existe algún valor de λ para el cual el sistema resultante no tiene solución?

(0,5 puntos)

Según el estudio completo que se hizo en el apartado anterior, $\boxed{\text{no lo hay}}$, pues si $\lambda = 0$ es *compatible indeterminado* (infinitas soluciones) y si $\lambda \neq 0$ es *compatible determinado* (solución única).