UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD **MATEMÁTICAS II**
CURSO 2014-2015

Instrucciones:	a)	**Duración:** 1 hora y 30 minutos.
	b)	Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
	c)	La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
	d)	Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
	e)	Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A **(Junio 2.015)**

Ejercicio 1.- [**2'5 puntos**] Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13'5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el mínimo posible.

Ejercicio 2.- [**2'5 puntos**] Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = -1 \\ \lambda x + \lambda z = \lambda \\ x + y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

a) **[1'5 puntos]** Discute el sistema según los valores de λ.

b) **[1 punto]** Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

Ejercicio 4.- Sean los puntos $A(0, 1, 1)$, $B(2, 1, 3)$, $C(-1, 2, 0)$ y $D(2, 1, m)$.

a) **[0'75 puntos]** Calcula m para que A, B C y D estén en un mismo plano.

b) **[0'75 puntos]** Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

c) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

Instrucciones:	a)	**Duración:** 1 hora y 30 minutos.
	b)	Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
	c)	La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
	d)	Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
	e)	Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B **(Junio 2.015)**

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{\text{sen}\,(x^2)}$ es finito e igual a uno, calcula los valores de a y b.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Determina la función $f:(0,\infty)\to \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=\ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1, 2)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

Ejercicio 3.- Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & m\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & m & 0\\ 3 & 2 & m\end{pmatrix}$$

a) [**1'5 puntos**] Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

b) [1 punto] Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

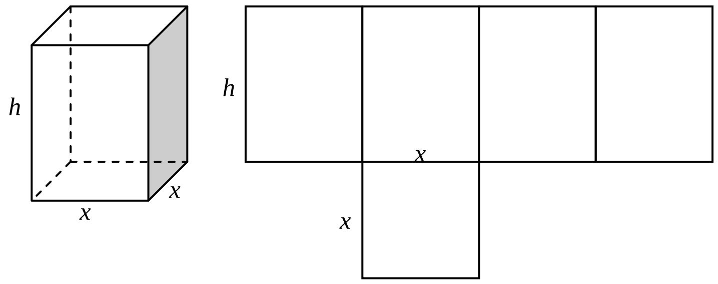
Ejercicio 4.- Sea el plano $\pi \equiv 2x+y-z+8=0$.

a) [1'5 puntos] Calcula el punto P', simétrico del punto $P(2,-1,5)$ respecto del plano π.

b) [1 punto] Calcula la recta r', simétrica de la recta $r\equiv \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-5}{1}$ respecto del plano π.

OPCIÓN A
SOLUCIONES

Ejercicio 1.- [**2'5 puntos**] Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13'5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el mínimo posible.



Hemos dibujado el depósito y su desarrollo.
El volumen del depósito es el área de la base por la altura. Por tanto, según el enunciado:

$$x^2h = 13{,}5 \;\Rightarrow\; h = \frac{13{,}5}{x^2}$$

El mínimo valor posible para x es 0, exclusive (desaparecería la base y la altura debería ser infinita). El máximo, sería infinito, tendiendo la altura a valer 0. Es decir:

$$x \in (0, +\infty)$$

Hay que minimizar el área lateral que, en función de x, será:

$$f(x) = 4xh + x^2 = 4x\frac{13{,}5}{x^2} + x^2 = x^2 + \frac{54}{x} = \frac{x^3+54}{x}$$

Luego el problema consiste en calcular el mínimo absoluto de $f(x) = \dfrac{x^3+54}{x}$, con $x \in (0, +\infty)$.

La función $y = \dfrac{x^3+54}{x}$, por ser elemental, es continua en su dominio, que es $\mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f$ es continua en todo su dominio, que es $(0, +\infty)$. Además:

$$f'(x) = \frac{3x^2x-(x^3+54)}{x^2} = \frac{3x^3-x^3-54}{x^2} = \frac{2x^3-54}{x^2}$$

que también es continua en $(0, +\infty)$, por la misma razón. Luego tenemos una función f que es continua y derivable en su dominio. Por ello, sus extremos absolutos sólo pueden estar en los extremos de dicho dominio o coincidir con un extremo relativo. Calculemos éstos.

- *Discontinuidades de f ó f'*: No tienen, como hemos comentado.
- $f'(x) = 0$: $2x^3 - 54 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$

	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	–	0	+
f	↘(decrec)	mín	↗(crec)

Luego el mínimo relativo está en $x = 3$ y vale $f(3) = \dfrac{27+54}{3} = 27$

Por la forma de la función, decreciente desde el comienzo hasta el punto y creciente después, el mínimo relativo también es absoluto. Es, entonces, el punto que buscamos. La solución es:

$$\boxed{\text{Largo y ancho: } 3m. \quad \text{Altura: } \frac{13'5}{9} = 1'5\ m. \quad \text{Área lateral total: } 27\ m^2}$$

Ejercicio 2.- [**2'5 puntos**] Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx$

$$I(x) = \int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx = -\int \frac{x^2}{x^2+x-2}dx = -\int \frac{x^2+x-2-x+2}{x^2+x-2}dx =$$
$$= -\int \frac{x^2+x-2}{x^2+x-2}dx - \int \frac{-x+2}{x^2+x-2}dx = -\int dx + \int \frac{x-2}{x^2+x-2}dx = -x + I_1(x).$$

Calculamos aparte $I_1(x)$. Se trata de una integral racional. Intentamos descomponer su integrando en suma de fracciones simples. Para ello, investigamos si se puede factorizar el denominador.

