NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Los beneficios de una empresa, en miles de euros, han evolucionado en los 25 años de su existencia según una función del tiempo, en años, dada por la siguiente expresión:

$$B(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} & \text{si} \quad 0 \le t \le 10 \\ -\dfrac{t^2}{5} + 8t - 10 & \text{si} \quad 10 < t \le 25 \end{cases}$$

a) Halle $B''(t)$. *(1,5 puntos)*

b) Estudie la monotonía y curvatura de la función, calculando, si existen, los extremos relativos y los puntos de inflexión. *(2 puntos)*

c) Halle la recta tangente en $t = 15$. *(1 punto)*

2) Calcular las asíntotas de $f(x) = \dfrac{-4x^3 + 5x}{1 - x^2}$ *(2 puntos)*

3) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones: *(2 puntos)*

a) $y = \dfrac{4 - 2x}{(3 - x)^2}$

b) $g(x) = (3 - 7x^2)e^{-3x^2}$

c) $h(x) = 2^{5x} + \dfrac{1}{x^2}$

d) $j(x) = \log(x^2 + 2x - 1)$ (log ≡ *logaritmo en base 10*)

4) Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, indicar qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que sean cuadradas cada una de las matrices resultantes de las dos operaciones siguientes:

a) $(B + C)P$. *(0,8 puntos)*

b) BQC^t. *(0,7 puntos)*

SOLUCIONES

1) Los beneficios de una empresa, en miles de euros, han evolucionado en los 25 años de su existencia según una función del tiempo, en años, dada por la siguiente expresión:

$$B(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} & \text{si} \quad 0 \le t \le 10 \\ -\dfrac{t^2}{5} + 8t - 10 & \text{si} \quad 10 < t \le 25 \end{cases}$$

a) Halle $B''(t)$. *(1,5 puntos)*

Para derivar una función definida a trozos, hay que estudiar la continuidad imprescindiblemente.

Continuidad

- $[0, 10) \cup (10, 25]$: f es continua por estar definida mediante dos funciones que son polinómicas, las cuales no tienen discontinuidades. La continuidad en intervalos cerrados se entiende continuidad lateral desde dentro del intervalo, por lo que en $t = 0$ es continua por la derecha, y en $t = 25$, por la izquierda.
- $t = 10$: Los puntos de conexión entre definiciones de una función definida a trozos hay que estudiarlos aparte:

  1) $\exists\ B(10) = 10^2/2 = 50$.

  2) $\exists \lim\limits_{t \to 10^-} B(t) = \lim\limits_{t \to 10^-} \dfrac{t^2}{2} = 50$

  $\exists \lim\limits_{t \to 10^+} B(t) = \lim\limits_{t \to 10^+} (-\dfrac{t^2}{5} + 8t - 10) = -\dfrac{100}{5} + 8 \cdot 10 - 10 = 50$

  Por tanto, $\exists \lim\limits_{t \to 10} B(t) = 50$.

  Como $\lim\limits_{t \to 10} B(t) = B(10) \Rightarrow B$ es continua en $t = 10$.

Por tanto, B es continua en su dominio, que es $[0, 25]$. No hay, por tanto, ningún punto a excluir al estudiar la derivada.

Derivada

Las reglas de las tablas de derivadas son aplicables sólo en intervalos abiertos. Por ello, aplicándolas, obtenemos en un primer paso:

$$B'(t) = \begin{cases} \dfrac{2t}{2} = t & \text{si} \quad 0 < t < 10 \\ -\dfrac{2t}{5} + 8 & \text{si} \quad 10 < t < 25 \end{cases}$$

Y falta por estudiar el punto de conexión $t = 10$. Se tiene:

$$B'(10^-) = 10 \qquad B'(10^+) = -\dfrac{2 \cdot 10}{5} + 8 = 4$$

Como no coinciden, no existe $B'(10)$. Por ello, la expresión definitiva de B' es la anterior.

Derivada segunda

De forma análoga:

$$\boxed{B''(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < t < 10 \\ -\dfrac{2}{5} & \text{si} \quad 10 < t < 25 \end{cases}}$$

Y no hay que estudiar nada más, porque la función que estamos derivando, que es $B'(t)$, no es continua en $t = 10$ (no tiene imagen), por lo que no puede ser derivable en dicho punto.

b) Estudie la monotonía y curvatura de la función, calculando, si existen, los extremos relativos y los puntos de inflexión. *(2 puntos)*

Monotonía. Extremos relativos o locales

- Discontinuidades de B: No tiene, según lo visto.
- Discontinuidades de B': $t = 10$
- Puntos que anulan B' (*puntos críticos*):
  - En (0, 10): $t = 0$, que no consideramos, porque no está en el dominio (si estuviésemos calculando asíntotas verticales, si habría que tenerlo en cuenta).
  - En (10, 25): $-\frac{2t}{5} + 8 = 0 \Rightarrow \frac{2t}{5} = 8 \Rightarrow 2t = 40 \Rightarrow t = 20$.

