IES Fernando de Herrera **Curso 2016 / 17**

Segundo trimestre – Observación evaluable escrita nº 1 – 2º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Calcular: $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x^2-x)(x-1)}$ *(2,5 puntos)*

2) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x\,|x-1|$.

   a) Esbozar la gráfica de f *(0,5 puntos)*

   b) Comprobar que la recta de ecuación $y=x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$. *(0,7 puntos)*

   c) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f y la de dicha tangente. *(1,3 puntos)*

3) a) Sean las matrices: *(1,5 puntos)*

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

   Determinar la matriz X que verifica $AX-B^t=2C$.

   b) Sean A, B, C y X matrices cuadradas de orden 3 que verifican $AXB=C$. Si se sabe que el determinante de A es 3, el de B es -1 y el de C es 6, calcular el determinante de las matrices X y $2X$. *(1 punto)*

4) Tratamos de adivinar, mediante ciertas pistas, los precios de tres productos A, B y C.

   - Pista 1: Si compramos una unidad de A, dos de B y una de C gastamos 118€.
   - Pista 2: Si compramos n unidades de A, $n+3$ de B y tres de C gastamos 390€.

   a) ¿Hay algún valor de n para el que estas dos pistas sean incompatibles? *(1,5 ptos)*

   b) Sabiendo que $n=4$ y que el producto C cuesta el triple que el producto A, calcular el precio de cada producto. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Calcular: $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2-x)(x-1)}$ *(2,5 puntos)*

Estamos ante una integral racional. Como el grado del numerador es estrictamente menor que el del denominador, es aplicable el *Teorema de Descomposición en Suma de Fracciones Simples*. Como, además, $(x^2 – x)(x – 1) = x(x – 1)(x – 1) = x(x – 1)^2$, se tiene:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

Si igualamos los numeradores, será cierta la igualdad:

$$A(x – 1)^2 + Bx(x – 1) + Cx = 1$$

Damos valores a x:

- $x = 0$: $A = 1$
- $x = 1$: $C = 1$
- $x = 2$: $A + 2B + 2C = 1 \Rightarrow 1 + 2B + 2 = 1 \Rightarrow 2B = –2 \Rightarrow B = –1$

Por tanto:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2-x)(x-1)} = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx - \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x-1} dx + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x-1)^2} dx =$$

$$= [\ln|x|]_{-2}^{-1} - [\ln|x-1|]_{-2}^{-1} + \int_{-2}^{-1} (x-1)^{-2} dx =$$

$$= (\ln 1 – \ln 2) – (\ln 2 – \ln 3) + \left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{-2}^{-1} =$$

$$= – \ln 2 – \ln 2 + \ln 3 + \left[-\frac{1}{x-1}\right]_{-2}^{-1} = – 2 \ln 2 + \ln 3 + \left(-\frac{1}{-2} + \frac{1}{-3}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{6} – 2 \ln 2 + \ln 3}$$

2) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x\,|x – 1|$.

a) Esbozar la gráfica de f *(0,5 puntos)*

Como $|z| = \begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow$

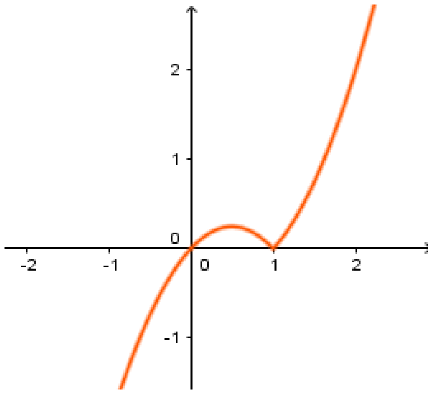
$$|x – 1| = \begin{cases} -(x-1) & \text{si } x-1<0 \\ x-1 & \text{si } x-1\ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -(x-1) & \text{si } x<1 \\ x-1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x) = x\,|x – 1| = \begin{cases} x[-(x-1)] & \text{si } x<1 \\ x(x-1) & \text{si } x\ge 1 \end{cases} = \begin{cases} -x^2+x & \text{si } x<1 \\ x^2-x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

La función $y = x^2 – x$ es una parábola que:

- Es *convexa*, pues el coeficiente de x^2 es positivo.
- Cortes con los ejes:
  $y = 0 \Rightarrow x(x – 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 1$: (0, 0) y (1, 0).
  $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$.
- Eje: $x = –b/2a \Rightarrow x = ½$ (recta vertical)
- Vértice: (1/2, –1/4).

