CONTINUIDAD DE FUNCIONES

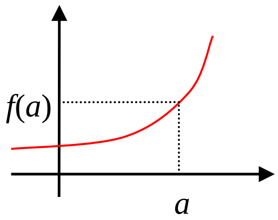
1. Definición de continuidad en un punto

Definición: Una función f se dice continua en un punto de abscisa a (o sea, en $x = a$) si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, lo que se lee como "*límite de f(x) cuando x tiende hacia a es igual a f(a)*". Esto es *equivalente* a que ocurran las tres condiciones siguientes:

1) $\exists f(a)$
2) $\exists \lim_{x\to a} f(x)$
3) Ambos valores coinciden

2. Clasificación de las discontinuidades

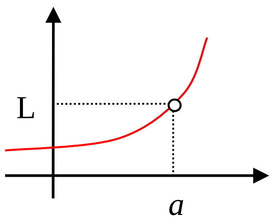
Si falla alguna de las tres condiciones, la función no será continua en $x = a$; se dice que presenta una discontinuidad en dicho punto. Según la condición que falle y por qué, clasificamos las discontinuidades en diferentes tipos. Veamos los casos que se pueden presentar:

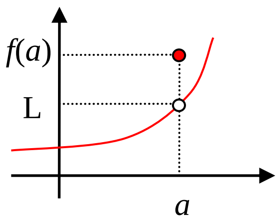


La función es continua en a, porque:
1) $\exists f(a)$
2 y 3) $\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$: si tomásemos cualquier sucesión de valores de x que tienda a a, las imágenes correspondientes se acercan infinitamente al valor $f(a)$

Discontinuidades:

a) Evitable: Falla la condición 1 ó la 3, pero no la 2. Puede ser porque $\nexists f(a)$ pero sí el límite L como en el primer dibujo (falla la 1 pero no la 2), o bien porque existe el límite L pero no coincide con $f(a)$, como en el segundo gráfico (falla la 3 pero no la 2).



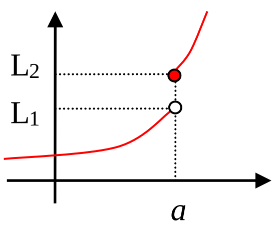


Este tipo de discontinuidad se llama evitable porque bastaría redefinir la función, obligando a que la imagen en a valga L. Cualquier otro tipo de discontinuidad se dice inevitable, y será porque falle la condición 2, independientemente de lo que ocurra con la condición 1.

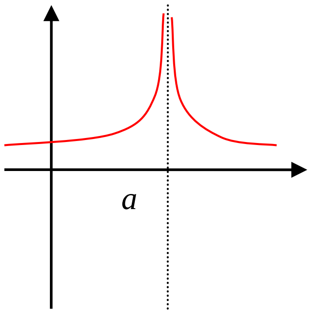
Observar que en todo punto que no pertenezca al dominio la función es discontinua, porque no cumplirá, al menos, la condición 1. Aunque para clasificar dicha discontinuidad como *evitable* hay que comprobar que, además, no falle la condición 2 de continuidad, es decir, que exista $\lim_{x\to a} f(x)$.

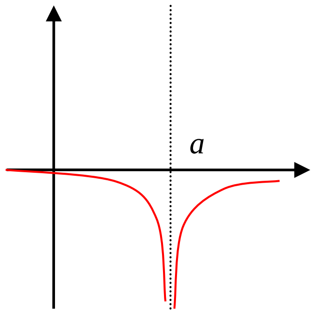
Veamos los distintos casos de discontinuidades inevitables:

b) Discontinuidad de salto finito o de primera especie: $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ pero existen los dos límites laterales y son finitos, aunque no coinciden. En el gráfico, $L_1 = \lim_{x\to a^-} f(x)$ y $L_2 = \lim_{x\to a^+} f(x)$. En este ejemplo, $\exists f(a) = L_2$. Pero también sería posible que coincidiera con L_1, o que $\nexists f(a)$ (en cuyo caso, fallaría también la condición 1), y seguiría siendo *discontinuidad de salto finito*. Lo que no sería posible es que a tuviera dos imágenes (en una función, cada valor de x tiene, como máximo, una sola imagen).