Dividimos el dominio en intervalos mediante los dos puntos obtenidos $t = 10$ y $t = 20$:

	(0, 10)	10	(10, 20)	20	(20, 25)
B'	+	∄	+	0	–
B	↗ crec	P.a.	↗ crec	Mx	↘ decrec

En (10, 50) hay un punto anguloso, que no es extremo relativo.
En (20, 70) hay un máximo relativo.
Las imágenes se calculan sustituyendo en $B(t)$. El punto anguloso lo es porque se una discontinuidad de B' pero no de B. Significa, en la práctica, que la gráfica tendrá en él un "pico".

Curvatura, Puntos de inflexión

- Discontinuidades de B: No tiene.
- Discontinuidades de B': $t = 10$
- Discontinuidades de B'': $t = 10$
- Puntos que anulan B'':
  - En (0, 10): $1 = 0$, que no es posible para ningún t.
  - En (10, 25): $-2/5 = 0$, que tampoco es posible.

Dividimos el dominio en intervalos mediante el punto obtenido: $t = 10$:

	(0, 10)	10	(10, 25)
B''	+	∄	–
B	∪ convexa	P.I.	∩ cóncava

En (10, 50) tiene un punto de inflexión, porque cambia la curvatura, pero B es continua en él.

c) Halle la recta tangente en $t = 15$. *(1 punto)*

Podemos encontrar un entorno de centro $t = 15$ donde $B(t)$ coincide con la función $g(t) = -\frac{t^2}{5} + 8t - 10$. Por tanto, como el cálculo de la tangente se hace a través de la *interpretación geométrica de la derivada*, y ésta requiere la existencia de la función en un entorno del punto en cuestión, nos limitamos a trabajar con g, porque f y g tienen la misma tangente en $t = 15$.

- Punto de tangencia: $g(15) = 65$. Es: (15, 65).
- Pendiente de la tangente: $g'(t) = -2t/5 + 8 \Rightarrow g'(15) = 2$
- Ecuación de la tangente: $y - 65 = 2(t - 15) \Rightarrow y = 2t - 30 + 65 \Rightarrow \boxed{y = 2t + 35}$.

2) Calcular las asíntotas de $f(x) = \dfrac{-4x^3+5x}{1-x^2}$ *(2 puntos)*

En primer lugar, su dominio es R – {–1, 1}, porque estos valores que quitamos son los que anulan el denominador.

- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to -1} \frac{-4x^3+5x}{1-x^2} = \left(\frac{4-5}{0}\right) = \infty \Rightarrow \text{ la recta } \boxed{x=-1 \text{ es asíntota vertical}}.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-4x^3+5x}{1-x^2} = \left(\frac{-4+5}{0}\right) = \infty \Rightarrow \text{ la recta } \boxed{x=1 \text{ es asíntota vertical}}.$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3+5x}{1-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3}{-x^2} = \lim_{x\to\infty} 4x = \infty \Rightarrow \boxed{\text{No tiene a.horiz.}}$$

- Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{-4x^3+5x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3+5x}{(1-x^2)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3+5x}{x-x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3}{-x^3} = 4$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-4x^3+5x}{1-x^2} - 4x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3+5x-4x(1-x^2)}{1-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3+5x-4x+4x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

Por tanto, la recta $\boxed{y = 4x \text{ es asíntota oblicua}}$.

3) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones: *(2 puntos)*

a) $y = \dfrac{4-2x}{(3-x)^2}$

$$y' = \frac{-2(3-x)^2 - (4-2x)(-2(3-x))}{(3-x)^4} = \frac{(3-x)[-2(3-x)+(4-2x)2]}{(3-x)^4} =$$

$$= \frac{-6+2x+8-4x}{(3-x)^3} = \boxed{\frac{2-2x}{(3-x)^3}}$$

b) $g(x) = (3 - 7x^2)e^{-3x^2}$

$$g'(x) = -14x\, e^{-3x^2} - 6x\, e^{-3x^2}(3-7x^2) = e^{-3x^2}(-14x - 18x + 42x^3) =$$

$$= \boxed{e^{-3x^2}(42x^3 - 32x)}$$

c) $h(x) = 2^{5x} + \dfrac{1}{x^2}$

$$\boxed{h'(x) = 5\cdot 2^{5x}\ln(2) - \frac{2}{x^3}}$$

d) $j(x) = \log(x^2 + 2x - 1)$ (log ≡ *logaritmo en base 10*)

