IES Fernando de Herrera **Curso 2015 / 16**

Tercer trimestre - Prueba de observación continua nº 1 – 2º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Considerar los puntos: $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 1, 0)$ y $D(1, 0, 0)$.
   a) Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos A y B y que no corta a la recta determinada por C y D. *(1,2 puntos)*
   b) Hallar las ecuaciones de la recta determinada por los puntos medios de los segmentos AB y CD. *(1,3 puntos)*

2) Dados los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 1, 2)$ y $C(1, -1, 1)$:
   a) Comprobar que no están alineados y calcular el área del triángulo que determinan. *(1,5 puntos)*
   b) Hallar la ecuación del plano que es perpendicular a la recta determinada por B y C y que contiene al punto A. *(1 punto)*

3) Considerar la recta r definida por $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(1, 0, -1)$.
   a) Estudiar la posición relativa de ambas rectas. *(1 punto)*
   b) Determinar un punto C de la recta r tal que los segmentos CA y CB sean perpendiculares. *(1,5 puntos)*

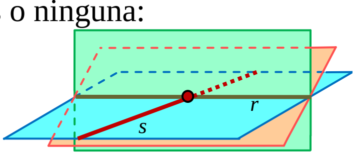
4) Considerar los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(0, -2, 2)$, $C(-1, 0, 2)$ y $D(2, -1, 2)$.
   a) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D. *(1 punto)*
   b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C. *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

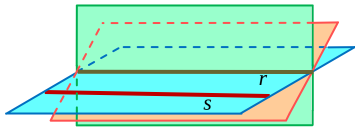
1) Considerar los puntos: $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 1, 0)$ y $D(1, 0, 0)$.

a) Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos A y B y que no corta a la recta determinada por C y D. *(1,2 puntos)*

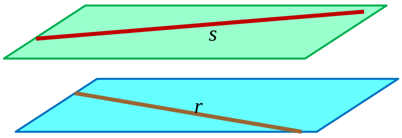
Nos piden un plano que contenga a una recta (la *AB*) y paralelo a otra (la *CD*). Dependiendo de la posición de ambas rectas, el problema tendrá una solución, infinitas o ninguna:



Si las rectas se cortan, no es posible: un plano contiene a las dos rectas. Si tomamos el haz de planos de base una de ellas (*r*), uno de ellos contiene a la otra recta (*s*) y el resto, la cortan en un punto (el común a ambas rectas).



Si las rectas son paralelas, todos los planos del haz de base una de ellas (*r*) son paralelos a la otra, salvo uno, que la contiene también.



Si las rectas se cruzan, podemos encontrar dos planos paralelos, cada uno de los cuales contiene a una de las rectas. Luego hay un único plano que contiene a una recta (*r*) y es paralelo a la otra (*s*).

Como:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 2, 2) - (1, 1, 1) = (1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{CD} = (1, 0, 0) - (1, 1, 0) = (0, -1, 0)$$

las dos rectas citadas, a las que llamaremos r y s, son:

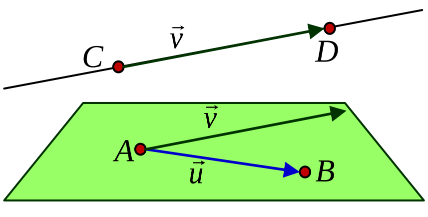
$$r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -p \\ z = 0 \end{cases}$$

si las igualamos, para buscar puntos comunes, resulta:

$$\begin{cases} 1+t = 1 \\ 1+t = -p \\ 1+t = 0 \end{cases}$$

que es un sistema incompatible, pues de la primera y tercera ecuación se deduciría que $1 = 0$. Por tanto, no tienen puntos en común.

Como los vectores de dirección no son proporcionales (uno no es múltiplo del otro, porque formando una matriz cuyas filas sean sus respectivas coordenadas, la matriz tiene rango 2, con sus dos primeras columnas), llevan distinta dirección. Por tanto, las rectas *se cruzan* y el problema tiene solución única.



