PROBLEMAS RESUELTOS POR EL MÉTODO DE GAUSS

1) Resolver el siguiente sistema por Gauss:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y+4z&=19\\ -3x+2y+2z&=-10\\ 4x+4y-3z&=6 \end{aligned}\right\}$$

Para resolver el sistema por el método de Gauss, hemos de *triangularizarlo*. Lo cual quiere decir que en una de las ecuaciones aparece sólo una incógnita; en otra ecuación, otra incógnita sola o acompañada de la incógnita anterior; en otra, otra incógnita sola o acompañada de alguna de las dos anteriores (o de ambas); y así sucesivamente.

Para lograr esto, buscamos que una de las incógnitas, por ejemplo la *x*, sólo aparezca en una ecuación. Es decir, que tenga coeficiente 0 en el resto. Luego, lo mismo, con otra de las incógnitas (*y*, por ejemplo) y *el resto* de las ecuaciones (la única ecuación donde aparecía la *x* no vuelve a utilizarse). Y así sucesivamente.

El método para conseguirlo es el mismo que el que empleábamos para resolver un sistema por reducción: elegimos dos ecuaciones y multiplicamos cada una de ellas por el número adecuado, de forma que en la incógnita que queremos eliminar aparezca el mismo coeficiente, positivo en una de las ecuaciones y negativo en la otra. La suma de dicha pareja de ecuaciones sustituirá a una de ellas, con lo que en esa ecuación habrá desaparecido una de las incógnitas.

Veamos el proceso trabajando directamente con las ecuaciones, tal como nos las han dado.

Dejaremos intacta la primera ecuación. A partir de ella, vamos a eliminar x en la segunda y en la tercera. Para conseguirlo, la primera ecuación la multiplicamos por 3 y la segunda, por 2; y sumamos, sustituyendo la segunda ecuación por el resultado (hemos acordado dejar intacta la primera ecuación). A continuación, multiplicaremos la primera ecuación por –2 y se la sumaremos a la tercera, sustituyendo esta última:

La ecuación a sustituir va en primer lugar y nunca se multiplica por un nº negativo

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y+4z&=19\\ -3x+2y+2z&=-10\\ 4x+4y-3z&=6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & \\ 2\cdot(2^a)+3\cdot(1^a):&\\ (3^a)-2(1^a):& \end{aligned} \left.\begin{aligned} 2x-3y+4z&=19\\ -5y+16z&=37\\ 10y-11z&=-32 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

La primera ecuación no la tocamos más. A partir de la segunda, vamos a eliminar y en la tercera. Para ello, a la tercera le sumamos la segunda ecuación multiplicada por 2:

$$\begin{aligned} & \\ & \\ (3^a)+2(2^a):& \end{aligned} \left.\begin{aligned} 2x-3y+4z&=19\\ -5y+16z&=37\\ 21z&=42 \end{aligned}\right\}$$

Ya está triangularizado el sistema: en la tercera ecuación sólo está z; en la segunda, z junto con y. Y en la primera, las dos anteriores más la x. Resolvemos la tercera ecuación:

$21z = 42 \Rightarrow z = 42/21 = 2$.

Sustituyendo en la segunda: $-5y + 16\cdot 2 = 37 \Rightarrow -5y + 32 = 37 \Rightarrow 32 - 37 = 5y \Rightarrow -5 = 5y \Rightarrow -5/5 = y \Rightarrow y = -1$.

Sustituyendo en la primera: $2x - 3(-1) + 4\cdot 2 = 19 \;\Rightarrow\; 2x + 11 = 19 \;\Rightarrow\; 2x = 19 - 11 \;\Rightarrow\; 2x = 8 \;\Rightarrow\; x = 8/2 = 4$.
Luego el sistema tiene solución única: $x = 4$ junto con $y = -1$ y con $z = 2$. Los sistemas que tienen una única solución se llaman **compatibles determinados**.

Vamos a repetir el proceso trabajando con el sistema **en forma matricial**. Partimos de la "*matriz ampliada*" que es una caja rectangular de filas y columnas, encerrada en un gran paréntesis, conteniendo únicamente los coeficientes de cada incógnita y los términos independientes. Realizamos exactamente los mismos pasos que antes. Pero hay que decir que el *Método de Gauss* se realiza siempre en forma matricial.