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = -2 \\ = 1 \end{array} \right.$$

Por tanto, como $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$:

$$\frac{x-2}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)} \Rightarrow x - 2 = A(x-1) + B(x+2)$$

Damos valores a x:

- $x = 1$: $-1 = 3B \Rightarrow B = -1/3$
- $x = -2$: $-4 = -3A \Rightarrow A = 4/3$

Por todo lo cual:

$$\frac{x-2}{(x+2)(x-1)} = \frac{4/3}{x+2} + \frac{-1/3}{x-1} \Rightarrow I_1(x) = \int \frac{x-2}{(x+2)(x-1)}dx = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} =$$
$$= \frac{4}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + C$$

Y, finalmente:

$$\boxed{I(x) = -x + \frac{4}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + C}$$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = -1 \\ \lambda x + \lambda z = \lambda \\ x + y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

a) **[1'5 puntos]** Discute el sistema según los valores de λ.

La matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda - \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = 0$$

Luego <u>el rango de la misma es, como máximo 2</u>. Tomamos el menor formado por sólo el elemento $a_{31} = 1$, que es no nulo. Lo orlamos con fila 2 y columna 2:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda$$

Por tanto, <u>si $\lambda \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$</u>, puesto que encontramos un menor de orden 2 no nulo y el rango de A no podía ser 3 nunca.

Si orlamos este menor con la columna 4, ya en la matriz ampliada, nos queda:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda - \lambda - \lambda^2 = -\lambda^2$$

Esto significa que <u>si $\lambda \neq 0$</u>, también encontramos un menor de orden 3 en A' distinto de cero, por lo que <u>$r(A') = 3$</u>.

En conclusión, $\boxed{\lambda \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2 \text{ y } r(A') = 3 \Rightarrow \textbf{sistema incompatible}}$.

Y <u>si $\lambda = 0$</u>, la matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

donde <u>también encontramos un menor de orden 2 no nulo</u>, con las filas 1 y 3 y las columnas 1 y 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Por tanto $r(A) = 2$. Si orlamos este menor en A':

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

pues tiene una fila de ceros. Así, <u>$r(A') = 2$</u>, pues vale el mismo menor y éste no se puede orlar a uno de orden 3 no nulo. En conclusión:

$$\boxed{\lambda = 0 \Rightarrow r(A) = r(A') = 2 \Rightarrow \textbf{sistema compatible indeterminado}}.$$

b) **[1 punto]** Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

La expresión (1) ya nos da la matriz ampliada triangularizada. La resolvemos por Gauss, llamando $z = t$.

1ª ec: $y - t = -1 \Rightarrow y = t - 1$

3ª ec: $x + t - 1 = 0 \Rightarrow x = -t + 1$

Solución: $\boxed{(-t + 1, t - 1, t)}$.

Ejercicio 4.- Sean los puntos $A(0, 1, 1)$, $B(2, 1, 3)$, $C(-1, 2, 0)$ y $D(2, 1, m)$.

a) **[0'75 puntos]** Calcula m para que $A, B\ C$ y D estén en un mismo plano.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ tienen que ser linealmente dependientes, esto es, uno de ellos debe ser combinación lineal de los otros dos para que los cuatro puntos estén en un mismo plano.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 1, 3) - (0, 1, 1) = (2, 0, 2)$$

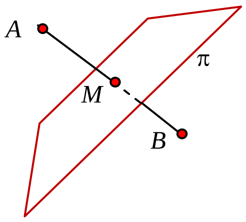
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-1, 2, 0) - (0, 1, 1) = (-1, 1, -1)$$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (2, 1, m) - (0, 1, 1) = (2, 0, m-1)$

Para que sean l. dependientes, basta con que el determinante formado por los tres sea nulo, con lo que habrá una combinación lineal de filas:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 2m - 2 - 4 = 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow \boxed{m = 3}$$

b) [0'75 puntos] Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.



El vector $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 2) \parallel (1, 0, 1)$ es un vector *normal* al plano que piden.