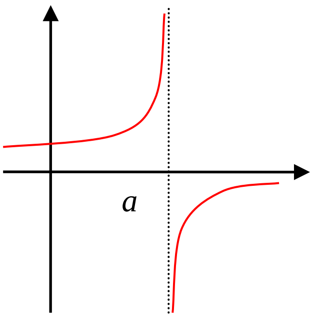


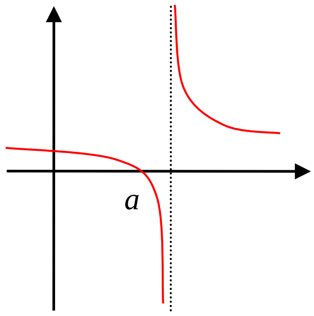
c) Discontinuidad asintótica: El límite es infinito: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (como ∞ no es un número, decimos que no existe; por tanto, aquí también falla la condición 2 de continuidad), o bien, alguno de los dos límites laterales en a es infinito. Se llama así porque en $x = a$ la función tiene una asíntota vertical[1]. Basta, además, con que sea ∞ un límite lateral. Pueden ocurrir tres situaciones:



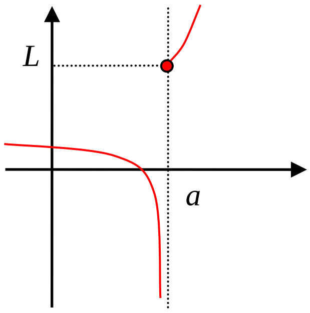


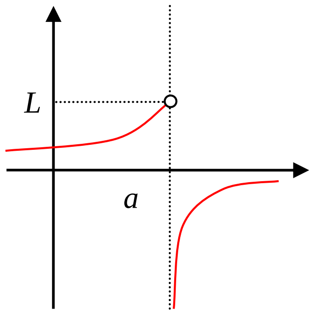
Los dos límites laterales coinciden en valer $+\infty$ o $-\infty$: La discontinuidad es, simplemente, asintótica (muchos autores también la clasifican como *asintótica de salto infinito*).





Uno de los límites laterales vale $+\infty$ y el otro, $-\infty$. La discontinuidad se dice asintótica de salto infinito.

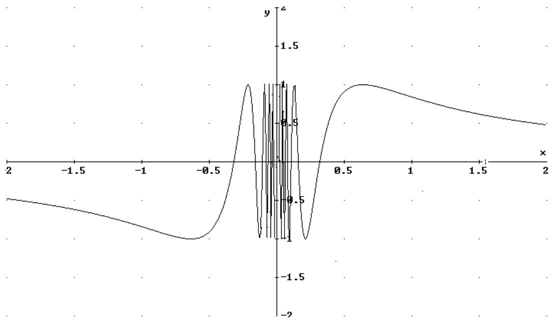




Uno de los límites laterales es finito, y el otro, ∞. (En este caso, el límite completo no da ningún resultado). También se trata de una discontinuidad asintótica de salto infinito.

Si sólo un límite lateral vale ∞ y el otro límite lateral no existe, es *discontinuidad asintótica*, sin más. Esto ocurre con $y = \ln x$ en $x = 0$, pues el límite por la izquierda no existe, ya que el dominio es $(0, +\infty)$, y por la derecha vale $-\infty$.

d) Discontinuidad esencial o de segunda especie: Falla la condición 2: $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$, pero no se encuadra en los casos anteriores (b ó c). Por ejemplo, la función $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ tiene una discontinuidad esencial en $x=0$, porque no existe $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ (no da ningún resultado, puesto que las imágenes oscilan entre -1 y $+1$ constantemente):



[1] Una recta vertical es una *asíntota vertical* cuando la curva se aproxima a la recta, más cuanto más acerquemos los valores de x hacia a. La asíntota y la curva no se cortan, salvo en el infinito, si pudiésemos alcanzarlo.

La nomenclatura de las discontinuidades no es estándar. Algunos autores incluyen las discontinuidades asintótica y asintótica de salto infinito como de segunda especie, mientras que otros las incluyen dentro de las de primera especie, conservando en general la denominación de *salto infinito*, en su caso. Probablemente es más abundante el número de los que opta por incluirlas dentro de las de segunda especie.