Método de Gauss

Consiste en lo siguiente: Se trabaja siempre en forma matricial, porque es mucho más simple y claro. Elegimos una fila. Usándola, hacemos 0 todas las posiciones de una determinada columna correspondiente a una de las incógnitas (no puede ser la columna de términos independientes) menos la posición correspondiente a la fila elegida, que no se cambia. La fila elegida ya no se vuelve a utilizar.
De entre las filas restantes, elegimos otra y, mediante ella, conseguimos que todas las demás posiciones de una determinada columna (las que no corresponden a la fila elegida en este paso ni a la elegida en el paso previo) se hagan 0. Esta fila, junto con la previa, no se vuelve a tocar.
Se repite el proceso con las filas restantes, tantas veces como filas tenía la matriz, menos una. Es decir, para tres filas, este proceso se hará dos veces. *Cuando hemos repetido el proceso todas las veces necesarias, decimos que la matriz está triangularizada*.
En los pasos que damos, usaremos cada vez dos filas. Multiplicamos cada una de ellas por el número adecuado para que los coeficientes de la incógnita que estamos eliminando se transformen en el mismo número, positivo en una de las filas y negativo en la otra. De este modo, al sumarlas, obtenemos un cero en la posición referente a la incógnita elegida. Esta suma resultante sustituirá a una de las dos filas. La fila no sustituida se vuelve a emparejar con otra fila para hacer 0 el coeficiente de la misma incógnita en esta otra fila. Así hasta conseguir 0 en toda la columna salvo en la posición correspondiente a la fila no sustituida. El resultado de la operación que hacemos con las dos filas (multiplicar cada una por un número y sumarlas) se llama *combinación lineal de filas*.
Debemos indicar la combinación lineal de filas que realizamos cada vez, para lo que escribiremos siempre en primer lugar la fila que estamos cambiando, multiplicada por un número si es necesario, y en segundo lugar, la fila que nos sirve para cambiarla, multiplicada, en su caso, por otro número. Si alguno de los números que multiplican a las filas debe ser negativo, será el de la fila que no es cambiada.

Veámoslo en nuestro problema. En la *matriz ampliada*, repitiendo exactamente los mismos pasos que se dieron antes con sus equivalentes en ecuaciones, queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 19 \\ -3 & 2 & 2 & -10 \\ 4 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ 2F_2+3F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 19 \\ 0 & -5 & 16 & 37 \\ 0 & 10 & -11 & -32 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ F_3+2F_2 \end{array}$$

La ecuación a sustituir va en primer lugar y nunca se multiplica por un nº negativo

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 19 \\ 0 & -5 & 16 & 37 \\ 0 & 0 & 21 & 42 \end{pmatrix}$$

El sistema está **triangularizado**, porque hemos repetido el proceso dos veces para tres ecuaciones. Así, en la tercera ecuación sólo está z, en la segunda está, además, y; y en la primera, además, x. O lo que es lo mismo, en una columna (que no es la última) hay 0 en todas las posiciones salvo en las de una fila (F_1); en otra (que no es la última), hay 0 en todas las posiciones salvo en una fila (F_2) y en la fila anterior (F_1). Resolvemos la tercera ecuación, reconstruyéndola a partir de la última matriz obtenida:

$21z = 42 \ \Rightarrow \ z = 42/21 = 2$.

Sustituyendo en la segunda: $-5y + 16\cdot 2 = 37 \ \Rightarrow \ -5y + 32 = 37 \ \Rightarrow \ 32 - 37 = 5y \ \Rightarrow \ -5 = 5y \ \Rightarrow \ -5/5 = y \ \Rightarrow \ y = -1$.

Sustituyendo en la primera: $2x - 3(-1) + 4\cdot 2 = 19 \ \Rightarrow \ 2x + 11 = 19 \ \Rightarrow \ 2x = 19 - 11 \ \Rightarrow \ 2x = 8 \ \Rightarrow \ x = 8/2 = 4$.

Luego el sistema tiene solución única: $x = 4$ junto con $y = -1$ y con $z = 2$.

Los sistemas deben resolverse siempre en su forma matricial, aunque nosotros también lo hemos hecho con las ecuaciones originales por ilustrar el procedimiento.

2) Resolver el siguiente sistema por Gauss:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 4y + 3z = 4500 \\ x \qquad\quad + z = 1000 \\ 3x + y \qquad\ = 1100 \end{array}\right\}$$

Vamos a resolver este sistema trabajando directamente con las ecuaciones, tal como nos las han dado.

Dejaremos intacta la segunda ecuación. A partir de ella, vamos a eliminar z en la primera, (aprovechándonos de que en la tercera tampoco aparece z; pero es igual partir de cualquiera de las tres ecuaciones y eliminar cualquiera de las tres incógnitas). Para conseguirlo, la primera ecuación la multiplicamos por 1 (o sea, no la tocamos) y la segunda, por -3, y sumamos, sustituyendo la primera ecuación por el resultado (hemos acordado dejar intacta la segunda ecuación):

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 4y + 3z = 4500 \\ x \qquad\quad + z = 1000 \\ 3x + y \qquad\ = 1100 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rl} (1^a) - 3(2^a): & 2x + 4y \qquad = 1500 \\ & x \qquad\quad + z = 1000 \\ & 3x + y \qquad\ = 1100 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La ecuación 2ª (la que hemos acordado no tocar, pero que hemos usado para eliminar z en la 1ª) ya no la usaremos más.