$$\boxed{j'(x) = \frac{1}{\ln 10}\frac{2x+2}{x^2+2x-1}}$$

4) Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, indicar qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que sean cuadradas cada una de las matrices resultantes de las dos operaciones siguientes:

a) $(B + C)P$. *(0,8 puntos)*

Como $\dim(B) = 2 \times 3$ y $\dim(C) = 2 \times 3 \Rightarrow \dim(B + C) = 2 \times 3$. Por tanto, para poder efectuar el producto, P debe tener 3 filas. Y para que el resultado sea una matriz cuadrada, 2 columnas. Es decir, $\boxed{\dim(P) = 3 \times 2}$. De esta manera, la matriz resultante será: $\dim[(B + C)P] = 2 \times 2$:

$$\begin{array}{cc} (B+C) \cdot & P \\ 2 \times 3 & 3 \times 2 \end{array}$$

b) BQC^t. *(0,7 puntos)*

$\dim(B) = 2 \times 3$ y $\dim(C^t) = 3 \times 2$. Entonces:

$$\begin{array}{ccccc} B & \cdot & Q & \cdot & C^t \\ 2 \times 3 & & 3 \times 3 & & 3 \times 2 \end{array}$$

Luego se puede efectuar el producto si $\boxed{\dim(Q) = 3 \times 3}$, y el resultado final será tal que: $\dim(BQC^t) = 2 \times 2$.

IES Fernando de Herrera **Curso 2016 / 17**
Segundo trimestre – Observación evaluable escrita nº 2 – 2º Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) La función de costes de una fábrica, $f(x)$, en miles de euros, viene dada por la expresión:

$$f(x) = 2x^2 - 36x + 200,$$

donde x es la cantidad fabricada del producto, en miles de kilogramos ($x \geq 0$).

a) Determine la cantidad a fabricar para minimizar el coste y calcule este coste mínimo. *(0.8 puntos)*

b) A partir del signo de $f'(7)$, ¿qué se puede decir del coste para una producción de siete mil kilogramos? *(0,8 puntos)*

c) Dibuje la gráfica de la función de costes. ¿Para qué cantidad o cantidades fabricadas el coste es de 200000 €? *(0,9 puntos)*

2) a) Calcule y simplifique las derivadas de: *(1,5 puntos)*

$$f(x) = (x^2 - 1) \cdot (3x^3 + 5)^3 \qquad g(x) = \frac{\ln(2x)}{e^{3x}} \qquad h(x) = \log(3x^2 - x)$$

b) Dada la función $f(x) = -x^2 + px + q$, calcule los valores que deben tener p y q para que la gráfica de la función f pase por el punto $(-4, -5)$ y presente un máximo en el punto de abscisa $x = -1$. Determine el valor de $f(x)$ en ese punto. *(1 punto)*

3) Dada la función $h(x) = \dfrac{3x^2 + 6}{2x + 1}$, determine, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas. *(1,5 puntos)*

4) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x^2 + 1 & si \quad x \leq 2 \\ -x + a & si \quad x > 2 \end{cases}$, con $a > 0$.

a) Calcule el valor del parámetro a para que la función sea continua en su dominio. En ese caso, ¿sería derivable en su dominio? *(1,2 puntos)*

b) Para el valor $a = 4$, estudie la monotonía de la función y calcule sus extremos relativos. *(1,3 puntos)*

c) Para el valor $a = 4$, represente gráficamente la función y halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$. *(1 pto)*

SOLUCIONES

1) La función de costes de una fábrica, $f(x)$, en miles de euros, viene dada por la expresión:

$$f(x) = 2x^2 - 36x + 200,$$

donde x es la cantidad fabricada del producto, en miles de kilogramos ($x \geq 0$).

a) Determine la cantidad a fabricar para minimizar el coste y calcule este coste mínimo. *(0.8 puntos)*

Se tiene que $f'(x) = 4x - 36$. Nos piden el mínimo absoluto.

Puntos candidatos

1) Extremos del intervalo: 0; $+\infty$.
2) Discontinuidades de f: No tiene (es polinómica).
3) Discontinuidades de f': No tiene (es polinómica).
4) $f'(x) = 0$: $4x - 36 = 0 \Rightarrow 4x = 36 \Rightarrow x = 9$ (válida, pues está en el dominio)

Imágenes o límites

1) $f(0) = 200$.
2) $\lim_{x\to+\infty} (2x^2 - 36x + 200) = +\infty$ (los polinomios se van al infinito cuando x tiende a infinito, y es el sumando de mayor grado quien decide el signo de dicho infinito).
3) $f(9) = 2\cdot 81 - 36\cdot 9 + 200 = 38$.