Si el plano contiene a los puntos A y B, el vector $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ es un *vector de dirección del plano*. Si es paralelo a la recta determinada por C y D, el vector $\overrightarrow{CD} = (0, -1, 0)$ también es *vector de dirección* del plano. Con estos dos vectores (que no son múltiplo el uno del otro, por lo que determinan un plano) y el punto $A(1, 1, 1)$ (también podemos usar el B), tenemos la ecuación del plano que nos piden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 1 & -1 & y-1 \\ 1 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot 1 + (y-1)\cdot 0 + (z-1)\cdot(-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x - z = 0}$$

b) Hallar las ecuaciones de la recta determinada por los puntos medios de los segmentos AB y CD. *(1,3 puntos)*

Los puntos medios de dichos segmentos son:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{0+0}{2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow M'\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Conocemos dos puntos de la recta buscada. Un vector de dirección será el que va de uno a otro:

$$\overrightarrow{MM'} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right) - \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right)$$

Con este *vector de dirección* y uno de los dos puntos, por ejemplo el M', tenemos la recta:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2} - t \\ z = \quad -\frac{3}{2}t \end{cases}}$$

El vector de dirección podría haberse sustituido por el que resulta de multiplicarlo por 2, con lo que nos desharíamos de los denominadores. Para sustituir el punto, necesitamos la ecuación y darle valores a t.

2) Dados los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 1, 2)$ y $C(1, -1, 1)$:

a) Comprobar que no están alineados y calcular el área del triángulo que determinan. *(1,5 puntos)*

Una forma de averiguar si están alineados es ver si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales:

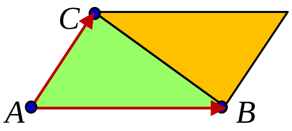
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1, 1, 2) - (1, 1, 0) = (0, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (1, -1, 1) - (1, 1, 0) = (0, -2, 1)$$

No son proporcionales, puesto que si lo fueran existiría t tal que:

$$t(0, 0, 2) = (0, -2, 1) \Leftrightarrow (0, 0, 2t) = (0, -2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = -2 \\ 2t = 1 \end{cases}$$

y la segunda ecuación no es cierta para ningún valor de t. Por tanto, los puntos $\boxed{\text{no están alineados}}$.

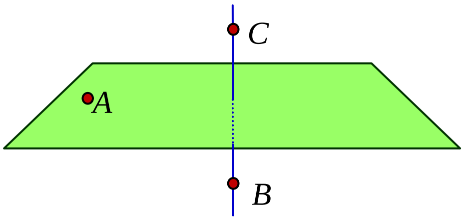


El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo tres de cuyos vértices son A, B y C. Y dicha área es el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 0, 2) \times (0, -2, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (4, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 0^2} = 4 \Rightarrow \boxed{\text{Área del triángulo} =} \frac{1}{2} 4 = \boxed{2 \ u^2}$$

b) Hallar la ecuación del plano que es perpendicular a la recta determinada por B y C y que contiene al punto A. *(1 punto)*



Si la recta BC es perpendicular al plano, el vector $\overrightarrow{BC}$ es un *vector normal* del mismo:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (1, -1, 1) - (1, 1, 2) =$$
$$= (0, -2, -1) = \vec{n}$$

Como el punto $A(1, 1, 0)$ es del plano, la ecuación del mismo será:

$$0(x-1) - 2(y-1) - 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow -2y - z + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{2y + z - 2 = 0}$$

3) Considerar la recta r definida por $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(1, 0, -1)$.

a) Estudiar la posición relativa de ambas rectas. *(1 punto)*

Escribimos ambas rectas en *paramétricas*. Para r, llamando $y = t$ y despejando en cada ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = \quad t \\ z = \ -t \end{cases}$$

Para s, $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1, 0, -1) - (2, 1, 0) = (-1, -1, -1)$, que podemos cambiar por su opuesto: (1, 1, 1). Usándolo como *vector director* junto al punto A:

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + p \\ y = 1 + p \\ z = \quad p \end{cases}$$

Busquemos puntos comunes a ambas (los de r se obtienen dando valores a r, y los de s, a p). Para ello, igualamos:

$$\left.\begin{array}{r} 2 - t = 2 + p \\ t = 1 + p \\ -t = p \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} t + p = 0 \\ t - p = 1 \\ t + p = 0 \end{array}\right\}$$

que es un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. La tercera ecuación es igual a la primera, por lo que podemos eliminarla. Y las otras dos, como el rango de la matriz de los coeficientes es 2, tienen solución única: $t = 1/2$ con $p = -1/2$.