La función $y = -x^2 + x$ es la opuesta de la anterior, por lo que tiene su misma gráfica pero simétrica respecto del eje OX. Ésta coincide con f en $(-\infty, 1)$ y la anterior, en $[1, +\infty)$. Por tanto, la gráfica es la que se adjunta.

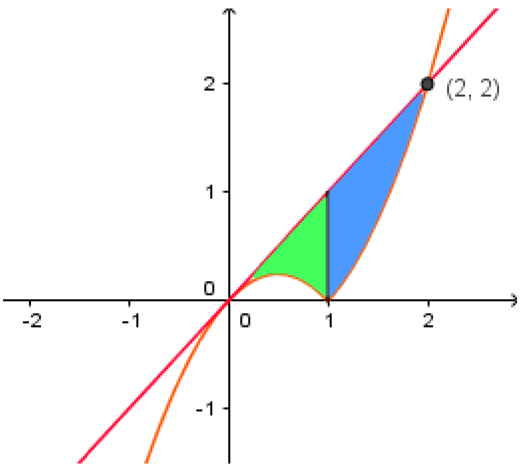


b) Comprobar que la recta de ecuación $y = x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$. *(0,7 puntos)*

En un entorno de $x = 0$, $f(x) = -x^2 + x$, por lo que trabajaremos solo con esta fórmula.

- Punto de tangencia: $(0, 0)$, pues $f(0) = 0$.
- Pendiente de la tangente: $f'(x) = -2x + 1 \Rightarrow m = f'(0) = 1$
- Ecuación de la tangente: $y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x}$.

c) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f y la de dicha tangente. *(1,3 puntos)*



Las intersecciones de la tangente y $f(x)$ son el punto de contacto $(0, 0)$ y:

$$\left.\begin{array}{r} y = x \\ y = x^2 - x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - x = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = 2.$$

Por otra parte, antes de $x = 1$ f tiene una expresión y otra después. Por tanto, el área hay que calcularla diferenciando las zonas:

$$A = \int_0^1 [x - (-x^2 + x)]dx + \int_1^2 [x - (x^2 - x)]dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left[\left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right] = \boxed{1\ u^2}$$

3) a) Sean las matrices: *(1,5 puntos)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz X que verifica $AX - B^t = 2C$.

$$AX - B^t = 2C \Rightarrow AX - B^t + B^t = 2C + B^t \Rightarrow AX = 2C + B^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(2C + B^t) \Rightarrow X = A^{-1}(2C + B^t)$$

que será posible calcular si A es invertible. Veamos si es así, y hagamos los cálculos, en su caso.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 1 + 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$2C + B^t = 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1}(2C + B^t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -9/4 & -1/2 \\ -11/4 & -9/2 \\ -17/4 & -15/2 \end{pmatrix}}$$

b) Sean A, B, C y X matrices cuadradas de orden 3 que verifican $AXB = C$. Si se sabe que el determinante de A es 3, el de B es –1 y el de C es 6, calcular el determinante de las matrices X y $2X$. *(1 punto)*

El determinante de un producto de matrices cuadradas es el producto de los respectivos determinantes. Por tanto, como los determinantes son números reales:

$$AXB = C \Rightarrow |AXB| = |C| \Rightarrow |A|\,|X|\,|B| = |C| \Rightarrow 3\,|X|\,(-1) = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|X| =} -6/3 = \boxed{-2}$$

$2X$ es la matriz X con todas sus posiciones multiplicadas por 2. En un determinante, se puede extraer factor común de cada fila, por separado. Por ello:

$$\boxed{|2X| =} 2\cdot2\cdot2\cdot(-2) = \boxed{-16}$$

4) Tratamos de adivinar, mediante ciertas pistas, los precios de tres productos A, B y C.