Ahora, para, por ejemplo, eliminar y en la 1ª a partir de la 3ª (la 2ª ya no la tocamos), multiplicamos la 1ª por 1 y la segunda por –4 y sumamos, sustituyendo la 1ª ecuación por el resultado:

$$\left.\begin{array}{rl} (1^a) - 4(3^a): & -10x \qquad\qquad = -2900 \\ & x \qquad\quad + z = 1000 \\ & 3x + y \qquad\ = 1100 \end{array}\right\}$$

Y ya está triangularizado el sistema, porque hemos repetido el proceso dos veces y teníamos tres ecuaciones. Con ello, en la primera ecuación sólo tenemos la incógnita x, en la 3ª, dicha incógnita más la y, y en la 2ª ecuación, dichas incógnitas (aunque el coeficiente de y es 0) más la z. Despejando en la 1ª:

$x = 290 \;\Rightarrow\;$ Sustituyendo en la 3ª: $870+y = 1100 \;\Rightarrow\; y = 230 \;\Rightarrow\;$ Sustituyendo en la 2ª: $290+z = 1000 \;\Rightarrow\; z = 710$

Solución única: x=290; y=230; z=710 (sistema *compatible determinado*).

Resolvamos ahora el mismo sistema matricialmente, que es como debemos hacerlo. Realizamos exactamente los mismos pasos que antes, indicando en cada paso las combinaciones lineales de filas que empleamos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 4500 \\ 1 & 0 & 1 & 1000 \\ 3 & 1 & 0 & 1100 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - 3F_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1500 \\ 1 & 0 & 1 & 1000 \\ 3 & 1 & 0 & 1100 \end{pmatrix}$$

Ya no tocaremos más F_2, que es la que se ha usado para cambiar F_1. No ha hecho falta cambiar F_3 porque ya tenía cero en la C_3, que es donde hemos conseguidos 0 en todas las posiciones salvo la de la fila usada (F_2).

Usamos, ahora F_3 para cambiar F_1 de manera que en C_2 tengamos un 0 en todas las posiciones salvo en la de la fila usada para la operación (F_3) y en la fila que ya no tocamos (F_2). Lo que pasa, es que nos vamos a encontrar con el regalo de un segundo 0 en esta columna: mejor.

$$\xrightarrow{F_1 - 4F_3} \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 & -2900 \\ 1 & 0 & 1 & 1000 \\ 3 & 1 & 0 & 1100 \end{pmatrix}$$

Ya tenemos **triangularizado** el sistema, porque hemos dado los dos pasos necesarios en un sistema con tres ecuaciones. Y en la primera ecuación sólo aparece x; en la tercera, la misma x más la y. Y en la segunda, la x, la y (aunque multiplicada por 0) y la z. O, de forma equivalente, una de las columnas (C_3) tiene 0 en todas las posiciones salvo la correspondiente a cierta fila (F_2); en otra (C_2) hay 0 en todas las posiciones salvo en las de la fila anterior (F_2) y otra (F_3). Lo que pasa es que, en nuestro ejemplo, hay un 0 adicional (el de F_2): no pasa nada, sino que es mejor aún.

Escribimos las ecuaciones completas y vamos resolviendo, empezando por la que solo tiene una incógnita, o sea, la primera ecuación:

$x = 290 \;\Rightarrow\;$ Sustituyendo en la 3ª: $870+y = 1100 \;\Rightarrow\; y = 230 \;\Rightarrow\;$ Sustituyendo en la 2ª: $290+z = 1000 \;\Rightarrow\; z = 710$

Repetimos: **los sistemas hay que resolverlos siempre en forma matricial**.

3) Clasificar y dar todas las soluciones del siguiente sistema, resolviéndolo por el método de Gauss. Si tuviera más de una solución, dar una concreta:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y - 2z &= 1 \\ -2x + 4y - 3z &= 3 \\ 2x - 2y - 7z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y - 2z &= 1 \\ -2x + 4y - 3z &= 3 \\ 2x - 2y - 7z &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \\ (2^a)+(1^a): \\ (3^a)-(1^a): \end{matrix} \left.\begin{aligned} 2x - 3y - 2z &= 1 \\ y - 5z &= 4 \\ y - 5z &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ (3^a)-(2^a) \end{matrix} \left.\begin{aligned} 2x - 3y - 2z &= 1 \\ y - 5z &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to \\ F_3 - F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema está triangularizado porque hemos repetido dos veces el proceso para tres ecuaciones. Eliminamos la tercera fila (ecuación), por ser trivial, ya que $0 = 0$ se va a verificar siempre, sean cuales sean los valores de las incógnitas.
Al quedar, entonces, dos ecuaciones con tres incógnitas, pasamos una de éstas al segundo miembro; a partir de ahora, actuará como parámetro (ya no es incognita, porque no toma un valor desconocido: el valor de esta incógnita será arbitrariamente fijado por nosotros). Dicha incógnita será, por ejemplo, z (podría ser, también y, pero no deberíamos pasar al segundo miembro x porque nos costaría más esfuerzo terminar de resolver el problema):