Por tanto, $\boxed{\text{las dos rectas se cortan en un punto}}$. Dicho punto se obtiene dando t = 1/2 en r ó p = –1/2 en s, y es: $\boxed{(3/2,\ 1/2,\ -1/2)}$.

b) Determinar un punto C de la recta r tal que los segmentos CA y CB sean perpendiculares. *(1,5 puntos)*

Un punto general de r tiene la estructura $C(2 - t, t, -t)$, según se deduce de sus ecuaciones paramétricas. Por tanto:

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (2 - t - 2, t - 1, - t) = (-t, t - 1, - t)$$
$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (2 - t - 1, t, - t + 1) = (1 - t, t, - t + 1)$$

Dichos vectores serán perpendiculares si, y sólo si su producto escalar se anula:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -t(1 - t) + t(t - 1) - t(-t + 1) = - t + t^2 + t^2 - t + t^2 - t = 3t^2 - 3t = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3t(t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ó } t = 1$$

Hay dos soluciones, que son los puntos:

- $t = 0$: $\boxed{C(2, 0, 0)}$
- $t = 1$: $\boxed{C'(1, 1, -1)}$

4) Considerar los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(0, -2, 2)$, $C(-1, 0, 2)$ y $D(2, -1, 2)$.

a) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D. *(1 punto)*

El volumen de un tetraedro determinado por los cuatro puntos es 1/6 del volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0, -2, 2) - (1, 1, 1) = (-1, -3, 1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2) - (1, 1, 1) = (-2, -1, 1)$$
$$\overrightarrow{AD} = (2, -1, 2) - (1, 1, 1) = (1, -2, 1)$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 + 4 + 1 - 6 - 2 = -5$$

$$\textit{Volumen del paralelepípedo} = |-5| = 5\ u^3 \Rightarrow \boxed{\textit{Volumen del tetraedro} = \frac{5}{6}\ u^3}$$

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C. *(1,5 puntos)*

Si es perpendicular al plano, un vector *normal* al plano será un *vector de dirección* de la recta. Dicho vector podemos obtenerlo, por ejemplo, con $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1, -3, 1) \times (-2, -1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, -5)$$

Usando el punto $D(2, -1, 2)$ y el vector *opuesto* del obtenido, que también es *vector director*, la recta, en forma *continua*, es:

$$\boxed{\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{5}}$$

IES Fernando de Herrera **Curso 2015 / 16**

Tercer trimestre - Prueba de observación Global – 2º Bach CT

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **<u>Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto</u>** <u>o la</u> **<u>anulación</u>** en caso de usar tinta corregible.

1) Sean el punto $P(1, 6, -2)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{2}$.

   a) Hallar la ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r. *(1p)*

   b) Calcular la distancia entre el punto P y la recta r. *(1,5 puntos)*

2) Considerar el plano $\pi \equiv x + y + mz = 3$ y la recta $r \equiv x = y - 1 = \dfrac{z-2}{2}$.

   a) Hallar m para que r y π sean paralelos. *(0,75 puntos)*

   b) Hallar m para que r y π sean perpendiculares. *(0,75 puntos)*

   c) ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π? *(1p)*

3) Hallar las ecuaciones paramétricas de una recta sabiendo que corta a la recta r de ecuación $x = y = z$, es paralela al plano π de ecuación $3x + 2y - z = 4$ y pasa por el punto $A(1, 2, -1)$. *(2,5 puntos)*

4) Hallar el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases}$ que está más cercano al punto $P(1, 1, 0)$. *(2,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sean el punto $P(1, 6, -2)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{2}$.

a) Hallar la ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r.*(1p)*

Si el plano π contiene a r, es uno de los del *haz de planos de base* r. Pasamos r a la forma *general*:

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{6} = \dfrac{z}{2} \Rightarrow 2x-10 = 6z \Rightarrow 2x-6z-10=0 \\ \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{2} \Rightarrow 2y+2 = -3z \Rightarrow 2y+3z+2=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-3z-5=0 \\ 2y+3z+2=0 \end{cases}$$

Todos los planos que contienen a r son los siguientes, salvo $2y + 3z + 2 = 0$, que también la contiene:

$$x - 3z - 5 + \lambda(2y + 3z + 2) = 0$$

Busco $\lambda /\ P \in \pi$. Para ello, sustituyo las coordenadas de P:

$$1 + 6 - 5 + \lambda(12 - 6 + 2) = 0 \Rightarrow 2 + 8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1/4.$$