3. Continuidad en intervalos

Definición: Una función f se dice continua en un intervalo (finito o infinito) si es continua en cada punto de dicho intervalo.

Hay que puntualizar que *si el intervalo es cerrado*, en el extremo inferior no podemos tomar límite por la izquierda. En este caso, la condición 2 de continuidad se limita al límite por la derecha (se hablaría sólo de "continuidad por la derecha"). Similar situación ocurre en el límite superior. Por tanto, en el caso de intervalos cerrados, la función es continua si lo es en cada uno de los puntos del intervalo abierto, y si es continua por la derecha en el extremo inferior del intervalo, y por la izquierda en el superior.

4. Estudio de la continuidad de una función habitual

Teorema: Todas las funciones elementales son continuas en su dominio.

Entendemos por funciones elementales todas las que usamos habitualmente:

$$\text{Algebraicas}\begin{cases}\text{Polinómicas}: y = 2x^4 - 3x^3 + 5\\ \text{Racionales}: y = \dfrac{-2x^3+3x}{x^2-1}\\ \text{Irracionales}: y = \sqrt{x^2-5x+6}\\ \text{Potenciales}: y = (-2x^3+3x)^3\end{cases} \qquad \text{Transcendentes}\begin{cases}\text{Exponenciales}: y = 3^x\\ \text{Logarítmicas}: y = \log(x-2)\\ \text{Trigonométricas}: y = \cos 3x\end{cases}$$

También son continuas en su dominio funciones *compuestas* de funciones *elementales* y las operaciones habituales con funciones elementales (suma, producto, etc.).

Y también son continuas en su dominio cualquiera de estas funciones si están dentro de un valor absoluto.

Por tanto, el estudio de una función elemental, o compuesta de funciones elementales, o el valor absoluto de una de ellas, consiste en:

a) *Hallar su dominio*: En el conjunto de puntos resultantes, la función es continua.
b) *Clasificar las discontinuidades de los puntos que no pertenezcan al dominio*. (Se estudian sólo los puntos alrededor de los cuales existe la función. Por ejemplo, en $y = \sqrt{x}$ el dominio es [0, +∞), en todos los puntos del cual, la función es continua. Pero no estudiaríamos –1, por ejemplo, porque la función no está definida alrededor de –1).

5. Estudio de la continuidad de funciones definidas a trozos

Supongamos, una función del tipo: $f(x) = \begin{cases} f_1(x), \text{ si } x < a\\ f_2(x), \text{ si } a < x \le b\\ f_3(x), \text{ si } x > b\end{cases}$

a) Estudiamos la continuidad de $y = f_1(x)$. Si tiene discontinuidades, tomamos sólo las que sean menores que a, ignorando las restantes.
b) Hacemos lo mismo con $f_2(x)$: si tiene discontinuidades, sólo tomamos aquellas que sean mayores que a y menores que b.
c) Igual para $f_3(x)$, limitándonos a discontinuidades mayores que b.
d) Observar que ni a ni b se han estudiado todavía (no hemos dicho "menores o iguales que"). Los puntos que separan las diferentes zonas de definición (a y b) se estudian por separado, viendo si se cumplen en ellos las tres condiciones de continuidad.

Veamos varios ejemplos

1) **Estudiar la continuidad de:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{x-1}{x+2}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Solución. Como siempre que tenemos una función definida a trozos, la estudiamos en cada una de las regiones de definición, por separado, excluyendo de las mismas los valores de x que separan unas zonas de otras y vemos, a continuación, qué ocurre en dichos puntos.

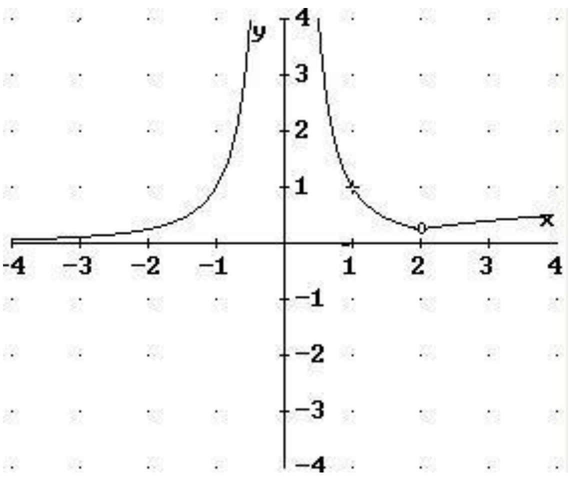
a) Intervalo $(-\infty, 2)$: f coincide con la función $y = 1/x^2$. Ésta, al ser una función racional, es continua en su dominio, que es R–{0}. Como x=0 es su único punto de discontinuidad y *está dentro del intervalo* $(-\infty, 2)$, f es continua en $(-\infty, 0)\cup(0,2)$. Veamos qué tipo de discontinuidad hay en $x = 0$.