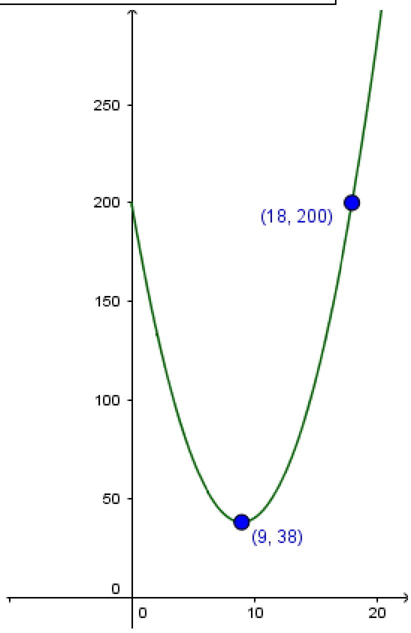
Por tanto, el mínimo absoluto es 38.000 €, que se obtienen para 9.000 kg.

b) A partir del signo de $f'(7)$, ¿qué se puede decir del coste para una producción de siete mil kilogramos? *(0,8 puntos)*

Como $f'(7) = 4\cdot 7 - 36 = -8 < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente en $x = 7$. Podemos deducir, entonces que:

El coste va decreciendo cuando la producción se sitúa en un entorno de 7.000 kg, lo que significa que aumentando la producción algo más, el coste sería menor.

c) Dibuje la gráfica de la función de costes. ¿Para qué cantidad o cantidades fabricadas el coste es de 200000 €? *(0,9 puntos)*



La gráfica (se adjunta) es una parábola convexa (porque el coeficiente de x^2 es positivo). Se obtiene así:

- $x = 0 \Rightarrow y = 200$: corta a OY en (0, 200).
- $y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 36x + 200 = 0 \Rightarrow x^2 - 18x + 100 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{-76}}{2} \Rightarrow$ No corta a OX.
- Eje: $x = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{36}{4} \Rightarrow x = 9$
- Vértice: $f(9) = 38 \Rightarrow (9, 38)$.
- Otros puntos: (18, 200), (50, 3400).

Por otra parte $f(x) = 200 \Rightarrow 2x^2 - 36x + 200 = 200 \Rightarrow 2x^2 - 36x = 0 \Rightarrow 2x(x - 18) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 18$. Es decir:

El coste es de 200000€ para una producción nula o de 18000 kg

2) a) Calcule y simplifique las derivadas de: *(1,5 puntos)*

$f(x) = (x^2 - 1)\cdot(3x^3+5)^3 \qquad g(x) = \dfrac{\ln(2x)}{e^{3x}} \qquad h(x) = \log(3x^2 - x)$

- $f(x) = (x^2 - 1)\cdot(3x^3+5)^3$

$$f'(x) = 2x\,(3x^3+5)^3 + (x^2-1)\,3\,(3x^3+5)^2\,9x^2 =$$
$$= 2x\,(3x^3+5)^3 + 27x^2\,(x^2-1)\,(3x^3+5)^2 =$$
$$= (3x^3+5)^2\,[2x\,(3x^3+5) + 27x^2\,(x^2-1)] =$$
$$= (3x^3+5)^2\,(6x^4+10x+27x^4-27x^2) = \boxed{(3x^3+5)^2\,(33x^4-27x^2+10x)}$$

- $g(x) = \dfrac{\ln(2x)}{e^{3x}}$

$$g'(x) = \frac{\frac{2}{2x}e^{3x} - \ln(2x)3e^{3x}}{(e^{3x})^2} = \frac{\frac{e^{3x}}{x} - \frac{x\ln(2x)3e^{3x}}{x}}{e^{6x}} = \frac{\frac{e^{3x} - 3xe^{3x}\ln(2x)}{x}}{e^{6x}} =$$
$$= \frac{e^{3x} - 3xe^{3x}\ln(2x)}{xe^{6x}} = \frac{e^{3x}(1-3x\ln(2x))}{xe^{6x}} = \frac{1-3x\ln(2x)}{xe^{6x-3x}} = \boxed{\frac{1-3x\ln(2x)}{xe^{3x}}}$$

- $h(x) = \log(3x^2 - x)$

$$h'(x) = \boxed{\frac{1}{\ln(10)}\,\frac{6x-1}{3x^2-x}}$$

b) Dada la función $f(x) = -x^2 + px + q$, calcule los valores que deben tener p y q para que la gráfica de la función f pase por el punto $(-4, -5)$ y presente un máximo en el punto de abscisa $x = -1$. Determine el valor de $f(x)$ en ese punto. *(1 punto)*