Un punto de dicho plano es el punto medio M del segmento que une A con B:

$$M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (1, 1, 2)$$

Luego el plano solicitado es:

$$1(x-1) + 0(y-1) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + z - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x + z - 3 = 0}$$

c) [1 punto] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

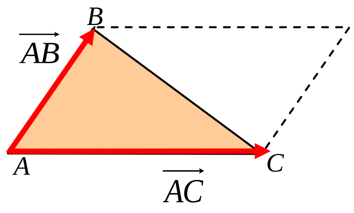
El área de un triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo que se forma con el simétrico de A respecto del segmento que une B con C:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, 0, 2) \times (-1, 1, -1) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2, 0, 2)$$

$$S = \frac{1}{2} \, |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \, |(-2, 0, 2)| = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{8} = \frac{1}{2} 2\sqrt{2} = \boxed{\sqrt{2} \; u^2}$$



OPCIÓN B
SOLUCIONES

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{\text{sen}\,(x^2)}$ es finito e igual a uno, calcula los valores de a y b.

Al sustituir, tenemos la indeterminación 0/0. Podemos aplicar L'Hôpital, pues al tener en numerador y denominador funciones derivables en todo R, podemos verificar las condiciones de dicho teorema (que son menos restrictivas, pero se cumplen con lo dicho). El límite a estudiar es:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+\text{sen}\,(x)}{2x\cos(x^2)} = \left(\frac{b}{0}\right)$$

Como el límite existe, $b = 0$, pues de lo contrario, el límite valdría infinito. Podemos volver a aplicar L'Hôpital, y el límite a estudiar será:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2a+\cos(x)}{2\cos(x^2)-4x^2\text{sen}\,(x^2)} = \frac{2a+1}{2}$$

Sabemos que el límite vale 1 $\Rightarrow \dfrac{2a+1}{2} = 1 \Rightarrow 2a + 1 = 2 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = 1/2$.

Con ello, se cumple el enunciado. Por tanto: $\boxed{a = 1/2,\ \ b = 0}$.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Determina la función $f : (0, \infty) \to \mathrm{R}$ sabiendo que $f''(x) = \ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1, 2)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

Realizando integraciones por partes, llegamos a que:

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int \ln(x)dx = \left[\begin{array}{lll} u=\ln(x) & \Rightarrow & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx & \Rightarrow & v=x \end{array}\right] = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + C$$

Como f tiene tangente horizontal en $P(1, 2) \Rightarrow m = f'(1) = 0 \Rightarrow 1\ln(1) - 1 + C = 0 \Rightarrow -1 + C = 0 \Rightarrow C = 1$. Así, $f'(x) = x\ln(x) - x + 1$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int[x\ln(x)-x+1]dx = \int x\ln(x)dx - \int xdx + \int dx =$$

$$= \left[\begin{array}{lll} u=\ln(x) & \Rightarrow & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=xdx & \Rightarrow & v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right] - \frac{x^2}{2}+x = \frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{2}\int xdx - \frac{x^2}{2}+x =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}+x+k = \frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{3}{4}x^2+x+k$$

Y como la función debe pasar por $P(1, 2) \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}0-\dfrac{3}{4}+1+k=2 \Rightarrow \dfrac{1}{4}+k=2 \Rightarrow$

$k=\dfrac{7}{4}$. Por tanto:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{3}{4}x^2+x+\frac{7}{4}}$$

Ejercicio 3.- Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$$

a) [**1'5 puntos**] Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

El rango de A es, como máximo 2. Y en B encontramos un menor de orden 2 distinto de cero, independientemente del valor de m:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4.$$

Luego el rango de B es, como mínimo 2. Entonces, para coincidir dichos rangos, debemos hacer que ambos valgan 2.

$$r(A) = 2 \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow -m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4.$$

$$r(B) = 2 \Leftrightarrow |B| = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow m(m+4) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ó } m = -4$$

La única posibilidad de que sucedan ambas cosas es, por consiguiente, que $\boxed{m = 0}$.

b) **[1 punto]** Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

$|A| = -m - 4$ y $|B| = m^2 + 4m$. Para que coincidan:

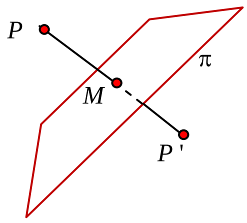
$$m^2 + 4m = -m - 4 \Leftrightarrow m^2 + 4m + m + 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-8}{2} = -4 \\ = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

Hay, entonces, dos posibilidades: $\boxed{m = -4 \text{ ó } m = -1}$.

Ejercicio 4.- Sea el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0$.

a) **[1'5 puntos]** Calcula el punto P', simétrico del punto $P(2, -1, 5)$ respecto del plano π.



Calculemos la recta perpendicular al plano y que pasa por P. El vector *normal* del plano es vector de *dirección* de dicha recta. Y dicho vector es $(2, 1, -1)$. De modo que la recta es:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 5 - t \end{cases}$$

Calculamos el punto M de intersección de recta y plano. Sustituyendo la forma de un punto general de la recta en la ecuación del plano, tenemos:

$$2(2 + 2t) + (-1 + t) - (5 - t) + 8 = 0 \Leftrightarrow 4 + 4t - 1 + t - 5 + t + 8 = 0 \Leftrightarrow 6t + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -1$$

Por tanto $M(2 - 2, -1 - 1, 5 + 1) = (0, -2, 6)$.