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y&=1+2z \\ y&=4+5z \end{aligned}\right\}$$

El sistema está triangularizado. Como el valor de z queda libre, para recalcarlo, llamamos $z = t$. Entonces:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y&=1+2t \\ y&=4+5t \end{aligned}\right\}$$

Ya tenemos el valor de dos incógnitas: $z = t$ e $y = 4+5t$ (de la segunda ecuación). Sustituyendo en la primera:

$$2x-3(4+5t) = 1+2t \;\Rightarrow\; 2x-12-15t = 1+2t \;\Rightarrow\; 2x = 13+17t \;\Rightarrow$$
$$x=\frac{13}{2}+\frac{17}{2}t$$

Luego las soluciones (<u>infinitas</u>, una para cada valor de t, elegido éste por nosotros de forma arbitraria) son:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x&=\frac{13}{2}+\frac{17}{2}t \\ y&=4+5t \\ z&=t \end{aligned}\right\}}$$

Es decir, es un *sistema compatible indeterminado*, lo que significa que tiene *infinitas soluciones*. Para, por ejemplo $t = 1$, obtenemos la solución: (x=15, y=9, z=1).

<u>Clasificación de los sistemas según su número de soluciones</u>

Los sistemas lineales se clasifican en **compatibles** (tienen alguna solución) o **incompatibles** (no tienen solución). Los compatibles, además, pueden ser **compatibles determinados** (tienen solución única) o **compatibles indeterminados** (tienen infinitas soluciones). No hay más posibilidades para los sistemas de ecuaciones lineales. Si los términos independientes son todos cero, el sistema se dice **homogéneo**. Los sistemas homogéneos tienen siempre la solución trivial $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Por tanto, *siempre son compatibles*. Pueden tener más soluciones, en cuyo caso van a tener infinitas soluciones. Es decir, pueden ser *compatibles determinados* (sólo la solución trivial) o *compatibles indeterminados* (infinitas soluciones), pero no pueden ser incompatibles.

4) Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones:

$$\left\{\begin{aligned} x-y-z&=-2 \\ 2x+3y-z&=2 \\ 4x+y-3z&=-2 \end{aligned}\right.$$

Escribimos la matriz ampliada y resolvemos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \\ F_2-2F_1: \\ F_3-4F_1: \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to \\ F_3-F_2: \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eliminamos la tercera fila, por trivial. Por tanto, el sistema queda con dos ecuaciones y tres incógnitas. Pasando la z al segundo miembro y llamándola, por ejemplo, t, el sistema será:

$$\begin{cases} x-y=-2+t \\ 5y=6-t \end{cases}$$

Que ya está triangularizado. Despejando y en la segunda ecuación, queda:

$$y=\frac{6-t}{5}$$

Sustituyendo en la primera:

$$x-\frac{6-t}{5}=-2+t \quad \Rightarrow \quad x=-2+t+\frac{6-t}{5}=\frac{-10+5t+6-t}{5}=\frac{4t-4}{5}$$

Es decir, que las soluciones son de la forma:

$$\boxed{\left(\frac{4t-4}{5}, \frac{6-t}{5}, t\right)}$$

El sistema tiene, entonces, <u>infinitas soluciones</u> (para cada valor de t obtenemos una solución). Luego es *compatible indeterminado*.

5) Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x-4y-3z+5t&=14 \\ 3x-2y+z-2t&=9 \\ 4x-3y-4z+3t&=13 \\ 5x+5y+4t&=18 \end{aligned}\right\}$$

1) Para empezar, se escribe el sistema en ***forma matricial***: sólo los coeficientes de las incógnitas y el término independiente:

$$\left.\begin{aligned} 2x-4y-3z+5t&=14 \\ 3x-2y+z-2t&=9 \\ 4x-3y-4z+3t&=13 \\ 5x+5y+4t&=18 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 & 5 & 14 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 9 \\ 4 & -3 & -4 & 3 & 13 \\ 5 & 5 & 0 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

2) A continuación, se ***triangulariza***: Buscamos que una columna (que no sea la última) esté compuesta de ceros en todas las posiciones menos en una. Dentro de las filas correspondientes a los ceros de la columna anterior, sin fijarnos en la fila que no tiene el cero, hemos de buscar otra columna (que no sea la última) con ceros en todas las posiciones menos en una. Y así sucesivamente, con tantas columnas con ceros como filas haya menos una unidad (en el ejemplo anterior: filas – 1 = 4 – 1 = 3 columnas con los ceros en la forma descrita). Ver más abajo como queda la matriz anterior ya triangularizada.