- <u>Pista 1</u>: Si compramos una unidad de A, dos de B y una de C gastamos 118€.
- <u>Pista 2</u>: Si compramos n unidades de A, $n + 3$ de B y tres de C gastamos 390€.

a) ¿Hay algún valor de n para el que estas dos pistas sean incompatibles?*(1,5 ptos)*

Siendo x, y, z los respectivos precios de A, B, C, las pistas nos llevan a un sistema de dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=118 \\ nx+(n+3)y+3z=390 \end{array}\right\} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 118 \\ n & n+3 & 3 & 390 \end{pmatrix}$$

Buscamos el menor de mayor orden posible y que contenga el menor número de veces al parámetro n. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n & 3 \end{vmatrix} = 3 - n = 0 \Leftrightarrow n = 3$, se tiene:

- <u>$n \neq 3$</u>: $r(A) = 2 \Rightarrow r(A') = 2$, porque A' solo tiene dos filas, por lo que no puede tener 3 filas linealmente independientes, y el rango es el máximo número de filas (y de columnas, que coincide) linealmente independientes. Por tanto, el <u>sistema</u> será <u>compatible indeterminado</u>.

- <u>$n = 3$</u>: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 3 & 6 & 3 & 390 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$, por lo que es un <u>sistema incompatible</u>, porque la segunda ecuación es $0 = 36$, imposible para ningún valor de las incógnitas.

En definitiva, $\boxed{\text{las pistas son incompatibles si, y solo si } n = 3}$.

b) Sabiendo que $n = 4$ y que el producto C cuesta el triple que el producto A, calcular el precio de cada producto. *(1 punto)*

En este caso, el sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=118 \\ 4x+7y+3z=390 \\ z=3x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+z=118 \\ 4x+7y+3z=390 \\ 3x \quad -z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 4 & 7 & 3 & 390 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - 4F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 0 & -1 & -1 & -82 \\ 0 & -6 & -4 & -354 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 6F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 0 & -1 & -1 & -82 \\ 0 & 0 & 2 & 138 \end{array}\right)$$

- 3ª ec: $2z = 138 \Rightarrow z = 69$
- 2ª ec: $y = 82 - 69 = 13$
- 1ª ec: $x = 118 - 26 - 69 = 23$

Luego el producto $\boxed{A \text{ cuesta 23€, el } B\text{, 13€ y el } C\text{, 69€}}$.

IES Fernando de Herrera **Curso 2016 / 17**

Segundo trimestre – Observación evaluable escrita nº 2 – 2º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2 + mx$ siendo $m > 0$. Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = -mx$ y calcula el valor de m para que el área de dicho recinto sea 36. *(2,5 puntos)*

2) Calcular el valor de $a > 0$ para el que se verifica: $\int_0^a \frac{x}{2+x^2}dx = 1$ *(2,5 puntos)*

3) Considerar el sistema de ecuaciones dado en forma matricial mediante $AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m \\ 1 & 1 & m+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-m \\ m \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Discutir el sistema según los valores de m. *(1,5 puntos)*

b) Resolver el sistema para $m = -3$ y determinar en dicho caso, si existe, una solución en la que $x = 2$. *(1 punto)*

4) Sean los puntos $A(2, \lambda, \lambda)$, $B(-\lambda, 2, 0)$ y $C(0, \lambda, \lambda-1)$.

a) ¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que los puntos A, B y C estén alineados? Justificar la respuesta. *(1,5 puntos)*

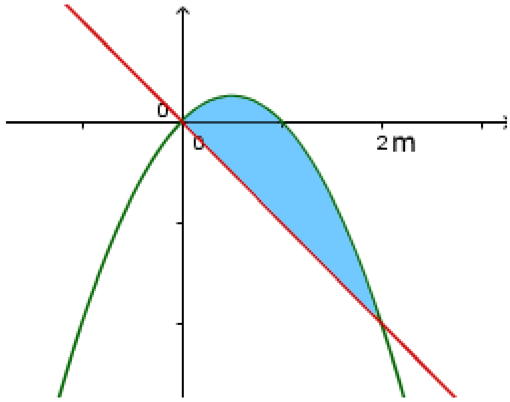
b) Para $\lambda = 1$, hallar el área del triángulo de vértices A, B y C. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2 + mx$ siendo $m > 0$. Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = -mx$ y calcula el valor de m para que el área de dicho recinto sea 36. *(2,5 puntos)*

a) Esbozo de la gráfica.