Este punto es el punto medio del segmento que une $P(2, -1, 5)$ con $P'(a, b, c)$. Luego:

$$\begin{cases} \dfrac{2+a}{2}=0 \Rightarrow a=-2 \\ \dfrac{-1+b}{2}=-2 \Rightarrow b=-4+1=-3 \\ \dfrac{5+c}{2}=6 \Rightarrow c=12-5=7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P'(-2,-3,7)}.$$

b) **[1 punto]** Calcula la recta r', simétrica de la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-5}{1}$ respecto del plano π.

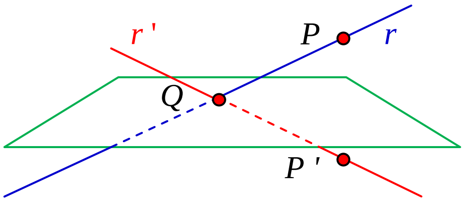
Veamos la posición relativa de r y π. En paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2-2t \\ y=-1+3t \\ z=5+t \end{cases}$$

Lo que significa que un punto general de r es de la forma $(2-2t, -1+3t, 5+t)$. Comprobemos si alguno de ellos (para algún t) pertenece a π. Sustituyendo en la ecuación de π:

$2(2-2t) + (-1+3t) - (5+t) + 8 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4t - 1 + 3t - 5 - t + 8 = 0 \Leftrightarrow -2t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Por lo que recta y plano se cortan en el punto $Q(2-2\cdot3, -1+3\cdot3, 5+3) = (-4, 8, 8)$.



La recta simétrica r' debe pasar por Q y por el simétrico de $P(2, -1, 5)$, que pertenece a la recta r, respecto del plano, que ya lo conocemos del apartado anterior: $P'(-2, -3, 7)$. Por tanto, su vector de dirección será:

$$\overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OQ} = (-2,-3,7)-(-4,8,8) = (2,-11,-1)$$

Por todo ello:

$$\boxed{r' \equiv \frac{x+2}{2}=\frac{y+3}{-11}=\frac{z-7}{-1}}$$

<u>Otra manera</u> de hacerlo hubiera sido repetir el proceso del apartado anterior para conseguir otro punto de r'. Se tomaría un punto cualquiera de r y hallaríamos su simétrico respecto del plano π. Con P' y el nuevo punto, tendremos la recta pedida. Vamos a hacerlo.

En primer lugar, conseguimos un punto cualquiera de r. A partir de sus paramétricas, que escribimos antes, para, por ejemplo, $t = 1$: $R(0, 2, 6)$.

Calculemos la recta perpendicular al plano y que pasa por R. El vector *normal* del plano es vector de *dirección* de dicha recta. Y dicho vector es $(2, 1, -1)$. De modo que la recta es:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y=2+t \\ z=6-t \end{cases}$$

Calculamos el punto M de intersección de recta y plano sustituyendo, al igual que antes, la forma de un punto general de la recta en la ecuación del plano:

$$2\cdot2t + (2+t) - (6-t) + 8 = 0 \Leftrightarrow 4t + 2 + t - 6 + t + 8 = 0 \Leftrightarrow 6t + 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t = -2/3$$

Por tanto $M\left(2\dfrac{-2}{3},\ 2-\dfrac{2}{3},\ 6+\dfrac{2}{3}\right) = \left(-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{20}{3}\right)$.

Y este punto es el punto medio del segmento que une $R(0, 2, 6)$ con su simétrico $R'(a, b, c)$. Luego:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{0+a}{2} = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow a = -\dfrac{8}{3} \\ \dfrac{2+b}{2} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow b = \dfrac{8}{3} - 2 = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{6+c}{2} = \dfrac{20}{3} \Rightarrow c = \dfrac{40}{3} - 6 = \dfrac{22}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{R'\left(-\dfrac{8}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{22}{3}\right)}.$$

Los puntos $P'(-2, -3, 7)$ y $R'\left(-\dfrac{8}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{22}{3}\right)$ pertenecen a la recta buscada r'. Por tanto, un vector de dirección de esta recta será:

$$\overrightarrow{P'R'} = \overrightarrow{OR'} - \overrightarrow{OP'} = \left(-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{22}{3}\right) - (-2, -3, 7) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Podemos tomar un paralelo a éste más cómodo: $\vec{d} = (2, -11, -1)$. Con este vector y el punto $P'(-2, -3, 7)$ obtenemos que:

$$\boxed{r' \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{-11} = \frac{z-7}{-1}}$$

Instrucciones:

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A **(Septiembre 2.015)**

Ejercicio 1.- [**2'5 puntos**] Halla los valores *a, b* y *c* sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{x+c}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$, un asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo local en el punto de abscisa $x = 3$.

Ejercicio 2.- [**2'5 puntos**] Calcula $\int_0^{\pi} x^2 \text{sen}\,(x)dx$

Ejercicio 3.- Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

1) **[1'5 puntos]** Determina la matriz X para la que $A^tXB^{-1} = C$ (A^t es la traspuesta de A).