Se triangulariza así:

- Paso 1: En una columna cualquiera *que no sea la última*, buscamos ceros en todas las posiciones menos la correspondiente a una fila que no se va a alterar. Lo hacemos realizando *transformaciones lineales de filas*. Consisten en sustituir una *fila* por ella misma multiplicada por un número *positivo* más otra multiplicada por un número *positivo o negativo*, de manera que al sumarlas resulte 0 en el cruce de la fila sustituida con la columna con la que trabajemos. Se hace lo mismo para el resto de filas, *basándose siempre en la fila que no se va a alterar*.
  En el ejemplo anterior, trabajaremos en la columna 3 (C_3) basándonos en la fila 2 (F_2), y escribimos las operaciones que hacemos, situando siempre en primer lugar la fila sustituida:
  $$\xrightarrow[\substack{F_1+3F_2 \\ F_3+4F_2}]{} \begin{pmatrix} 11 & -10 & 0 & -1 & 41 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 9 \\ 16 & -11 & 0 & -5 & 49 \\ 5 & 5 & 0 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$
  Así, para conseguir un cero en F_1 (para la columna trabajada, C_3) a partir de F_2, tengo que multiplicar F_1 por un número *positivo* (porque es la fila que voy a sustituir) y F_2 por uno *positivo o negativo* de manera que ambas den el mismo resultado en la columna C_3. Como tenía –3 en F_1 y 1 en F_2, y el mcm de ambos números (tomados positivos) es 3, necesito que resulte –3 en F_1 y 3 en F_2 (no al revés, porque la fila sustituida no puede cambiarse de signo). Para ello, multiplico $1\cdot F_1$ y $3\cdot F_2$ y sumo:
  $$\begin{matrix} F_1: & 2 & -4 & -3 & 5 & 14 \\ F_2: & 3 & -2 & 1 & -2 & 9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} F_1: & 2 & -4 & -3 & 5 & 14 \\ 3F_2: & 9 & -6 & 3 & -6 & 27 \\ \hline F_1+3F_2: & 11 & -10 & 0 & -11 & 41 \end{matrix}$$
  El resultado sustituye a F_1 (la que va escrita en primer lugar). Recordar que la fila sustituida no puede multiplicarse por un número negativo.
  Igual se ha hecho con la F_3 a partir de F_2.
  $$\begin{matrix} F_2: & 3 & -2 & 1 & -2 & 9 \\ F_3: & 4 & -3 & -4 & 3 & 13 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4F_2: & 12 & -8 & 4 & -8 & 36 \\ F_3: & 4 & -3 & -4 & 3 & 13 \\ \hline F_3+4F_2: & 15 & -11 & 0 & -5 & 49 \end{matrix}$$
- Paso 2: Limitándonos a las filas con ceros en la columna que acabamos de trabajar, repetimos al operación con otra columna *que no sea la última*: buscamos 0 en todas las posiciones menos en una (sin contar la fila en la que ya no nos fijamos).
  En nuestro ejemplo, lo hacemos con C_4, que es la que vemos con operaciones más fáciles:
  $$\xrightarrow[\substack{F_3-5F_1 \\ F_4+4F_1}]{} \begin{pmatrix} 11 & -10 & 0 & -1 & 41 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 9 \\ -39 & 39 & 0 & 0 & -156 \\ 49 & -35 & 0 & 0 & 182 \end{pmatrix}$$
  Si alguna *fila* se puede simplificar, se hace (*no se pueden simplificar columnas*). Por ejemplo, la F_3 entre 39 y F_4 entre 7:

$$\begin{pmatrix} 11 & -10 & 0 & -1 & 41 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 9 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 7 & -5 & 0 & 0 & 26 \end{pmatrix}$$