- Pasa por $(-4, -5) \Rightarrow f(-4) = -5 \Rightarrow -(-4)^2 + p(-4) + q = -5 \Rightarrow -16 - 4p + q = -5 \Rightarrow -4p + q = 16 - 5 \Rightarrow \boxed{-4p + q = 11}$ (1)
- Presenta un máximo en $x = -1$: Para ello, bastará exigir que $f'(-1) = 0$. Como $f'(x) = -2x + p$, lo anterior se traduce en que $-2(-1) + p = 0 \Rightarrow 2 + p = 0 \Rightarrow \boxed{p = -2}$. Y, <u>en efecto, es un máximo</u>, porque $f''(x) = -2 \Rightarrow f''(-1) = -2 < 0$. Hay que comprobarlo, porque podría no haber solución.

Sustituyendo en (1): $-4(-2) + q = 11 \Rightarrow 8 + q = 11 \Rightarrow \boxed{q =}\ 11 - 8 = \boxed{3}$.

Por tanto, $\boxed{p = -2 \text{ y } q = 3} \Rightarrow f(x) = -x^2 - 2x + 3 \Rightarrow \boxed{f'(-1) =}\ -1 + 2 + 3 = \boxed{4}$

3) Dada la función $h(x) = \dfrac{3x^2+6}{2x+1}$, determine, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas. *(1,5 puntos)*

- <u>Asíntotas verticales</u>. Puede haberlas en puntos de discontinuidad de h. Estos están donde se anula el denominador: $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/2$. Probamos:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{3x^2+6}{2x+1} = \left(\frac{6.75}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{\text{La recta } x = -\frac{1}{2} \text{ es asíntota vertical}}$$

- <u>Asíntotas horizontales</u>. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+6}{2x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2} = \infty$. Por tanto, $\boxed{\text{no tiene asíntotas horizontales}}$.

- Asíntotas oblicuas. $m = \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2+6}{2x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+6}{(2x+1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+6}{2x^2+x}$ $= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$

$$n = \lim_{x\to\infty} [h(x) - x] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+6}{2x+1} - \frac{3}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2(3x^2+6) - 3x(2x+1)}{2(2x+1)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+12-6x^2-3x}{4x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{12-3x}{4x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x}{4x} = -\frac{3}{4}$$

Por tanto, $\boxed{\text{la recta } y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} \text{ es asíntota oblicua}}$.

4) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x^2 + 1 & si \quad x \le 2 \\ -x + a & si \quad x > 2 \end{cases}$, con $a > 0$.

a) Calcule el valor del parámetro a para que la función sea continua en su dominio. En ese caso, ¿sería derivable en su dominio? *(1,2 puntos)*

Continuidad

- En R – {2}: f es continua, por estar definida mediante funciones polinómicas.
- En $x = 2$: $\exists f(2) = \frac{1}{a}4 + 1 = \frac{4}{a} + 1 = \frac{4+a}{a}$. Además:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(\frac{1}{a}x^2 + 1\right) = \frac{1}{a}4 + 1 = \frac{4+a}{a}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (-x + a) = -2 + a$$

Para ser continua en $x = 2$, único punto que nos queda (ya hemos visto que es continua en el resto), estos valores deben coincidir:

$$\frac{4+a}{a} = -2 + a \Rightarrow 4 + a = -2a + a^2 \Rightarrow 0 = a^2 - 2a - a - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ ó } a = 4$$

Para cualquiera de estos valores, f es continua. Pero como, según el enunciado, $a > 0$, la única solución válida es $\boxed{a = 4}$. Para este valor:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + 1 & si \quad x \le 2 \\ -x + 4 & si \quad x > 2 \end{cases}}$$

Derivada

Aplicando las fórmulas de las tablas de derivación:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}2x = \frac{x}{2} & si \quad x < 2 \\ -1 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Como f es continua en $x = 2$, podría ser derivable, de modo que lo investigamos:

$$f'(2^-) = \frac{2}{2} = 1; \qquad f'(2^+) = -1$$

Como no coinciden, $\boxed{f \text{ no es derivable en } x = 2}$, de modo que, finalmente:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}2x = \frac{x}{2} & si \quad x < 2 \\ -1 & si \quad x > 2 \end{cases}}$$

b) Para el valor $a = 4$, estudie la monotonía de la función y calcule sus extremos relativos. *(1,3 puntos)*

- Discontinuidades de f: No tiene.
- Discontinuidades de f': $x = 2$ (la función f' no tiene imagen en dicho punto)
- $f'(x) = 0$:
  - Si $x < 2$: $\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$, válida, porque está en la zona $x < 2$.
  - Si $x > 2$: $-1 = 0$, imposible para ningún x.