- f es una parábola cóncava que corta a los ejes en:
$$y = 0 \Leftrightarrow -x^2 + mx = 0 \Leftrightarrow x(-x + m) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = m$$
Los cortes son $(0, 0)$ y $(m, 0)$ (recordar $m > 0$).
- $y = -mx$ es una recta descendente (la pendiente es negativa) que pasa por el origen. Sus intersecciones con la parábola anterior son:
$$\left.\begin{array}{r} y = -x^2 + mx \\ y = -mx \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -mx = -x^2 + mx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2mx = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(x - 2m) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = 2m$$
Los cortes están en $(0, 0)$ y en $(2m, -2m^2)$.



Por tanto, la gráfica debe parecerse al gráfico adjunto, dependiendo de $m > 0$. en dicho gráfico, hemos destacado el recinto cuya área debe valer 36.

b) Cálculo de m.
El área destacada valdrá:
$$\int_0^{2m} (-x^2 + mx - (-mx))dx = \int_0^{2m} (-x^2 + 2mx)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + mx^2 \right]_0^{2m} =$$
$$= -\frac{8m^3}{3} + m4m^2 = \frac{-8m^3 + 12m^3}{3} = \frac{4m^3}{3}\ u^2$$
Como debe valer 36:
$$\frac{4m^3}{3} = 36 \Rightarrow 4m^3 = 108 \Rightarrow m^3 = 27 \Rightarrow m = 3.$$
Por tanto, la solución única es $\boxed{m = 3}$.

2) Calcular el valor de $a > 0$ para el que se verifica: $\int_0^a \frac{x}{2+x^2}dx = 1$ *(2,5 puntos)*

Estamos ante una integral racional pero con una fracción simple, ya reducida. Se trata de una fracción con el denominador irreducible (raíces complejas). Como el grado del numerador es uno menos que el del denominador, buscaremos un logaritmo neperiano.
$$\int_0^a \frac{x}{2+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{2x}{2+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln|2+x^2|\right]_0^a = \frac{1}{2}\ln(2+a^2) - \frac{1}{2}\ln 2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln(2 + a^2) - \ln 2 = 2 \Leftrightarrow \ln\frac{2+a^2}{2} = \ln e^2 \Leftrightarrow \frac{2+a^2}{2} = e^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 = 2e^2 - 2 \Leftrightarrow \boxed{a = \sqrt{2e^2 - 2}} \text{ (solo la positiva)}$$

3) Considerar el sistema de ecuaciones dado en forma matricial mediante $AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m \\ 1 & 1 & m+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-m \\ m \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Discutir el sistema según los valores de m. *(1,5 puntos)*

Efectuando el producto matricial, el sistema será:

$$\left.\begin{aligned} x+y+2z &= 1-m \\ -x+(m+2)y+mz &= m \\ x+y+(m+x)z &= 7 \end{aligned}\right\} \quad \text{con } A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1-m \\ -1 & m+2 & m & m \\ 1 & 1 & m+2 & 7 \end{pmatrix}$$

Por Rouché-Fröbenius, veamos cuándo el r(A) será máximo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m \\ 1 & 1 & m+2 \end{vmatrix} = (m+2)^2 + m - 2 - 2(m+2) + m + 2 - m =$$

$$= m^2 + 4m + 4 + m - 2m - 4 = m^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ó } m = -3$$

Según esto, distinguimos los siguientes casos:

- $\underline{m \neq 0 \text{ y } m \neq -3}$: $|A| \neq 0 \Rightarrow$ r(A) = 3 $\Rightarrow$ $r(A') = 3$ (contiene a A y no puede ser mayor que 3, porque solo tiene 2 filas). Como los rangos coinciden entre si y con el número de incógnitas, por el *Teorema de Rouché-Fröbenius* el sistema es <u>compatible determinado</u>.
- $\underline{m = 0}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $r(A) < 3$, porque $|A| = 0$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$.