- Paso 3: Repetimos el paso 2 con otra columna. Será la última, porque hay 4 filas, luego basta hacerlo con 3 columnas.
  En nuestro ejemplo, lo haremos con C_1:
  $$\xrightarrow{F_4+7F_3} \begin{pmatrix} 11 & -10 & 0 & -1 & 41 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 9 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
  Y simplificamos F_4:
  $$\boxed{\begin{pmatrix} 11 & -10 & 0 & -1 & 41 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 9 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$
  Ya está triangularizada.
  El nombre de *triangularizada* es porque intercambiando entre sí filas o columnas se puede conseguir un triángulo de ceros. En este ejemplo:
  $$\begin{pmatrix} 11 & -10 & 0 & -1 & 41 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 9 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} F_1 \leftrightarrow F_2: \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 & 9 \\ 11 & -10 & 0 & -1 & 41 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
  $$C_1\leftrightarrow C_3: \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 9 \\ 0 & -10 & 11 & -1 & 41 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} C_2\leftrightarrow C_4: \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 9 \\ 0 & -1 & 11 & -10 & 41 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
  Vemos el triángulo en la esquina inferior izquierda: la primera columna, con ceros en todas las posiciones menos una; la segunda, con ceros menos una (sin contar la fila primera); la tercera, en todas menos una (sin contar las filas primera y segunda). No nos entretenemos en hacer estos cambios: sólo los mostramos para ilustrar por qué se dice que *triangularizamos*.

3) Con la matriz *triangularizada*, reconstruimos el sistema, que ya es inmediato resolver:

$$\begin{pmatrix} 11 & -10 & 0 & -1 & 41 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 9 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 11x-10y\quad -t &= 41 \\ 3x-2y+z-2t &= 9 \\ -x+y\qquad &= -4 \\ y\qquad &= -1 \end{aligned}\right\}$$

4ªec: $y=-1$
3ªec: $-x-1=-4 \Rightarrow x=3$
1ªec: $33+10-t=41 \Rightarrow t=2$
2ªec: $9+2+z-4=9 \Rightarrow z=2$

Por lo que $\boxed{\text{la solución es la cuaterna: } (3, -1, 2, 2)}$.

6) (Septiembre 2007) Clasifique y resuelva el sistema formado por las tres ecuaciones siguientes:

$x - 3y + 2z = 0$; $-2x + y - z = 0$; $x - 8y + 5z = 0$.

El sistema es:

$$\left.\begin{aligned} x-3y+2z&=0\\ -2x+y-z&=0\\ x-8y+5z&=0 \end{aligned}\right\}$$

Es *homogéneo*, puesto que los términos independientes son todos 0. Por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0\\ -2 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -8 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ F_2+2F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & -5 & 3 & 0\\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \rightarrow \\ F_3-F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & -5 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya está triangularizado, y la última fila es toda ella de 0, por lo que la eliminamos. No hay ninguna fila completa de ceros salvo la última columna, por lo que es compatible. Y como quedan menos ecuaciones (2) que incógnitas (3), es un <u>*sistema homogéneo compatible indeterminado*</u>, con infinitas soluciones. Lo reconstruimos, para hallarlas:

$$\left.\begin{aligned} x-3y+2z&=0\\ -5y+3z&=0 \end{aligned}\right\} \text{ Llamamos } z=t\text{:} \quad \left.\begin{aligned} x-3y&=-2t\\ 5y&=3t \end{aligned}\right\}$$

2ª ec: $y = 3t/5$

1ª ec: $x = -2t + 9t/5 = -t/5$

Luego la forma general de las infinitas soluciones es: $\boxed{(-t/5, 3t/5, t)}$. Si usamos $k = 5t$, podemos prescindir de denominadores: $\boxed{(-k, 3k, 5k)}$.

Discusión de un sistema

Consiste en clasificarlo, según su número de soluciones. Se hace <u>tras triangularizar la matriz</u> y antes de resolverlo.

Siempre que, después de triangularizar, obtenemos una fila con 0 en todas las posiciones relativas a las incógnitas y un número no nulo en la posición del término independiente, el sistema será **incompatible**.

Siempre que, después de triangularizar, nos quede una fila completa de ceros, la eliminamos. Cuando, tras ello, nos queden menos ecuaciones que incógnitas y no se cumpla la condición enunciada anteriormente, el sistema será **compatible indeterminado**. Y si nos queda el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, el sistema será **compatible determinado**.

7) Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0\\ 2x+3y-z&=17\\ 4x+5y+z&=17 \end{aligned}\right\}$$

Trabajamos con la matriz *ampliada* (que así se llama la matriz que esquematiza el sistema):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 17\\ 4 & 5 & 1 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-4F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 17\\ 0 & 1 & -3 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 17\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la tercera fila es de 0, la eliminamos. Las dos filas restantes corresponden a un sistema ya triangularizado, pero con dos ecuaciones y tres incógnitas. Pasamos, por ejemplo z al segundo miembro; a partir de ahora, actuará de parámetro: $z = t$, suponiendo t un número conocido, cuyo valor determinamos nosotros a nuestro antojo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+\ \ z=0 \\ y-3z=17 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=\ \ \ \ -z \\ y=17+3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=\ \ \ \ -t \\ y=17+3t \end{array}\right\}$$