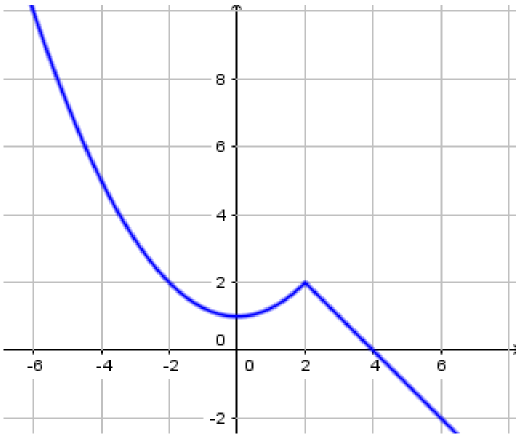
Por tanto:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	–	0	+	∄	–
f	↘ decrec	mín	↗ crec	Máx y p.ang.	↘ decrec

En (0, 1) tiene un mínimo relativo.
En (2, 2) tiene un máximo relativo, que es punto anguloso, porque f' no existe en $x = 2$, aunque f es continua en él.

c) Para el valor $a = 4$, represente gráficamente la función y halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$. *(1 pto)*

Tenemos el estudio de continuidad y la monotonía de f. Además, sabemos que $y = \frac{x^2}{4} + 1$ es una parábola convexa y, como el mínimo lo tiene en (0, 1), no corta a OX. Se afina su gráfica con algún punto: (–4, 5), (–2, 2) y (2, 2). Por otra parte, $y = -x + 4$ es una recta decreciente, que pasa por (4, 0) y (6, –2). Por tanto, su gráfica es la adjunta.



Calculemos la tangente

- Punto de tangencia: $f(-1) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow \left(-1, \frac{5}{4}\right)$.
- Pendiente de la tangente: $m = f'(-1) = -1/2$.
- Recta tangente: $y - \frac{5}{4} = -\frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{5}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{4}}.$$

IES Fernando de Herrera **Curso 2016 / 17**

Segundo trimestre – Recuperación – 2º Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: **1)** Todos los **folios** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte superior. **2)** Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. **3)** No se puede usar **corrector ni lápiz**, y el bolígrafo debe ser de **tinta indeleble**. Se aconseja no usar borrador. **4)** Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar** la respuesta a una pregunta con las de otras. **5)** **Desatender las instrucciones puede penalizarse con hasta 1 punto** o la **anulación** en caso de usar tinta corregible.

1) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{a} & \text{si} \quad x \le 4 \\ bx - 8 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

a) Hallar a y b (no nulos) para que la función sea derivable. *(1 punto)*

b) Para $a = b = 2$, estudiar la monotonía de f y calcular las coordenadas de sus extremos relativos. *(1 punto)*

c) Para $a = b = 2$ calcular la recta tangente en $x = 0$. *(0,5 ptos)*

2) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

a) $f(x) = \dfrac{1-3x}{x} + (5x-2)^3$.

b) $g(x) = (x^2+2)\cdot \ln(x^2+2)$.

c) $h(x) = 3^{5x} + e^x$.

d) La gráfica de la función derivada de una función f es la parábola de vértice (0, 2) que corta al eje de abscisas en los puntos (−3, 0) y (3, 0). A partir de dicha gráfica, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f, y las abscisas de sus extremos relativos. *(1,5 ptos)*

3) a) Hallar las asíntotas de $f(x) = \dfrac{3-x^2}{2-x}$ *(1,5 puntos)*

b) Halle los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$ pase por el punto (1, −3) y tenga el punto de inflexión en $x = -1$. *(1,5 puntos)*

4) Los beneficios de una empresa en sus 5 primeros años vienen dados, en millones de euros, por la función:

$$B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t\,, \quad 0 \le t \le 5$$

Calcular su beneficio máximo, a cuánto asciende y en qué año se produce. *(1,5 ptos)*

SOLUCIONES

1) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{a} & \text{si} \quad x \le 4 \\ bx - 8 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

a) Hallar a y b (no nulos) para que la función sea derivable. *(1 punto)*

Para que sea derivable, debe ser continua. Exigiremos esto, pues:

- En $(-\infty, 4)$: f es continua, por estar definida por una función polinómica.
- En $(4, +\infty)$: f es continua, por la misma razón.
- En $x = 4$: 1) $\exists f(4) = 8 - \dfrac{16}{a}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-}\left(2x - \dfrac{x^2}{a}\right) = 8 - \dfrac{16}{a}$; $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+}(bx-8) = 4b - 8$. Para ser continua, estos resultados deben coincidir:

$$8 - \frac{16}{a} = 4b - 8 \qquad (1)$$

Luego f será continua si ocurre (1). Procedemos a derivar:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{2x}{a} & \text{si} \quad x < 4 \\ b & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

lo que se obtiene directamente aplicando las reglas de derivación. En el punto $x = 4$ podría ser derivable, porque es continua si exigimos la condición (1). Para ello, deben coincidir las derivadas laterales:

$$f'(4^-) = 2 - \frac{8}{a} \qquad f'(4^+) = b$$

Será derivable si exigimos:

$$2 - \frac{8}{a} = b \qquad (2)$$

Con (1) y (2) formamos un sistema de ecuaciones que procedemos a resolver:

$$(1) \Rightarrow 16 - \frac{16}{a} = 4b \Rightarrow b = \frac{16 - \frac{16}{a}}{4} = \frac{\frac{16a-16}{a}}{4} = \frac{16a-16}{4a}$$

Igualando con (2):

$$2 - \frac{8}{a} = \frac{16a-16}{4a} \Rightarrow \frac{2a-8}{a} = \frac{16a-16}{4a} \Rightarrow 4(2a-8) = 16a - 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8a - 32 = 16a - 16 \Rightarrow 16 - 32 = 16a - 8a \Rightarrow -16 = 8a \Rightarrow a = -2$$

Sustituyendo en (2):

$$b = 2 + 4 = 6$$

La solución es $\boxed{a = -2,\ b = 6}$.

b) Para $a = b = 2$, estudiar la monotonía de f y calcular las coordenadas de sus extremos relativos. *(1 punto)*

Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad x \le 4 \\ 2x - 8 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

Esta función es continua si $x \neq 4$, por estar definida mediante funciones polinómicas. Y si $x = 4$:

$$1)\ \exists f(4) = 8 - 8 = 0;\ \ 2)\ \lim_{x\to 4^-}\left(2x - \frac{x^2}{2}\right) = 0;\ \ \lim_{x\to 4^+}(2x-8) = 0$$

Por lo que también es continua (coinciden los resultados).
La derivada será:

$$f'(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x<4 \\ 2 & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$$

A falta de ver qué sucede en $x = 4$: $f'(4^-) = 2 - 4 = -2$; $f'(4^+) = 2 \Rightarrow$ No es derivable en $x = 4$, por lo que la expresión final de f' es la anterior.
Estudiemos la monotonía:

- <u>Discontinuidades de f</u>: No tiene.
- <u>Discontinuidades de f'</u>: <u>$x = 4$</u> (f' no tiene imagen).
- <u>$f'(x) = 0$</u>: Si $x < 4$, $2 - x = 0 \Leftrightarrow$ <u>$x = 2$</u>. Si $x > 4$, $2 = 0$, que no es posible.

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, +\infty)$
f'	+	0	–	$\nexists$	+
f	↗ crec	Máx	↘ decrec	Mín y p.a.	↗ crec

Como $f(2) = 2$ y $f(4) = 0$:

> Es creciente en $(-\infty, 2)$ y en $(4, +\infty)$ *. Es decreciente en $(2, 4)$.
> En $(2, 2)$ tiene un máximo relativo y en $(4, 0)$ un mínimo relativo y punto anguloso.

*** Es incorrecto decir que es creciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$, porque NO es cierto, dado que incumple la definición de función monótona creciente**.

c) Para $a = b = 2$ calcular la recta tangente en $x = 0$. *(0,5 ptos)*

- Punto de tangencia: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$.
- Pendiente de la tangente: $m = f'(0) = 2$.
- Recta tangente: $y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = 2x}$.

2) Calcular y simplificar las derivadas de las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

a) $f(x) = \dfrac{1-3x}{x} + (5x-2)^3$.

$$f'(x) = \frac{-3x-(1-3x)}{x^2} + 3(5x-2)^2 5 = \frac{-3x-1+3x}{x^2} + 15(5x-2)^2 =$$

$$= \boxed{\frac{-1}{x^2} + 15(5x-2)^2}$$

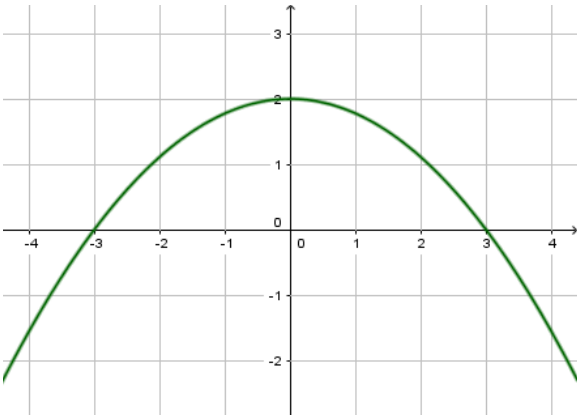
b) $g(x) = (x^2+2)\cdot\ln(x^2+2)$.