2) **[1 punto]** Calcula el determinante de $B^{-1}(C^tC)B$, (C^t es la traspuesta de C).

Ejercicio 4.- Sea r la recta definida por $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda-2 \end{cases}$ y s la recta dada por $\begin{cases} x-y=1 \\ z=-1 \end{cases}$

a) **[1'75 puntos]** Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas dadas.

b) **[0'75 puntos]** Calcula la distancia entre r y s.

Instrucciones:

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B **(Septiembre 2.015)**

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El terreno debe tener 180 000 m^2 para producir suficiente pasto para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita vallado?

Ejercicio 2.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 4|$.

a) [**0'75 puntos**] Haz un esbozo de la gráfica de f.

b) [**1'75 puntos**] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 5$.

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + \ \ y + (\alpha - 1)z = \alpha - 1 \\ x - \alpha y - \qquad 3z = \ \ 1 \\ x + \ \ y + \qquad 2z = 2\alpha - 2 \end{cases}$$

a) [**1 punto**] Resuelve el sistema para $\alpha = 1$.

b) [**1'5 puntos**] Determina, si existe, el valor de α para el que $(x, y, z) = (1, -3, \alpha)$ es la única solución del sistema dado.

Ejercicio 4.- Considera el plano π de ecuación $mx + 5y + 2z = 0$ y la recta r dada por

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y}{n} = \frac{z-1}{2}$$

a) [**1 punto**] Calcula m y n en el caso en el que la recta r es perpendicular al plano π.

b) [**1'5 puntos**] Calcula m y n en el caso en el que la recta r está contenida en el plano π.

OPCIÓN A
SOLUCIONES

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Halla los valores *a, b* y *c* sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{x+c}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$, un asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo local en el punto de abscisa $x = 3$.

- Para que tenga asíntota vertical en $x = 1$, exigimos (con lo que será suficiente) que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$. Como $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+b}{x+c} = \dfrac{a+b}{1+c}$, siendo $a + b$ finito, debe ser $1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$.
  Y, en efecto: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+b}{x-1} = \left(\dfrac{a+b}{0}\right) = \infty \Rightarrow x = 1$ es A.V.
- La pendiente de una asíntota oblicua proviene del resultado de: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{ax^2+b}{x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+b}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+b}{x^2-x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2}{x^2} = a$. Como hay que exigir que dicha pendiente valga 2 $\Rightarrow a = 2$.
- Si $f'(3) = 0$ y $f''(3) \neq 0 \Rightarrow$ en $x = 3$, la función tendrá un extremo relativo. Exigimos eso, entonces:

  $$f(x) = \frac{2x^2+b}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x(x-1)-(2x^2+b)}{(x-1)^2} = \frac{4x^2-4x-2x^2-b}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x-b}{(x-1)^2}$$

  De donde $f'(3) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{18-12-b}{2^2} = \dfrac{6-b}{4} = 0 \Leftrightarrow 6-b = 0 \Leftrightarrow b = 6$

  Además:

  $$f''(x) = \frac{(4x-4)(x-1)^2-(2x^2-4x-6)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(4x-4)(x-1)-(2x^2-4x-6)2}{(x-1)^3}$$

  De donde: $f''(3) = \dfrac{8\cdot 2-(18-12-6)2}{8} = \dfrac{16-32+24-12}{8} = \dfrac{-4}{8} \neq 0$

En definitiva, $\boxed{a = 2,\ b = 6,\ c = -1, \text{ siendo } f(x) = \dfrac{2x^2+6}{x-1}}$.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Calcula $\int_0^{\pi} x^2\text{sen}(x)dx$

Calculamos la integral por partes:

$$\int_0^{\pi} x^2\text{sen}(x)dx = \left[\begin{array}{lll} u = x^2 & \Rightarrow & du = 2xdx \\ dv = \text{sen}(x)dx & \Rightarrow & v = -\cos(x)\end{array}\right] = \left[-x^2\cos(x)\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x\cos(x)dx$$

$$I = \int_0^{\pi} x\cos(x)dx = \left[\begin{array}{lll} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = \cos(x)dx & \Rightarrow & v = \text{sen}(x)\end{array}\right] = \left[x\,\text{sen}(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\text{sen}(x)dx =$$

$$= \left[x\,\text{sen}(x)\right]_0^{\pi} - \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi}$$

Sustituyendo:

$$\int_0^{\pi} x^2 \text{sen}\,(x)dx = \left[-x^2\cos(x) + 2x\text{sen}(x) + 2\cos(x)\right]_0^{\pi} = [(\pi^2 + 0 - 2) - (0 + 0 + 2)] = \boxed{\pi^2 - 4}$$

Ejercicio 3.- Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [1'5 puntos] Determina la matriz X para la que $A^tXB^{-1} = C$ (A^t es la traspuesta de A).

$$A^tXB^{-1} = C \Leftrightarrow (A^t)^{-1}A^tXB^{-1}B = (A^t)^{-1}CB \Leftrightarrow X = (A^t)^{-1}CB$$

supuesto que existe $(A^t)^{-1}$. Pero como:

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^t| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow \exists (A^t)^{-1}$$

Por cierto, $A = A^t$ (es simétrica). Calculemos la inversa de esta matriz (llámese A ó A^t):

$$\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X = (A^t)^{-1}C = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -10 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 21 & -10 & 0 \\ 9 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -7 & 10/3 & 0 \\ -3 & 5/3 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) [1 punto] Calcula el determinante de $B^{-1}(C^tC)B$, (C^t es la traspuesta de C).