Orlamos este menor en A' de la única forma posible, o sea, con la tercera fila y la cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 1 - 2 + 7 \neq 0 \Rightarrow r(A') = 3$$

puesto que, en A', las tres filas son linealmente independientes. Como $r(A) \neq r(A') \Rightarrow$ el sistema es <u>incompatible</u>.

- $\underline{m = -3}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Al igual que antes, $r(A) < 3$, porque $|A| = 0$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) =$ 2. Orlamos este menor en A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -21-6+4+12+14-3=0 \Rightarrow r(A')=2$$

porque el menor no nulo anterior es también un menor en A', y no es posible orlarlo de otra forma. Por tanto, $r(A) = r(A') = 2 <$ nº incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Resolver el sistema para $m = -3$ y determinar en dicho caso, si existe, una solución en la que $x = 2$. *(1 punto)*

Ya que está hecho el estudio por *Rouché-Fröbenius*, lo resolvemos por *Cramer*. Para ello, llamamos $y = t$, puesto que esta incógnita no está en el menor principal que tenemos, y la pasamos al segundo miembro, al tiempo que eliminamos la tercera fila porque no está en el menor principal. Así, el sistema se transforma en:

$$\left.\begin{aligned} x+2z &= 4-t \\ -x-3z &= -3+t \end{aligned}\right\}$$

Por tanto:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4-t & 2 \\ -3+t & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-12+3t+6-2t}{-3+2} = 6-t$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-t \\ -1 & -3+t \end{vmatrix}}{-1} = 3-t-4+t = -1$$

Así, $\boxed{\text{las infinitas soluciones son de la forma } (6-t, t, -1)}$.

Y si $x = 2 \Rightarrow 6 - t = 2 \Rightarrow t = 4$. Luego si hay una solución en la que $x = 2$ que es: $\boxed{(2, 4, -1)}$.

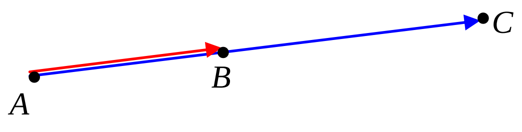
4) Sean los puntos $A(2, \lambda, \lambda)$, $B(-\lambda, 2, 0)$ y $C(0, \lambda, \lambda-1)$.

a) ¿Existe algún valor de $\lambda \in R$ para el que los puntos A, B y C estén alineados? Justificar la respuesta. *(1,5 puntos)*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-\lambda, 2, 0) - (2, \lambda, \lambda) = (-\lambda-2, 2-\lambda, -\lambda)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (0, \lambda, \lambda-1) - (2, \lambda, \lambda) = (-2, 0, -1)$$

Los tres puntos estarán alineados si el rango de la matriz formada por estos dos vectores como filas vale 1 (así, uno será múltiplo del otro, por lo que tendrán la misma dirección y, al tener un punto en común, estarán en la misma recta).



$$\begin{pmatrix} -\lambda-2 & 2-\lambda & -\lambda \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si tomamos las dos últimas columnas: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -\lambda \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

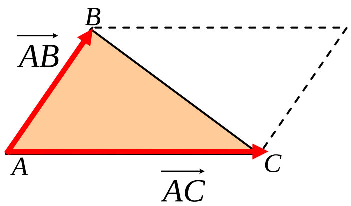
Distinguimos dos casos:

- $\underline{\lambda \neq 2}$: El rango vale 2, y los vectores tienen distinta dirección, por lo que los puntos no estarán alineados.
- $\underline{\lambda = 2}$: La matriz es: $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 1, porque la primera fila es el doble de la segunda $\Rightarrow$ Los vectores son múltiplo el uno del otro, por lo que tienen la misma dirección y los puntos estarán alineados.

En suma, $\boxed{\text{los puntos están alineados si, y solo si } \lambda = 2}$.

b) Para $\lambda = 1$, hallar el área del triángulo de vértices A, B y C. *(1 punto)*

Sabemos que $A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$, puesto que el módulo de ese producto vectorial es el área del paralelogramo. Calculémosla. Según los cálculos anteriores, $\overrightarrow{AB} = (-3, 1, -1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, -1)$, de donde:



$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \Rightarrow \boxed{A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{\sqrt{6}}{2}\ u^2}$$

NOMBRE: ____

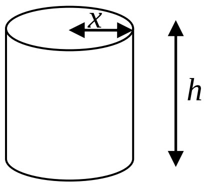
Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

Quienes recuperen la primera evaluación o estén subiendo nota, deben hacer el ejercicio 1 y el 3 (pero no el 2). El resto, elegirá dos ejercicios entre el 1, el 2 y el 3.