De donde:

$$\pi \equiv x - 3z - 5 - \frac{1}{4}(2y + 3z + 2) = 0 \Leftrightarrow 4x - 12z - 20 - 2y - 3z - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{4x - 2y - 15z - 22 = 0} \equiv \pi$$

b) Calcular la distancia entre el punto P y la recta r. *(1,5 puntos)*

Tomamos un punto $A \in r$, por ejemplo, $A(5, -1, 0)$. Calculamos $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (1, 6, -2) - (5, -1, 0) = (-4, 7, -2)$. Un vector de dirección de r es: $\vec{d} = (6, -3, 2)$. Se tiene:

$$\vec{d} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -3 & 2 \\ -4 & 7 & -2 \end{vmatrix} = (-8, 4, 30) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{d} \times \overrightarrow{AP}| = \sqrt{64+16+900} = \sqrt{980} = 14\sqrt{5}$$

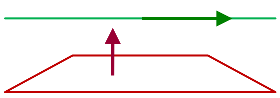
Además: $|\vec{d}| = \sqrt{36+9+4} = 7$

Por tanto:

$$d(P, r) = \frac{14\sqrt{5}}{7} = \boxed{2\sqrt{5}\ u}$$

2) Considerar el plano $\pi \equiv x + y + mz = 3$ y la recta $r \equiv x = y - 1 = \dfrac{z-2}{2}$.

a) Hallar m para que r y π sean paralelos. *(0,75 puntos)*

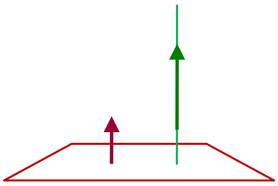


Si el vector normal al plano $\vec{n} = (1, 1, m)$ y el de dirección de la recta $\vec{d} = (1, 1, 2)$ son perpendiculares, la recta será paralela al plano o estará contenida en el mismo. Y dicha situación es equivalente a que su producto escalar se anule:

$$\vec{n} \cdot \vec{d} = (1, 1, m) \cdot (1, 1, 2) = 1 + 1 + 2m = 2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \boxed{m = -1}$$

Si la recta estuviese contenida en el plano, todos los puntos de la misma verificarían su ecuación. En particular, el (0, 1, 2). Como $0 + 1 - 1\cdot 2 \neq 3$, lo que sucede es que recta y plano son, en efecto, paralelos.

b) Hallar m para que r y π sean perpendiculares. *(0,75 puntos)*



La condición será, ahora, que los vectores anteriores lleven la misma dirección. Esto puede conseguirse exigiendo que sean proporcionales o que su producto vectorial se anule. Elegimos por la primera opción:

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{m}{2} \iff \boxed{m = 2}$$

c) ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π? *(1p)*

Se razonó en el apartado a que si, y sólo si $m = -1$, entonces $\vec{n}$ y $\vec{d}$ son perpendiculares. Por tanto, la recta estaría dentro del plano o sería paralela al mismo. Como al menos un punto de la recta, el (0, 1, 2) no está en el plano, la única posibilidad es que recta y plano son paralelos para este valor de m. Por lo tanto, $\boxed{\text{no hay posibilidad de que la recta esté contenida en el plano}}$.

3) Hallar las ecuaciones paramétricas de una recta sabiendo que corta a la recta r de ecuación $x = y = z$, es paralela al plano π de ecuación $3x + 2y - z = 4$ y pasa por el punto $A(1, 2, -1)$. *(2,5 puntos)*

Vamos a encontrar dos planos no paralelos que contienen a la recta buscada, a la que llamaremos s. Para empezar, como r y s se cortan, hay un plano que contiene a ambas. Dicho plano es, entonces, uno del *haz de planos de base* r:

$$\begin{cases} x = y \iff x - y = 0 \\ y = z \iff y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow x - y + \lambda(y - z) = 0$$

(el plano $y - z = 0$ también es del *haz* y no se consigue para ningún valor de λ). De todos ellos, elegimos el que contiene a $A(1, 2, -1)$, pues es un punto de s:

$$1 - 2 + \lambda(2 + 1) = 0 \iff -1 + 3\lambda = 0 \iff \lambda = 1/3$$

O sea: $3x - 3y + y - z = 0 \iff \boxed{3x - 2y - z = 0}$.