La segunda ecuación nos da el valor de y. Sustituyéndolo en la primera y despejando:

$$x + 17 + 3t = -t \ \Rightarrow \ x = -17 - 4t$$

Luego el sistema tiene infinitas soluciones. Es decir, es *compatible indeterminado*. Y las infinitas soluciones, dependientes del valor que, para cada una de ellas, elijamos para t, son:

$$(x = -17-4t,\ y = 17+3t,\ z = t)$$

8) Resolver el siguiente sistema por Gauss:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+4z=19 \\ -3x+2y+2z=-10 \\ -x-y+6z=1 \end{array}\right\}$$

Lo resolveremos matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 19 \\ -3 & 2 & 2 & -10 \\ -1 & -1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3:F_1+2F_3]{F_2:3F_1+2F_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 19 \\ 0 & -5 & 16 & 37 \\ 0 & -5 & 16 & 39 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3:-F_2+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 19 \\ 0 & -5 & 16 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Este sistema es **incompatible**, puesto que la última ecuación es:

$$0 = 2$$

Y ningún valor de x, y, z puede hacer que dicha igualdad sea cierta. Luego no tiene solución.

9) Clasificar según el número de soluciones y resolver por el método de Gauss en su forma matricial (no es válido ningún otro método) el siguiente sistema. Si tuviera más de una solución, dar dos soluciones concretas: *(2 puntos)*

$$\left\{\begin{array}{l} -2x-2y-3z=5 \\ 3x+3y+5z=-7 \\ -5x-5y-8z=12 \end{array}\right.$$

Realizamos transformaciones lineales de filas en la matriz ampliada con el fin de triangularizar la matriz de los coeficientes (formada por la matriz ampliada salvo la última columna:

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & -7 \\ -5 & -5 & -8 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3-5F_1]{2F_2+3F_1} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la F_3 resultante es nula, la eliminamos. El sistema queda triangularizado. No bastaba con el primer paso, porque hay que dar dos pasos (hay 3 filas). Queda con una ecuación menos que incógnitas, por lo que es un sistema compatible indeterminado.

Llamamos $y = t$ (también podríamos $x = t$, pero no $z = t$, pues la triangularización la forman la 1ª y 3ª columna cruzadas con las filas 2ª y 3ª, o la 2ª y 3ª columna cruzada con las mismas filas. No la forman 1ª y 2ª columna. Por otra parte, la 2ª ecuación proporciona un valor *fijo* de z, por lo que no puede llamarse $z = t$, siendo t variable y arbitrariamente escogido por nosotros):

- 2ª ecuación: $z = 1$.
- 1ª ecuación: $-2x - 2t - 3 = 5 \Rightarrow -2t - 3 - 5 = 2x \Rightarrow x = \dfrac{-8-2t}{2} = -4 - t$

Luego la forma general de las infinitas soluciones es: $(-4 - t, t, 1)$.

Dos soluciones concretas son:

- $t = 0$: $(-4, 0, 1)$
- $t = 1$: $(-5, 1, 1)$

DISCUSIÓN DE SISTEMAS DEPENDIENTES DE PARÁMETROS, POR EL MÉTODO DE GAUSS

10) Discuta y resuelva el siguiente sistema en función del parámetro m:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x + 3y + mz = 7 \end{cases}$$

m no es una incógnita, sino un parámetro: para cada valor del mismo, tenemos un sistema de ecuaciones diferente. En realidad, estamos resolviendo infinitos sistemas de ecuaciones que son muy parecidos entre sí, diferenciándose en el valor de m. Veremos cuándo esos sistemas son compatibles, ya sea determinados o indeterminados, o incompatibles, según los valores del parámetro m.

La matriz ampliada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & m & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to F_2 - F_1: \\ F_3 - F_1: \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & m-2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to \\ F_3 - 2F_2: \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m-4 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $m-4 = 0$, es decir, si $m = 4$, la última ecuación es $0x+0y+0z = 0$, es decir, $0 = 0$, por lo que podemos eliminarla. Entonces, el sistema será de dos ecuaciones con tres incógnitas, es decir, *compatible indeterminado* con infinitas soluciones. Llamando $z=t$ y pasándola al segundo miembro de las dos ecuaciones que quedan, el sistema será:

  $\left.\begin{aligned} x + y &= 3 - 2t \\ y &= 2 - t \end{aligned}\right\}$ Sustituyendo $y = 2-t$ (segunda ecuación) en la primera ecuación:

  $$x + 2 - t = 3 - 2t \Rightarrow x = 3 - 2t - 2 + t = 1 - t$$

  Por tanto, las soluciones son de la forma:

  $$(1-t, 2-t, t)$$

- Si $m \neq 4 \Rightarrow$ el sistema está triangularizado, no se cumple la condición de incompatibilidad, y tenemos el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Por ello, el sistema es *compatible determinado*. Como también nos piden resolverlo, sería así:

$$\left.\begin{array}{r} x+y \quad +2z=3 \\ y \quad +z=2 \\ (m-4)z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ (3ª ec.): $z = 0/(m–4) = 0$ $\Rightarrow$ (2ª ec.): $y +0 = 2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $y = 2$ $\Rightarrow$ (1ª ec.): $x + 2 + 0 = 3$ $\Rightarrow$ $x = 3–2 = 1$

El sistema es *compatible determinado*, con solución:

(1, 2, 0)

11) Discuta el siguiente sistema según los valores de a y b:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+az=1 \\ x+y+z=1 \\ x+ay+z=b \end{array}\right\}$$

La matriz ampliada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & b \end{pmatrix}$$

Buscando la triangularización, usamos F_2 para conseguir 0 en todas las posiciones de C_1 salvo la correspondiente a dicha fila. Y lo hacemos así porque F_2 es la única fila en la que no aparece ningún parámetro, al que no nos interesa desplegar por toda la matriz, y lo mismo para C_1:

$$\begin{array}{c} F_1-F_2 \\ \rightarrow \\ F_3-F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

No hemos de seguir, porque ya está triangularizada: la primera columna es de 0 salvo en la posición de F_2, y la segunda, salvo F_2 y F_1.

La ecuación que tiene una única incógnita es la primera. Distinguimos:

- Si a = 1, la primera fila es toda de 0: la eliminamos, quedando un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas, que observamos con detenimiento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

  - Si b = 1, además de que a = 1, la última ecuación es toda de 0, por lo que también la eliminamos. Nos quedará sólo una ecuación con tres incógnitas, por lo que el sistema será *compatible indeterminado*. (Para resolverlo, que no piden, llamaríamos, por ejemplo, $y = \lambda$ y $z = \mu$, siendo éstos valores libremente elegidos por nosotros, y los pasaríamos al segundo miembro; despejaríamos x lo que nos daría la solución en función de λ y μ).
  - Si $b \neq 1$, además de que $a = 1$, la última ecuación sería $0 = b – 1$, siendo $b – 1$ no nulo, por lo que sería imposible. Tendríamos un *sistema incompatible*.
- Si $a \neq 1$, tenemos el sistema triangularizado y no se cumple la condición de incompatibilidad, por lo que es *compatible determinado*. La primera ecuación nos daría un valor único de z: z = 0. La tercera, nos proporcionaría y, valga lo que valga b, y la ecuación restante nos daría x.

12) Discuta el siguiente sistema según los valores de a y b:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+az= \ 3 \\ 5x+2y \qquad = \ 1 \\ x \qquad +2z=2b \end{array}\right\}$$

Tomamos la matriz ampliada. Intentando evitar desplegar por toda la matriz los parámetros, buscamos 0 en C_2 (la más fácil, porque ya tiene un cero en una posición), y lo haremos a partir de F_2, que no contiene ningún parámetro:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2b \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{pmatrix} 6 & 0 & a & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2b \end{pmatrix}$$

Ya no tocamos más F_2. A partir de F_3 vamos a conseguir 0 en toda la C_1 salvo en F_2, que ya no se toca, y en la fila usada F_3:

$$\xrightarrow{F_1-6F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-12 & 4-12b \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2b \end{pmatrix}$$

Ya está triangularizada. Tomamos la primera ecuación, que sólo tiene una incógnita (z).

- Si <u>$a = 12$</u>, la ecuación primera queda como $0 = 4 - 12b$.
  - Si <u>$a = 12$ y $b = 1/3$</u>, la ec. es $0 = 0$, eliminable. El sistema se reduce a:

    $$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2/3 \end{pmatrix}$$

    con dos ecuaciones y tres incógnitas, sin cumplir la condición de incompatibilidad. Por tanto es <u>*compatible indeterminado*</u>. Si pasáramos $z = \lambda$ al otro miembro, nos va a dar infinitas soluciones en función del λ que elijamos nosotros.
  - Si <u>$a = 12$ y $b \neq 1/3$</u>, la ec. es $0 = 4 - 12b$, no nulo éste último valor. Por lo tanto, imposible de verificarse para ningún valor de las incógnitas: el sistema es <u>*incompatible*</u>.
- Si <u>$a \neq 12$</u>, tenemos el sistema triangularizado, sin la condición de incompatibilidad, con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas: es <u>*compatible determinado*</u>. La primera ecuación nos va a proporcionar z. La tercera, x, valga lo que valga b, y la segunda, x.