Lo primero es asegurarse de que estamos ante una matriz cuadrada. La dimensión del producto será la de matrices de dimensiones:

$$3 \times 3 \;\cdot\; 3 \times 2 \;\cdot\; 2 \times 3 \;\cdot\; 3 \times 3$$

que se puede realizar y que resulta 3 x 3.

Una vez hecho esto, el determinante de un producto es el producto de los determinantes, y el determinante de una matriz y el de su inversa se anulan. Por tanto:

$$C^tC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es cero, porque tiene una fila de 0 (también, una columna). Por tanto:

$$|B^{-1}(C^tC)B| = |B^{-1}||C^tC||B| = |B^{-1}|\cdot 0 \cdot |B| = \boxed{0}$$

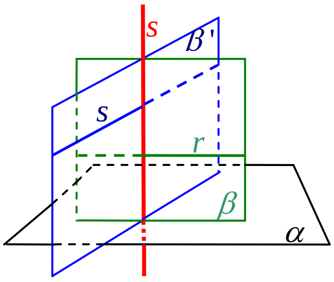
Ejercicio 4.- Sea r la recta definida por $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ y s la recta dada por $\begin{cases} x - y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$

a) [1'75 puntos] Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas dadas.

Si intentamos calcular la intersección de estas dos rectas, sustituyendo $(x, y, z) = (1, 1, \lambda-2)$, que es un punto general de r, en la ecuación de s, vemos que no se verifica la primera ecuación, por lo que no tienen intersección.

Además. $s \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$, como se obtiene llamando $y = t$, se tiene que: $\vec{d_r} = (0, 0, 1)$ y $\vec{d_s} = (1, 1\ 0)$, que no tienen la misma dirección. Por tanto, las dos rectas <u>se cruzan</u>.

Usamos un procedimiento estándar de cálculo de la perpendicular común de dos rectas que se cruzan.



1) Plano paralelo a ambas: El producto vectorial de sus respectivos vectores de dirección proporciona un vector perpendicular a ambas. Un plano que tenga a tal vector por vector normal, será paralelo a ambas.

$$\vec{d_r} \times \vec{d_s} = (0, 0, 1) \times (1, 1\ 0) = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, 1, 0)$$

Tomamos el plano con este vector normal que pase por el origen (0, 0, 0):

$$\alpha \equiv -x + y = 0$$

2) Plano que contiene a r y es perpendicular a α: Basta con que el vector normal a α y el de r estén contenidos en el plano, exigiendo que el plano contenga a un punto de r, que será el (1, 1, –2).

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 1 & 0 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -y + 1 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta \equiv x + y - 2 = 0$$

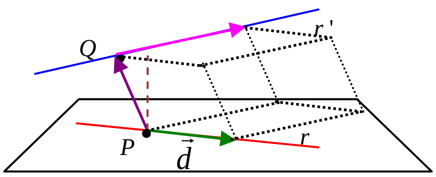
3) Lo mismo para s:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \beta' \equiv z + 1 = 0$$

La recta pedida es la intersección de estos dos planos:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

b) [0'75 puntos] Calcula la distancia entre r y s.

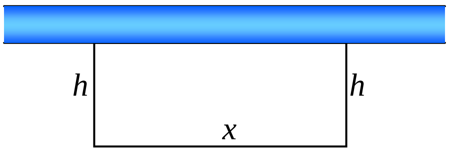


Siendo $P(1, 1, -2)$ y $Q(1, 0, -1)$ sendos puntos cualesquiera de r y s respectivamente, y sean $\vec{d_r}$ y $\vec{d_s}$ los vectores de dirección de las dos rectas:

$$d(r, r') = \frac{|[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{d_r} \times \vec{d_s}|} = \frac{abs\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{|(-1, 1, 0)|} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}\ u$$

OPCIÓN B
SOLUCIONES

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El terreno debe tener 180 000 m^2 para producir suficiente pasto para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita vallado?