Para empezar, $\nexists f(0)$. Además, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$, por lo que la discontinuidad es asintótica. Veamos si es, además, de salto infinito. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, (se puede ver el signo del ∞ dando a x valores muy próximos a 0, punto al que tiende, y observando el signo del resultado). Luego es discontinuidad asintótica en x=0, pero no es de salto infinito.

b) Intervalo $(2, +\infty)$: f coincide con la función $y=\dfrac{x-1}{x+2}$, que es continua en R–{–2}, porque en x=–2 se anula el denominador. Como *dicho valor no pertenece a este intervalo*, todos los puntos de $(2, +\infty)$ son valores donde la función es continua. O sea, f es continua en todo $(2, +\infty)$.

c) $x = 2$: De momento, $\nexists f(2)$, por lo que hay discontinuidad. Veamos el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Dado que f tiene distinta expresión si está a la derecha o a la izquierda de 2, estudiamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{4}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$. Luego $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{1}{4}$. Por tanto, la discontinuidad es evitable.

En definitiva:
f es continua en $(-\infty, 0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$; presenta una discontinuidad asintótica en $x = 0$ y evitable en $x = 2$.
La gráfica es la adjunta.



2) Estudiar la continuidad de:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{x-1}, & \text{si } x\le 0\\ 2x-6, & \text{si } 0<x\le 3\\ \sqrt{x-3}, & \text{si } x>3\end{cases}$$

Solución: Es análogo al anterior.

a) Intervalo $(-\infty,0)$: f coincide con $y=\dfrac{6}{x-1}$, cuya única discontinuidad está en $x = 1$, punto que no está en $(-\infty,0)$. Luego f es continua en todo el intervalo.

b) Intervalo $(0,3)$: f coincide con $y = 2x - 6$, que no tiene ninguna discontinuidad. Luego también es continua en todo el intervalo.

c) Intervalo $(3,+\infty)$: f coincide con $y=\sqrt{x-3}$, que es continua donde $x-3\ge 0$, es decir en $x\ge 3$. Luego todos los puntos de $(3,+\infty)$ son puntos de continuidad.

d) $x=0$: $f(0) = -6$; $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{6}{x-1}=-6$; $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 2x-6=-6$. Luego $\lim_{x\to 0} f(x)=-6=f(0)$, por lo que f es continua en $x=0$.

e) $x = 3$: $f(3) = 0$; $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} 2x-6=0$; $\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}=0$. Por tanto, f es continua en $x = 3$.

En resumen, f es continua en todo R.

3) Estudiar la continuidad de la siguiente función según los valores de *a*:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-5x+a, & \text{si } x\le 1\\ -x^2+x, & \text{si } x>1\end{cases}$$

Solución: Realizamos un estudio normal de continuidad, como si conociésemos el valor de a.

a) Intervalo $(-\infty,1)$: f coincide con $y = x^2 - 5x + a$, que no tiene ninguna discontinuidad (es polinómica). Por tanto, f es continua en todo el intervalo.

b) Intervalo $(1,+\infty)$: f coincide con $y = -x^2 + x$, luego es continua en todo el intervalo.

c) $x = 1$: $f(1)=-4+a$; $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2-5x+a=-4+a$; $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} -x^2+x=0$. El límite completo existirá cuando los laterales coincidan, es decir, si: $-4 + a = 0$, o sea, si $a = 4$. En este caso, $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$ y la función no tendrá discontinuidad en $x = 1$. En caso contrario, los laterales no coincidirán y tendrá una discontinuidad de salto finito.

En definitiva, si $a = 4$ f será continua en todo R. Pero si $a \neq 4$, tendrá una discontinuidad de salto finito en $x = 1$.