1) Se quiere construir un bote de conservas cilíndrico, con tapa, de un litro de capacidad. Calcula las dimensiones del bote para que en su construcción se utilice la menor cantidad posible de hojalata. *(2,5 puntos)*
2) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, siendo ln la función *logaritmo neperiano*.
   a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función f (puntos donde se alcanzan y valor de la función). *(1 pto)*
   b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de inflexión de abscisa negativa. *(1,5 puntos)*
3) Sea f la función definida por:
$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ xe^{-x^2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$
   a) Estudiar la derivabilidad de f. *(1 punto)*
   b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta $x = -1$. *(1,5 puntos)*
4) Considerar el sistema de ecuaciones lineales:
$$\left.\begin{aligned} x + (\lambda+1)y + z &= 1 \\ \lambda y + z &= 0 \\ \lambda y + \lambda z &= \lambda \end{aligned}\right\}$$
   a) Clasificar el sistema según los valores del parámetro λ. *(1 punto)*
   b) Resolverlo para $\lambda = 0$. *(0,7 puntos)*
   c) Determinar, si existe, el valor de λ para el que hay una solución en la que $z = 2$. Calcular esa solución. *(0,8 puntos)*
5) Sean $\vec{u} = (x, 2, 0)$, $\vec{v} = (x, -2, 1)$ y $\vec{w} = (2, -x, -4x)$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$.
   a) Determinar los valores de x para los que los vectores son linealmente independientes. *(1 punto)*
   b) Hallar los valores de x para los que los vectores son ortogonales dos a dos. *(1,5p)*

SOLUCIONES

1) Se quiere construir un bote de conservas cilíndrico, con tapa, de un litro de capacidad. Calcula las dimensiones del bote para que en su construcción se utilice la menor cantidad posible de hojalata. *(2,5 puntos)*



Llamemos x al radio de la base y h a la altura. Las medimos en *dm*.

El volumen de un cuerpo de bases paralelas e iguales es *área de la base · altura*. Como la base es un círculo, dicho volumen será $\pi x^2 h$. Y sabemos que vale 1 litro, o sea, 1 dm^3. Por tanto:

$$\pi x^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi x^2}$$

Hemos de minimizar el área lateral, que será la suma de las áreas de las dos bases (los dos círculos idénticos) por el área lateral, que es, una vez desarrollado el cilindro, un rectángulo de altura h y base la longitud de la circunferencia, esto es, $2\pi x$. Por tanto, la función a minimizar es:

$$f(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + \frac{2\pi x}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2}{x}, \quad \text{con } x \in (0, +\infty)$$

(no hay ninguna limitación para el radio, salvo que sea positivo, porque puede aumentar indefinidamente a cambio únicamente de que la altura disminuya manteniéndose positiva).

Se tiene que:

$$f'(x) = 4\pi x - \frac{2}{x^2}$$

Estudiamos los siguientes puntos para localizar los extremos absolutos:

- Extremos del dominio: 0; $+\infty$.
- Discontinuidades de f: 0
- Discontinuidades de f': 0
- $f'(x) = 0$: $4\pi x - \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow 4\pi x = \frac{2}{x^2} \Rightarrow 4\pi x^3 = 2 \Rightarrow x^3 = \frac{2}{4\pi} \Rightarrow$ $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

Imágenes o límites en ellos:

- $\lim_{x\to 0^+}\left(2\pi x^2 + \frac{2}{x}\right) = (0+\infty) = +\infty$
- $\lim_{x\to +\infty}\left(2\pi x^2 + \frac{2}{x}\right) = \left(+\infty + \frac{2}{\infty}\right) = +\infty$
- $f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) \approx 5{,}54$

Por tanto, la función no tiene máximo absoluto, puesto que se va a $+\infty$. Y:

El mínimo absoluto es 5,54 dm^2 aproximadamente, que se consigue para un cilindro cuya base es un círculo de radio $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0.54$ dm y altura $h = \frac{1}{\pi x^2} \approx 1{,}08$ dm.

2) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, siendo ln la función *logaritmo neperiano*.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).*(1 pto)*

Como $x^2 + 1 > 0 \ \ \forall x \Rightarrow f$ es continua en todo R, pues la función *logaritmo neperiano* es continua donde su argumento sea estrictamente positivo.

Por otra parte:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

que es continua en todo R, puesto que el denominador no se anula nunca.

De este modo:

- Discontinuidades de f: No tiene.
- Discontinuidades de f': No tiene.
- $f'(x) = 0$: $2x = 0 \Rightarrow x = 0$, que vale porque no anula el denominador.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f'	–	0	+
f	↘ decrec	mín	↗ crec

Como $f(0) = \ln(0 + 1) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{En } (0, 0) \text{ tiene un mínimo relativo}}$.

b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de inflexión de abscisa negativa. *(1,5 puntos)*

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1)-2x2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

- Discontinuidades de f, f', f'': No tiene.
- $f''(x) = 0$: $-2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Por tanto:

	$(-\infty, 0)$	–1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
B''	–	0	+	0	–
B	∩ cóncava	P.I.	∪ convexa	P.I.	∩ cóncava

El punto de inflexión con abscisa negativa está en $x = -1$. Y como $f(-1) = \ln(1+1) = \ln(2)$, sus coordenadas son $(-1, \ln(2))$.

Calculemos la recta tangente:

- Punto de tangencia: $(-1, \ln(2))$
- Pendiente de la tangente: $m = f'(-1) = \dfrac{-2}{1+1} = -1$
- Recta tangente: $y - \ln(2) = -1(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = -x - 1 + \ln(2)}$

3) Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ xe^{-x^2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

a) Estudiar la derivabilidad de f. *(1 punto)*

Estudiar la derivabilidad es derivar la función y ver dónde existe. Para derivar una función a trozos hay que estudiar antes su continuidad. Procedemos:

- $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$: f es continua por estar construida con funciones exponenciales y polinómicas.
- $x = 0$: 1) $\exists f(0) = e^0 - 1 = 0$; 2) $\lim\limits_{x \to 0^-} xe^{-x^2} = 0 \cdot 1 = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^x - 1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ Como coinciden los resultados, f es continua en $x = 0$.

Por tanto, $\boxed{f \text{ es continua en R}}$. No hay problema para intentar derivarla.

Aplicando directamente los resultados de las tablas de derivadas:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x > 0 \\ e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

De donde: $f'(0^-) = 1\cdot(1-0) = 1$; $f'(0^+) = e^0 = 1 \Rightarrow \exists f'(0) = 1$. Por tanto:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ e^{-x^2}(1-2x^2) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}}$$

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta $x = -1$. *(1,5 puntos)*

No es necesario dibujar toda la función, sino sólo ver los cortes con OX y si la curva está sobre o bajo dicho eje.

- En $(-\infty, 0]$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $e^{-x^2} = 0$, y esto último es imposible, porque la exponencial siempre toma valores estrictamente positivos. Luego hay una solución válida, que es $x = 0$.
- En $(0, +\infty)$: $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, que no está en la zona, pero que salió en la zona anterior.

De modo que la función corta a OX únicamente en $x = 0$. Por ello, entre $x = -1$ y $x = 0$ la función delimita un área con el eje OX, que nos la proporcionará la integral de la misma entre dichos límites, una vez estudiado si la función está por encima o por debajo del eje.

En este tramo $f(x) = xe^{-x^2}$, por lo que olvidamos el resto de f y trabajamos sólo con esta fórmula. Y, teniendo en cuenta que la exponencial siempre proporciona resultados estrictamente positivos y x es negativo en el intervalo $(-1, 0)$, f toma valores negativos en el tramo que nos interesa, por lo que está bajo el eje OX.