Las variables h y x están ligadas por la restricción de que el área tiene que valer 180 000 m^2 = 18 hm^2 (podemos trabajar en *hm* para que los números sean más pequeños):

$$xh = 18 \Rightarrow h = \frac{18}{x}$$

Hay que minimizar el perímetro del recinto, que es variable según x y h, y su valor es:

$$x + 2h = x + 2\frac{18}{x} = \frac{x^2+36}{x}$$

Lo mínimo que puede valer x es 0, sin tocarlo (porque el recinto no tendría área). Lo máximo es cuando h tienda a 0, que será cuando x se haga lo mayor posible. Como $xh = 18 \Rightarrow x = 18/h$ y, entonces:

$$\lim_{h\to 0^+} x = \lim_{h\to 0^+} \frac{18}{h} = +\infty$$

De modo que tenemos que hallar los *mínimos absolutos* de:

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2+36}{x} \quad \text{en } x \in (0, +\infty)}$$

Comenzamos calculando $f'(x) = \dfrac{2x^2-(x^2+36)}{x^2} = \dfrac{x^2-36}{x^2}$

- Extremos del dominio: El comportamiento de la función hemos de hacerlo mediante límites, puesto que no hay imágenes:

  $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+36}{x} = \left(\frac{36}{0}\right) = +\infty$$

  $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+36}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

  Ya sabemos que *no va a haber máximo absoluto*, pues la función alcanza valores ilimitadamente grandes.
- Discontinuidades de f o de f': Se trata del punto $x = 0$, ya estudiado antes.
- Valores que anulan f': $x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{36} = 6$ (el valor negativo no está en el dominio).

  $$f(6) = \frac{36+36}{6} = 12$$

De todos los puntos estudiados, la menor imagen es ésta última, por lo que el mínimo absoluto está en 6 y vale 12. Las dimensiones del cercado son:

$$\boxed{\text{Base} = 6\ hm = 600\ m. \quad \text{Altura} = 18/6 = 3\ hm = 300\ m}$$

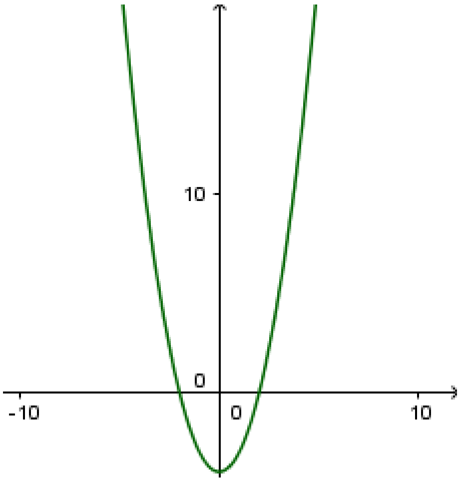
Ejercicio 2.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 4|$.

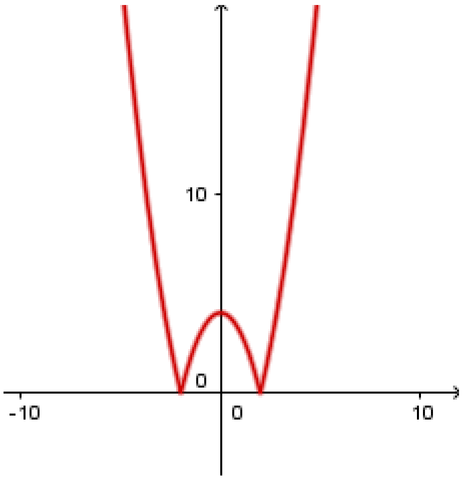
a) [**0'75 puntos**] Haz un esbozo de la gráfica de f.

La gráfica del valor absoluto de una función es la de dicha función cambiando los tramos que quedan bajo OX por sus simétricos respecto dicho eje. Por ello, dibujamos, en primer lugar, la parábola $y = x^2 - 4$:

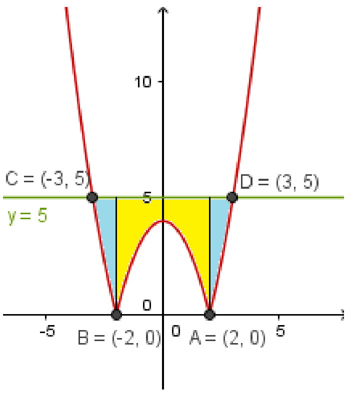
- Es *convexa*, porque el coeficiente de x^2 es positivo (sería el resultado de f'').
- Cortes con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = -4$: $\boxed{(0, -4)}$. $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$: $\boxed{(-2, 0) \text{ y } (2, 0)}$.
- *Eje*: $x = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow \boxed{x = 0}$ Esta recta vertical es eje de simetría.
- *Vértice*: (0, 0). Coincide con el mínimo, relativo y absoluto, de la parábola.

Así, la gráfica de $y = x^2 - 4$ es la primera, y la de $f(x) = |x^2 - 4|$, la segunda de las que siguen:





b) [**1'75 puntos**] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 5$.



Dicha área la dividimos en tres zonas, coloreadas en el gráfico adjunto.

La intersección de $y = 5$ con f es la misma que con $y = x^2 - 4$:

$$5 = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Por otra parte, la figura es simétrica respecto OY, dado que las dos funciones que la forman son *pares*.