Si la recta es paralela a π, estará contenida en un plano paralelo a éste que, por tanto, tendrá su mismo vector normal: $(3, 2, -1)$. De todos esos planos, escogemos el que contiene a $A(1, 2, -1)$, pues la recta pasa por dicho punto:

$$3(x - 1) + 2(y - 2) - 1(z + 1) = 0 \iff \boxed{3x + 2y - z - 8 = 0}.$$

Estos dos planos no son paralelos, pues forman un sistema cuya matriz de los coeficientes tiene rango 2. De modo que:

$$s \equiv \begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ 3x + 2y - z - 8 = 0 \end{cases}$$

Nos queda pasarla a paramétricas (que así se nos pide). Triangularizando la matriz ampliada y resolviendo por Gauss:

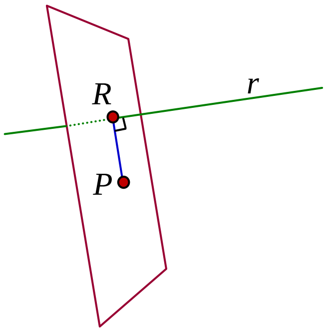
$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Y llamando $x = t$:

2ª ec: $4y = 8 \Rightarrow y = 2$

1ª ec: $3t - 4 - z = 0 \Rightarrow z = -4 + 3t$, de donde: $\boxed{s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = -4 + 3t \end{cases}}$

4) Hallar el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x+3y+z=1 \\ y+z=-1 \end{cases}$ que está más cercano al punto $P(1, 1, 0)$. *(2,5 puntos)*



Si llamamos R al punto de r que buscamos, el segmento PR será perpendicular a la recta. Estará, entonces, contenido en un plano perpendicular a r. Hallemos, entonces, el plano perpendicular a la recta r y que contiene a P.

Por ser perpendicular a r, el vector de dirección de ésta es normal al plano. Como la recta se puede escribir en paramétricas llamando $y = t$ y despejando:

2ª ec: $z = -1 - t$

1ª ec: $x + 3t - 1 - t = 1 \Rightarrow x = 2 - 2t$

De donde:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2-2t \\ y = \quad\quad t \\ z = -1-t \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = (-2, 1, -1)$$

El plano mencionado es, entonces (vector normal $\vec{n}$ y contiene a P):

$$-2(x-1) + 1(y-1) - 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow -2x + y - z + 1 = 0 \equiv \pi$$

El punto buscado es $R = r \cap \pi$. Sustituyendo la forma general de un punto de r, esto es: $(2 - 2t, t, -1 - t)$ en la ecuación de π:

$$-2(2-2t) + t - (-1-t) + 1 = 0 \Rightarrow -4 + 4t + t + 1 + t + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1/3$$

De donde: $R(2 - 2/3, 1/3, -1 - 1/3) = \boxed{(4/3, 1/3, -4/3)}$.

Hay más formas de resolverlo. Por ejemplo, desde la forma en paramétricas de r sabemos que un punto genérico tiene la forma $R(2 - 2t, t, -1 - t)$. Por tanto, el vector $\overrightarrow{PR} = (1 - 2t, t - 1, -1 - t)$. Este vector tiene que ser perpendicular a r y, por tanto, a su *vector de dirección* $\vec{d} = (-2, 1, -1) \Rightarrow$ Su producto escalar es 0: $-2 + 4t + t - 1 + 1 + t = 0 \Rightarrow 6t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1/3 \Rightarrow$ $R(4/3, 1/3, -4/3)$.

Una tercera forma sería calculando la distancia entre P y R:

$$d(P, R) = \sqrt{(2-2t-1)^2 + (t-1)^2 + (-1-t)^2} = \sqrt{(1-2t)^2 + (t-1)^2 + (1+t)^2} =$$
$$= \sqrt{1-4t+4t^2+t^2+1-2t1-+2t+t^2} = \sqrt{6t^2-4t+3} = d(t)$$

Ésta es la distancia, y es una función de t. Como es la raíz positiva de una parábola, el mínimo coincidirá con el vértice de la misma: $t = 4/12 = 1/3$. De donde la distancia mínima se obtiene para dicho valor, que corresponde a $R(4/3, 1/3, -4/3)$.