De este modo, el área buscada es (hacemos la integral por cambio de variable):

$$A = -\int_{-1}^{0} xe^{-x^2}\,dx = \int_{0}^{-1} xe^{-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = -1 \Rightarrow t = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 xe^{-t}\frac{dt}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t}\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^0 = \boxed{\frac{1}{2}(1-e^{-1}) \;\; u^2}$$

4) Considerar el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x + (\lambda+1)y + z &= 1 \\ \lambda y + z &= 0 \\ \lambda y + \lambda z &= \lambda \end{aligned}\right\}$$

a) Clasificar el sistema según los valores del parámetro λ. *(1 punto)*

La matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ó $\lambda = 1$, se tiene:

- $\underline{\lambda \neq 0 \text{ y } \lambda \neq 1}$: $|A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = r(A') = 3 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Sist. compatible determinado}}$ (solución única).
- $\underline{\lambda = 1}$: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ La última ecuación es: $0 = 1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Sistema incompatible}}$ (no tiene solución).
- $\underline{\lambda = 0}$: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ El sistema está triangularizado y la tercera ecuación se anula (es combinación lineal de las dos primeras), por lo que puede suprimirse y, además, no queda ninguna situación de incompatibilidad, como pasó antes $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Sistema compatible indeterminado}}$.

b) Resolverlo para $\lambda = 0$. *(0,7 puntos)*
Como ya tenemos la matriz triangularizada del apartado anterior, procedemos con la segunda ecuación: $z = 0$, lo que ya nos proporciona una incógnita. Sustituyendo en la primera: $x + y = 1$. Llamando, por ejemplo, $y = t \Rightarrow x = 1 - t$. Por tanto, las infinitas soluciones son de la forma:

$$\boxed{(1 - t, t, 0)}$$

c) Determinar, si existe, el valor de λ para el que hay una solución en la que $z = 2$. Calcular esa solución. *(0,8 puntos)*
Obligamos, en el sistema inicial, a que $z = 2$ sea solución:

$$\left.\begin{aligned} x+(\lambda+1)y+2=1 \\ \lambda y+2=0 \\ \lambda y+\lambda 2=\lambda \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+(\lambda+1)y=-1 \\ \lambda y=-2 \\ \lambda y=-\lambda \end{aligned}\right\}$$

La matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & \lambda & -2 \\ 0 & 0 & -\lambda+2 \end{pmatrix}$$

El sistema será compatible si, y sólo si $-\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$, pues, de otro modo, la tercera ecuación será $0 =$ (*algo distinto de cero*), lo que nos llevaría a ausencia de soluciones.
Estudiemos la situación resultante de $\lambda = 2$. La transformada de A' tras la anterior operación de filas es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eliminamos la tercera ecuación y nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas compatible determinado (la matriz está triangularizada):

- 2ª ecuación: $2y = -2 \Rightarrow y = -1$.
- 1ª ecuación: $x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$.

Luego, obligando a que $z = 2$, habrá solución, que será única, si y sólo si $\lambda = 2$, y la solución es: $(2, -1, 2)$.

5) Sean $\vec{u} = (x, 2, 0)$, $\vec{v} = (x, -2, 1)$ y $\vec{w} = (2, -x, -4x)$ tres vectores de R^3.

a) Determinar los valores de x para los que los vectores son linealmente independientes. *(1 punto)*

Los vectores serán linealmente independientes si, y sólo si ninguno es combinación lineal del resto. Si situamos sus coordenadas formando un determinante, la situación anterior se dará si, y sólo si el determinante es no nulo:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & -2 & 1 \\ 2 & -x & -4x \end{vmatrix} = 8x^2 + 4 + 8x^2 + x^2 = 17x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4/17$$

Como eso no puede suceder, $\boxed{\text{los vectores son linealmente independientes } \forall x \in R}$.

b) Hallar los valores de x para los que los vectores son ortogonales dos a dos. *(1,5p)*

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (x, 2, 0)\cdot(x, -2, 1) = x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ó $x = 2$.
- $\vec{u} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow (x, 2, 0)\cdot(2, -x, -4x) = 2x - 2x = 0$, cierto $\forall x \in R$.
- $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow (x, -2, 1)\cdot(2, -x, -4x) = 2x + 2x - 4x = 0$, cierto $\forall x \in R$.

En el caso de que $\boxed{x = -2 \text{ ó } x = 2}$, ocurren las tres cosas a la vez, por lo que sería la respuesta a lo que nos solicitan.