Por tanto, el área pedida valdrá:

$$A = 2\left(\int_0^2 [5-(-x^2+4)]dx + \int_2^3 [5-(x^2-4)]dx\right) =$$

$$= 2\left(\int_0^2 (5+x^2-4)dx + \int_2^3 (5-x^2+4)dx\right) =$$

$$= 2\left(\int_0^2 (1+x^2)dx + \int_2^3 (9-x^2)dx\right) = 2\left(\left[x+\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_2^3\right) =$$

$$= 2\left[\left(2+\frac{8}{3}\right) - 0 + \left(27-\frac{27}{3}\right) - \left(18-\frac{8}{3}\right)\right] = \boxed{\frac{44}{3}\ u^2}$$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + \ \ y + (\alpha - 1)z = \alpha - 1 \\ \ x - \alpha y - \quad \ 3z = \ \ 1 \\ \ x + \ \ y + \quad \ 2z = 2\alpha - 2 \end{cases}$$

a) [**1 punto**] Resuelve el sistema para $\alpha = 1$.

La matriz ampliada del sistema se transforma en la siguiente, que pasamos a triangularizar para resolverla por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + 3F_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Estamos ante un *sistema compatible determinado* de solución única, pues, tras triangularizar, no ha quedado ninguna fila completa nula que podamos eliminar, ni ninguna con 0 en todas las columnas menos la última, que lo haría incompatible, y son tres ecuaciones con tres incógnitas. Reconstruimos las ecuaciones y lo resolvemos:

$$2^{a}\text{ ec: } 3z = 1 \Rightarrow z = 1/3$$

$$3^{a}\text{ ec: } -x + 2/3 = 0 \Rightarrow x = 2/3$$

$$1^{a}\text{ ec: } 4/3 + y = 0 \Rightarrow y = -4/3$$

La solución única es $\boxed{\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)}$

b) [**1'5 puntos**] Determina, si existe, el valor de α para el que $(x, y, z) = (1, -3, \alpha)$ es la única solución del sistema dado.

En primer lugar, comprobemos si la terna que nos dan puede ser solución del sistema para algún valor de α. Sustituyendo:

1^{a} ec: $2 - 3 + (\alpha - 1)\,\alpha = \alpha - 1 \Rightarrow -1 + \alpha^2 - \alpha - \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 0$ ó $\alpha = 2$

2^{a} ec: $1 + 3\alpha - 3\alpha = 1$, cierta para cualquier α.

3^{a} 3c: $1 - 3 + 2\alpha = 2\alpha - 2$, cierta para cualquier α.

Luego la terna es solución sólo si $\alpha = 0$ ó $\alpha = 2$. Veamos si para alguno de estos valores es la única solución.

- $\alpha = 0$. La matriz de los coeficientes tiene como determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 - 1 - 2 + 6 = 0$$

  De esta forma, $r(A) < 3$, con lo que, dado que el sistema es compatible, porque la terna que nos dan es solución, es *indeterminado*, porque el rango es *menor* que el número de incógnitas. Por tanto, la terna *no* es la única solución.

- $\alpha = 2$. En este caso:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 3 + 1 + 2 - 2 + 6 = -4 \neq 0$$

  $r(A) = 3 \Rightarrow r(A') = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

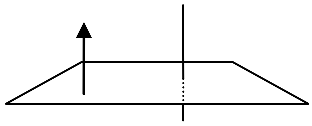
Por tanto, el único valor de α para el que $(1, -3, \alpha)$ es la única solución del sistema es $\boxed{\alpha = 2}$.

Ejercicio 4.- Considera el plano π de ecuación $mx + 5y + 2z = 0$ y la recta r dada por

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y}{n} = \frac{z-1}{2}$$

a) [**1 punto**] Calcula m y n en el caso en el que la recta r es perpendicular al plano π.

En este caso, el vector normal al plano $\vec{n} = (m, 5, 2)$ y el de dirección de r $\vec{d} = (3, n, 2)$ deben ser paralelos y, por tanto, proporcionales. Luego:

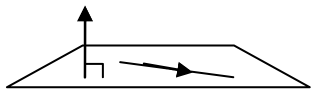


$$\frac{m}{3} = \frac{5}{n} = \frac{2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{3} = \frac{2}{2} \Rightarrow m = 3 \\ \frac{5}{n} = \frac{2}{2} \Rightarrow n = 5 \\ \frac{m}{3} = \frac{5}{n} \Rightarrow 15 = 15 \end{cases}$$

Por tanto: $\boxed{m = 3 \text{ y } n = 5}$.

b) [**1'5 puntos**] Calcula m y n en el caso en el que la recta r está contenida en el plano π.

Ahora, el vector normal y el de dirección deben ser perpendiculares, lo que requiere que su producto escalar sea nulo:



$$3m + 5n + 4 = 0 \Rightarrow 3m + 5n = -4 \Rightarrow \boxed{n = \frac{-3m-4}{5}}$$

Hay infinitas posibilidades: para cada valor de m, arbitrariamente escogido, obtenemos un correspondiente valor de n.