$$g'(x) = 2x\ln(x^2+2) + (x^2+2)\frac{2x}{x^2+2} = 2x\ln(x^2+2) + 2x = \boxed{2x[1 + \ln(x^2+2)]}$$

c) $h(x) = 3^{5x} + e^x$.

$$h'(x) = \boxed{5\cdot 3^{5x}\ln 3 + e^x}$$

d) La gráfica de la función derivada de una función f es la parábola de vértice $(0, 2)$ que corta al eje de abscisas en los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$. A partir de dicha gráfica, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f, y las abscisas de sus extremos relativos. *(1,5 ptos)*



Esbozamos la gráfica de f, y la adjuntamos.
Como $f'(x)$ es una función polinómica, $f(x)$ también lo es. Por ello, ni f ni f' tienen discontinuidades.
Por otra parte, los dos cortes de f' con OX nos los dan, y no hay más cortes, porque se trata de una parábola.
Y los signos de f' los obtenemos desde su gráfica.

Con todo ello, podemos proceder a estudiar la monotonía de f.

- Discontinuidades de f ó f': No hay.
- $f'(x) = 0$: $x = -3$ ó $x = 3$.

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	–	0	+	0	–
f	↘ decrec	Mín	↗ crec	Máx	↘ decrec

Es creciente en $(-3, 3)$.
Es decreciente en $(-\infty, -3)$ y en $(3, +\infty)$.
Tiene un mínimo relativo o local en $x = -3$
Tiene un máximo relativo o local en $x = 3$.

Como ya advertimos antes, **es incorrecto decir que es decreciente en $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.**

3) a) Hallar las asíntotas de $f(x) = \dfrac{3-x^2}{2-x}$ *(1,5 puntos)*

- Asíntotas verticales: Puede tenerla en los puntos de discontinuidad. Como $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$, éste es el único valor donde puede tener.

$$\lim_{x\to 2} \frac{3-x^2}{2-x} = \left(\frac{-1}{0}\right) = \infty$$

Por tanto, $\boxed{\text{la recta } x = 2 \text{ es asíntota vertical}}$.

- Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-x^2}{2-x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2}{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$. De ello deducimos que $\boxed{\text{no tiene asíntota horizontal}}$.

- Asíntota oblicua: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{3-x^2}{2-x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-x^2}{2x-x^2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2}{-x^2} = 1$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3-x^2}{2-x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3-x^2-x(2-x)}{2-x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3-x^2-2x+x^2}{2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-2x}{2-x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{-x} = 2$$

Por tanto, $\boxed{\text{la recta } y = x + 2 \text{ es asíntota oblicua}}$.

b) Halle los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$ pase por el punto (1, −3) y tenga el punto de inflexión en $x = -1$. *(1,5 puntos)*

- Pasa por (1, –3) $\Rightarrow$ $-3 = a + 3 - 5 + b$ $\Rightarrow$ $a + b = -1$ (1)
- Tiene un punto de inflexión en $x = -1$. Para que ocurra, nos bastará que exigir que $f''(-1) = 0$ y que $f'''(-1) \neq 0$.
  Como $f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5$ $\Rightarrow$ $f''(x) = 6ax + 6$ $\Rightarrow$ $f'''(x) = 6a$.
  Luego $f''(-1) = 0$ $\Leftrightarrow$ $-6a + 6 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{a = 1}$.
  Y con ello, $f'''(-1) = 6 \cdot 1 = 6 \neq 0$, por lo que, en efecto, es un punto de inflexión.

Sustituyendo en (1):

$$1 + b = -1 \Rightarrow \boxed{b = -2}.$$

Por tanto, $\boxed{\text{la solución es } a = 1,\ b = -2, \text{ y la función es } f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 2}$.

4) Los beneficios de una empresa en sus 5 primeros años vienen dados, en millones de euros, por la función:

$$B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t, \quad 0 \le t \le 5$$

Calcular su beneficio máximo, a cuánto asciende y en qué año se produce. *(1,5 ptos)*

Puntos a estudiar:

- Extremos del dominio: 0; 5.
- Discontinuidades de B: No tiene.
- Discontinuidades de B': No tiene.
- $B'(t) = 0$: $\frac{3t^2}{4} - 6t + 9 = 0 \Rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} = 2 \\ = 6 \text{ (no válida)} \end{cases}$

Imágenes o límites:

- $B(0) = 0$
- $B(5) = \frac{125}{4} - 3 \cdot 25 + 9 \cdot 5 = \frac{5}{4}$.
- $B(2) = 2 - 12 + 18 = 8$

Por tanto, $\boxed{\text{el beneficio máximo es de 8 millones de euros y se produce en el 2º año}}$.